

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*

*Jamova 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
telefon (01) 47 68 500  
faks (01) 42 50 681  
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni program Geodezija,  
smer Geodezija

Kandidatka:

**Marta Jakopič**

## **Določitev odklonov navpičnic iz geoidnih višin**

**Diplomska naloga št.: 756**

**Mentor:**

doc. dr. Miran Kuhar

Ljubljana, 23. 6. 2008

## **IZJAVA O AVTORSTVU**

Podpisana **MARTA JAKOPIČ** izjavljam, da sem avtorica diplomske naloge z naslovom: »**DOLOČITEV ODKLONOV NAVPIČNIC IZ GEOIDNIH VIŠIN**«.

Izjavljam, da se odpovedujem vsem materialnim pravicam iz dela za potrebe elektronske separatoteke FGG.

Ljubljana, 11.06.2008

---

(podpis avtorja)

**STRAN ZA POPRAVKE**

| <b>Stran z napako</b> | <b>Vrstica z napako</b> | <b>Namesto</b> | <b>Naj bo</b> |
|-----------------------|-------------------------|----------------|---------------|
|-----------------------|-------------------------|----------------|---------------|

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentorju doc. dr. Miranu Kuharju za vso strokovno in tehnično pomoč ter vzpodbudo pri izdelavi diplomske naloge.

Hvala mojemu bratu, ki mi je dal koristne nasvete, ko se mi je zataknilo pri programski kodi za izračun.

## **BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK**

**UDK:** 528.21(043.2)

**Avtor:** Marta Jakopič

**Mentor:** doc. dr. Miran Kuhar

**Somentor:**

**Naslov:** Določitev odklonov navpičnic iz geoidnih višin

**Obseg in oprema:** 64 str., 9 pregl., 15 sl., 60 en.

**Ključne besede:** geoid, odklon navpičnice, bilinearna interpolacija, redukcija opazovanj, geoidna ravnina

### **Izvleček:**

V diplomski nalogi je predstavljena lokalna metoda določitve odklonov navpičnic s pomočjo ravnine, ki je izračunana na podlagi interpoliranih geoidnih višin. Leta 2000 je bila določena natančna ploskev geoida za območje Slovenije, ki je dana v obliki pravilne celične (grid) mreže. Ta grid geoidnih višin je bil v diplomski nalogi osnova za interpolacijo geoidnih višin točk, iz katerih je bila določena ravnina. Koeficienti ravnine podajajo odklon navpičnice v težiščni točki. To pomeni, da lahko ob znanem geoidu izračunamo odklone navpičnic v katerikoli točki na območju Slovenije. V nalogi smo računske odklone primerjali z merjenimi odkloni ter odkloni določenimi iz globalnega geopotencialnega modela EGM96. Na ta način smo poskušali oceniti natančnost računskih odklonov. Računske odklone žal nismo mogli primerjati z merjenimi odkloni na mejnih območjih Hrvaške in Avstrije, saj je geoidni model Slovenije podan točno do meje. Iz tega izhaja tudi slabša natančnost računskih odklonov navpičnic. Ob ustrezni natančnosti računskih odklonov, bi lahko z avtomatiziranimi postopki uporabili odklone navpičnic pri različnih izračunih in pri tem ne bi potrebovali dolgotrajnih meritev. Za natančnejšo uporabo tega postopka, bi bilo priporočljivo računske odklone določiti iz novega geoidnega modela Slovenije.

**BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTATION PAGE AND ABSTRACT****UDC:** 528.21(043.2)**Author:** Marta Jakopič**Mentor:** Asist. Prof. Dr. Miran Kuhar**Co-mentor:****Title:** Determination of deflection of the vertical from geoid heights**Notes:** 64 pag., 9 tab., 15 fig., 60 eq.**Key words:** geoid, deflection of the vertical, bilinear interpolation, geoid plane, reduction of observations**Abstract:**

The diploma introduces the local method of establishing the deflections of verticals with the help of a plane, which is calculated on the basis of interpolated geoid heights. In the year 2000, the exact surface of the geoid for the region of Slovenia, which is given in the form of a regular grid, was established. In the diploma, this grid of geoid heights formed the basis for the interpolation of the geoid heights of points, from which the plane was established. The coefficients of the plane give the deflection of the vertical in the point of gravity. This means that, given a known geoid, we can calculate the deflection of verticals at any point in the region of Slovenia. In the diploma, we compared the calculation deflections with the measured deflections and the deflections determined from the global geopotential model EGM96. In this way we have tried to estimate the accuracy of the calculation deflections. Unfortunately, we could not compare the calculation deflections with the measured deflections at the border areas of Croatia and Austria, since the geoid model of Slovenia reaches exactly to the border. A lesser accuracy of the calculation deflections of verticals also results from this. Given an adequate accuracy of calculation deflections, we could, by employing automated procedures, use the declinations of verticals in different calculations and thus eliminate the need for lengthy measurements. For a more accurate use of this procedure, it would be recommendable to determine the calculation deflections from the new geoid model of Slovenia.

## SEZNAM KRATIC

|          |                                                                             |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|
| GK       | Gauss-Krügerjev koordinatni sistem                                          |
| GPS      | Global Positioning System                                                   |
| ESRS     | European Spatial Reference System                                           |
| ETRS89   | European Terrestrial Reference System                                       |
| EVRS     | European Vertical Reference System                                          |
| EPN      | EUREF Permanent Network                                                     |
| EVRF2000 | European Vertical Reference Frame                                           |
| LA       | Lokalni astronomski koordinatni sistem                                      |
| LG       | Lokalni geodetski koordinatni sistem                                        |
| NAP      | Normaal Amsterdams Peil                                                     |
| GPU      | Geopotential Unit                                                           |
| SI       | Mednarodni sistem enot ( francosko: <i>Système International d'Unités</i> ) |
| EGM96    | Earth Gravitational Model                                                   |
| NIMA     | National Imagery and Mapping Agency                                         |
| OSU      | Ohio State University                                                       |
| IUGG     | The International Union of Geodesy and Geophysics                           |
| 3R       | Tri-razsežni prostor                                                        |

## KAZALO VSEBINE

|                                                                            |             |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK .....</b>             | <b>I</b>    |
| <b>BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTATION PAGE AND ABSTRACT .....</b>                 | <b>II</b>   |
| <b>SEZNAM KRATIC.....</b>                                                  | <b>III</b>  |
| <b>KAZALO VSEBINE.....</b>                                                 | <b>IV</b>   |
| <b>KAZALO SLIK.....</b>                                                    | <b>VII</b>  |
| <b>KAZALO PREGLEDNIC .....</b>                                             | <b>VIII</b> |
| <b>KAZALO PRILOG.....</b>                                                  | <b>IX</b>   |
| <br>                                                                       |             |
| <b>1 UVOD.....</b>                                                         | <b>1</b>    |
| <b>2 IZHODIŠČA, DEFINICIJE IN DOLOČITVE ODKLONOV NAVPIČNIC .....</b>       | <b>3</b>    |
| 2.1 Sila teže, potencial sile teže .....                                   | 3           |
| 2.2 Nivojske ploskve .....                                                 | 4           |
| 2.3 Tri osnovne izhodiščne ploskve .....                                   | 4           |
| 2.4 Anomalijsko težnostno polje Zemlje .....                               | 6           |
| 2.4.1 Anomalijsko težnostno polje .....                                    | 7           |
| 2.5 Odklon navpičnice .....                                                | 9           |
| 2.5.1 Različne definicije odklonov navpičnic.....                          | 9           |
| 2.5.2 Lastnosti odklonov navpičnic.....                                    | 12          |
| 2.6 Metode določitve odklona navpičnice .....                              | 13          |
| <b>3 ASTRONOMSKO – GEODETSKA METODA DOLOČITVE ODKLONOV NAVPIČNIC .....</b> | <b>14</b>   |
| <b>4 RAZVOJ POTENCIALA V VRSTO PO SFERNIH FUNKCIJAH .....</b>              | <b>15</b>   |
| 4.1 Gravitacijski potencial Zemlje .....                                   | 15          |
| 4.1.1 Gravitacijski potencial Zemljinega telesa in Zemljine atmosfere..... | 15          |
| 4.2 Uporaba geopotencialnega modela .....                                  | 18          |
| 4.2.1 Normalni potencial .....                                             | 18          |

|         |                                                                                        |    |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2.2   | Moteči potencial.....                                                                  | 20 |
| 4.2.3   | Moteča težnost, anomalija težnosti in odkloni navpičnic .....                          | 21 |
| 5       | VZPOSTAVITEV ESRS V SLOVENIJI .....                                                    | 22 |
| 5.1     | Nov horizontalni koordinatni sistem.....                                               | 22 |
| 5.2     | Višinski sistem Slovenije.....                                                         | 23 |
| 5.2.1   | Višinski sistemi .....                                                                 | 23 |
| 6       | UPORABA ODKLONOV NAVPIČNIC .....                                                       | 26 |
| 6.1     | Transformacija med astronomskimi in geodetskimi koordinatami .....                     | 26 |
| 6.2     | Redukcija terestričnih opazovanj v računski prostor.....                               | 26 |
| 6.2.1   | Redukcija opazovanj zaradi zemeljskega težnostnega polja.....                          | 27 |
| 6.2.1.1 | Popravek astronomskega azimuta $A$ na geodetski azimut $\alpha'$ .....                 | 27 |
| 6.2.1.2 | Horizontalni kot/horizontalna smer.....                                                | 28 |
| 6.2.1.3 | Zenitna razdalja .....                                                                 | 29 |
| 6.2.2   | Popravki zaradi geometrije elipsoida .....                                             | 29 |
| 6.2.2.1 | Dolžine.....                                                                           | 29 |
| 6.2.2.2 | Redukcija geodetskega azimuta $\alpha'$ v Laplacov azimut $\alpha$ .....               | 30 |
| 6.2.2.3 | redukcija Laplacejevega azimuta $\alpha$ na azimut geodetske krivulje $\alpha^E$ ..... | 31 |
| 6.3     | Primer uporabe redukcije opazovanj v računski prostor.....                             | 31 |
| 6.3.1   | Podatki .....                                                                          | 31 |
| 6.3.2   | Izračunane vrednosti .....                                                             | 32 |
| 7       | GEOID SLOVENIJE 2000.....                                                              | 33 |
| 7.1     | Izračun ploskve geoida Slovenije .....                                                 | 33 |
| 7.1.1   | Uporabljeni podatki .....                                                              | 33 |
| 7.1.1.1 | Globalni geopotencialni model Zemlje (EGM96).....                                      | 34 |
| 7.1.1.2 | Digitalni model reliefa (DMR) .....                                                    | 34 |
| 7.1.1.3 | Digitalni model gostote (DMG) .....                                                    | 34 |
| 7.1.1.4 | Odkloni navpičnic.....                                                                 | 35 |
| 7.1.1.5 | Anomalije težnosti .....                                                               | 35 |
| 7.1.1.6 | Podatki GPS/NVN .....                                                                  | 36 |
| 7.1.2   | Postopek Remove.....                                                                   | 37 |

|         |                                                                                                                                        |    |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 7.1.3   | Postopek kolokacije .....                                                                                                              | 38 |
| 7.1.4   | Postopek Restore .....                                                                                                                 | 39 |
| 7.2     | Raziskave natančnosti ploskve geoida Slovenije .....                                                                                   | 39 |
| 7.3     | Težave obstoječega geoidnega modela .....                                                                                              | 40 |
| 8       | <b>IZRAČUN KOMPONENT ODKLONA NAVPIČNICE IZ GEOIDNIH VIŠIN</b>                                                                          | 41 |
| 8.1     | Metoda določitve geoidne ravnine.....                                                                                                  | 41 |
| 8.2     | Podatki in programska oprema za izračun .....                                                                                          | 41 |
| 8.3     | Teoretične osnove .....                                                                                                                | 41 |
| 8.3.1   | Interpolacija.....                                                                                                                     | 42 |
| 8.3.2   | Analitična predstavitev lokalnega geoida .....                                                                                         | 43 |
| 8.3.3   | Način izračuna geoidne ravnine .....                                                                                                   | 44 |
| 8.3.3.1 | Posredna izravnava .....                                                                                                               | 44 |
| 8.4     | Interpolacija geoidnih višin.....                                                                                                      | 45 |
| 8.5     | Izračun geoidne ravnine .....                                                                                                          | 47 |
| 9       | <b>PRIMERJAVA MERJENIH ODKLONOV, DOLOČENIH IZ GLOBALNEGA GEOPOTENCIALNEGA MODELA EGM96 IN IZRAČUNANIH IZ GRIDA GEOIDNIH VIŠIN.....</b> | 49 |
| 9.1     | Velikosti in razlike med odkloni.....                                                                                                  | 49 |
| 9.2     | Natančnost izračunanih odklonov.....                                                                                                   | 54 |
| 10      | <b>PRIMER UPORABE IZRAČUNANIH ODKLONOV NAVPIČNIC.....</b>                                                                              | 56 |
| 10.1    | Podatki in programska oprema .....                                                                                                     | 56 |
| 10.2    | Primerjava izravnanih koordinat mreže z in brez uporabe odklonov navpičnice.....                                                       | 57 |
| 11      | <b>ZAKLJUČEK .....</b>                                                                                                                 | 60 |
| VIRI    | .....                                                                                                                                  | 62 |
| PRILOGE |                                                                                                                                        |    |

## KAZALO SLIK

|                                                                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Slika 1: Osnovne ploskve in smeri v geodeziji (Pribečević, 2000).....                                                                                                          | 6  |
| Slika 2: Nepravilnosti težnostnega polja Zemlje (Kuhar, 2007) .....                                                                                                            | 7  |
| Slika 3: Helmertov odklon navpičnice (Kuhar, 2007) .....                                                                                                                       | 10 |
| Slika 4: Odkloni navpičnice po Pizzetiju in Molodenskemu (Pribečević, 2000) .....                                                                                              | 10 |
| Slika 5: Odkloni navpičnic v relativni (desno) in absolutni (levo) orientaciji (Pribečević, 2000)<br>.....                                                                     | 35 |
| Slika 6: Razpored gravimetričnih podatkov (Pribečević, 2000) .....                                                                                                             | 36 |
| Slika 7: Prikaz površinskih odklonov navpičnic (levo) in reduciranih odklonov navpičnic na<br>kogeoidu (desno) (Pribečević, 2000).....                                         | 38 |
| Slika 8: Tridimenzionalni prikaz ploskve geoida za območje Slovenije (Pribečević, 2000) ...                                                                                    | 40 |
| Slika 9: Princip interpolacije ( <a href="http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc">http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc</a><br>(3.2.2008))..... | 42 |
| Slika 10: Princip bilinearne interpolacije .....                                                                                                                               | 42 |
| Slika 11: Izsek iz grida geoidnih višin za Slovenijo .....                                                                                                                     | 46 |
| Slika 12: Strategija določitve štirih točk, ki so enako oddaljene od gridne točke.....                                                                                         | 47 |
| Slika 13: Grafična predstavitev merjenih odklonov navpičnic .....                                                                                                              | 53 |
| Slika 14: Grafična predstavitev izračunanih odklonov na točkah z merjenimi odkloni .....                                                                                       | 53 |
| Slika 15: Grafična ponazoritev mreže za izravnavo .....                                                                                                                        | 57 |

**KAZALO PREGLEDNIC**

|                                                                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Preglednica 1: Odstopanja izračunanih odklonov od merjenih odklonov navpičnic v različnih primerih .....                                                                                      | 49 |
| Preglednica 2: Odstopanja izračunanih odklonov od odklonov navpičnic določenih iz EGM96 v različnih primerih .....                                                                            | 50 |
| Preglednica 3: Ime točke, merjena, določena iz EGM96 in izračunana komponenta odklona navpičnice $\xi$ in merjena, določena iz EGM96 in izračunana komponenta odklona navpičnice $\eta$ ..... | 50 |
| Preglednica 4: Natančnost izračunanih odklonov navpičnic .....                                                                                                                                | 54 |
| Preglednica 5: Elipsoidne koordinate, geoidna višina ter odklona navpičnic vseh štirih točk mreže .....                                                                                       | 56 |
| Preglednica 6: Izravnane elipsoidne koordinate .....                                                                                                                                          | 57 |
| Preglednica 7: Odstopanje elipsoidnih koordinat z in brez uporabe odklonov .....                                                                                                              | 58 |
| Preglednica 8: Izravnane GK koordinate na WGS-84 elipsoidu .....                                                                                                                              | 58 |
| Preglednica 9: Odstopanje GK koordinat na WGS-84 z in brez uporabe odklonov .....                                                                                                             | 58 |

## KAZALO PRILOG

**Priloga A1:** Elipsoidne koordinate točk v Sloveniji z merjenimi odkloni navpičnic

**Priloga B1:** Programska koda (Matlab) za interpolacijo geoidnih višin na območju Slovenije

**Priloga B2:** Programska koda (Matlab) za določitev geoidne ravnine (in s tem odklonov navpičnic) z izravnavo

**Priloga C1:** Rezultati izravnave mreže Fiesa brez uporabe odklonov navpičnic

**Priloga C2:** Rezultati izravnave mreže Fiesa z uporabo odklonov navpičnic



## 1 UVOD

Razvoj metod GNSS (angl. Global Navigation Satellite System), kjer po uporabi prednjači predvsem GPS (angl. Global Positioning System), omogoča visoko natančne določitve položaja. Z GPS-meritvijo dobimo elipsoidno višino, ki ne vsebuje podatkov o težnostnem polju Zemlje. Taka višina ne more biti uporabna v vsakdanji geodetski praksi. Pojavila se je potreba po visoko natančni ploskvi geoida, saj lahko tako elipsoidne višine enostavno pretvorimo v nadmorske višine.

Tudi za območje Slovenije je bila leta 2000 določena natančna ploskev geoida, ki je podana v obliki pravilne celične mreže in je trenutno v uporabi (Pribičević, 2000).

Z uporabo grida geoidnih višin za Slovenijo lahko z interpolacijo izračunamo geoidno višino v katerikoli točki na območju Slovenije. Če poznamo elipsoidno višino ter dovolj natančno geoidno višino, lahko izračunamo nadmorsko višino. Tako ni več potrebno izvajati meritve položaja in višine ločeno. Z razvojem GNSS-metod so se meritve poenostavile, vendar je uporaba klasičnih opazovanj v številnih primerih nenadomestljiva. Težava nastane, ko izvajamo klasične meritve dolžin, smeri ter zenitnih razdalj in jih brez popravkov uporabimo pri izračunih. Meritve vsebujejo podatke o težnostnem polju Zemlje in se nanašajo na geoid. Izračune delamo na računski referenčni ploskvi, elipsoidu. Geoid se razlikuje od elipsoida, ki je matematično definiran. Razliko med geoidom in elipsoidom lahko v posamezni točki podamo z odklonom navpičnice. Pred vsemi izračuni bi morali terestična opazovanja reducirati v računski referenčni prostor, kar lahko storimo na podlagi znanih odklonov navpičnic. Tako dobimo teoretično korektne rezultate.

V diplomski nalogi sem želela s pomočjo grida geoidnih višin računsko določiti odklone navpičnic v posamezni točki. Uporabila sem lokalno metodo ravnine. Na podlagi geoidnih višin sem določila ravnino, ki ponazarja ploskev geoida na izbranem območju. Koeficienti ravnine nam dajo komponente odklona navpičnice v težiščni točki mreže v smeri sever-jug in vzhod-zahod. To pomeni, da lahko ob znanem geoidu, ki je podan v obliki pravilne mreže, izračunamo odklone navpičnic v katerikoli točki na območju Slovenije.

Najnatančnejše odklone navpičnic pridobimo z dolgotrajnimi astronomskimi meritvami. V diplomski nalogi sem zato primerjala merjene in izračunane odklone navpičnic. Na ta način sem poskušala oceniti natančnost računskih odklonov. Ob ustrezni natančnosti računskih odklonov, bi lahko z avtomatiziranimi postopki uporabili odklone navpičnic pri različnih izračunih in pri tem ne bi potrebovali dolgotrajnih meritev.

V diplomski nalogi sem na koncu izračunane odklone uporabila na praktičnem primeru in ugotavljala kakšne razlike dobimo z in brez uporabe odklonov.

## 2 IZHODIŠČA, DEFINICIJE IN DOLOČITVE ODKLONOV NAVPIČNIC

V geodeziji se pojavljajo vedno nove zahteve po višji natančnosti različnih sodobnih tehnik. Smer sile teže je v naravi določena smer, ki je odvisna od razporeda mas in njihove gostote v notranjosti Zemlje, na katero se nanašajo skoraj vse geodetske terestrične meritve (horizontalne smeri in koti, azimuti, zenitne razdalje, nivelirane višinske razlike). Očitno je, da je zato nujno upoštevati fizikalne dejavnike, ker samo ti omogočajo korektno določitev ustaljenih geometrijskih pristopov.

### 2.1 Sila teže, potencial sile teže

Na masno točko P na površini Zemlje, kot vektorska rezultanta delovanja centrifugalne in gravitacijske sile, učinkuje sila teže:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (1)$$

Smer vektorja  $\mathbf{g}$  je v vsakdanjem življenju znan kot težiščnica (ponazarja jo smer vertikalne osi horizontalnega geodetskega instrumenta oz. smer grezila). Velikost vektorja  $g = |\mathbf{g}|$  predstavlja jakost sile teže oz. kratko težnost. V praksi je lažje delati s skalarjem, zato se namesto sile teže obravnava pospešek. Enota za težni pospešek je v SI sistemu merskih enot  $\text{ms}^{-2}$ . Zaradi sploščenosti Zemlje ne polih se vrednost  $g$  giblje med  $g = 9.78 \text{ ms}^{-2}$  (na ekvatorju) in  $g = 9.83 \text{ ms}^{-2}$  (na polih). Srednja vrednost težnega pospeška na površini Zemlje znaša  $g = 9.803 \text{ ms}^{-2}$ .

V matematičnem smislu predstavlja težni pospešek gradient težnostnega potenciala:

$$\mathbf{g} = \text{grad}W \quad (2)$$

Potencial sile teže (težnostni potencial) dobimo kot vsoto potenciala gravitacijske sile in potenciala centrifugalne sile:

$$W = V + \Phi = k \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv + \frac{\omega^2}{2} p^2 \quad (3)$$

V fizikalnem pomenu je potencial gravitacijske sile v neki točki P negativno delo, ki ga mora opraviti gravitacijska sila na enoto mase, da bi privedla telo iz neskončne oddaljenosti, kjer je potencial  $V=0$ , v točko P. Centrifugalni potencial ima enako dimenzijo kot gravitacijski potencial; pomeni energijo, ki jo ima enota mase zaradi rotacije Zemlje okoli Z osi. Iz definicije težnostnega potenciala je jasno, da privlačni potencial upada z oddaljenostjo od Zemlje, centrifugalni pa narašča z večanjem razdalje od osi rotacije. Vendar skupni težnostni potencial ( $W = V + \Phi$ ) učinkuje samo na telesa, ki so na Zemlji. Takoj, ko se obravnavana točka loči od nje (preneha njegova rotacija), centrifugalni potencial postane nepomemben.

## 2.2 Nivojske ploskve

Ploskve s konstantnim potencialom imenujemo ekvipotencialne ploskve ali nivojske ploskve:

$$W(x, y, z) = C = konst \quad (4)$$

Za premik po nivojski ploskvi ni potrebno vložiti nikakršnega dela, zato jih lahko imenujemo ploskve ravnotežja. Nivojske ploskve so odvisne od razporeditve mase v notranjosti Zemlje, zato med seboj niso vzporedne.

## 2.3 Tri osnovne izhodiščne ploskve

Za reševanje številnih geodetskih nalog moramo, v izbranem koordinatnem sistemu, poznati določeno število točk na Zemljinem površju. Koordinate ne dobimo neposredno kot rezultate meritev, temveč posredno na podlagi obdelave podatkov opazovanj s pomočjo računalniških programov. V geodeziji se za računanje koordinat uporabljajo tri osnovne ploskve, ki tudi aproksimirajo Zemljino površje (Pribičević, 2000):

**Fizična površina Zemlje**, ki predstavlja zgornjo mejo Zemljine skorje. Obravnavamo jo takšno, kot jo vidimo. Spodnji del skorje pa predstavlja Mohorovičičeva diskontinuiteta<sup>1</sup>, ki je zelo pomembna pri reševanju številnih geofizikalnih problemov. Določevanje tega površja in vsebine na njem ostaja najpomembnejša geodetska naloga. Tega ni mogoče predstaviti z matematično pravilno ploskvijo, zato se kot naslednja uporablja:

**Ploskev geoida**, ki je najpomembnejša ekvipotencialna ploskev Zemljinega težnostnega polja in je v vseh svojih točkah pravokotna na smer vektorja sile teže  $\mathbf{g}$ . To smer v geodeziji imenujemo tudi smer navpičnice (vertikale). Geoid se ujema z umirjeno gladino svetovnih morij in nanjo vpliva samo sila teže. Fizikalno je definiran z zelo enostavno enačbo:

$$W(x, y, z) = W_0 = konst \quad (5)$$

kjer so:  $(x, y, z)$       koordinate položaja točke na ekvipotencialni ploskvi  
 $W_0$                 vrednost potenciala na geoidu

Ploskev geoida je zaradi nepravilne razporeditve in neenake gostote Zemljinih mas dejansko nepravilna. Te nepravilnosti se odražajo v spremembah smeri in velikosti vektorja sile teže, torej povzročajo pojava, ki ju imenujemo odklon navpičnice in anomalija težnosti. Geoida tako ne moremo uporabljati kot geodetske referenčne ploskve za določitev položaja točk. Omenimo še tretjo izhodiščno ploskev:

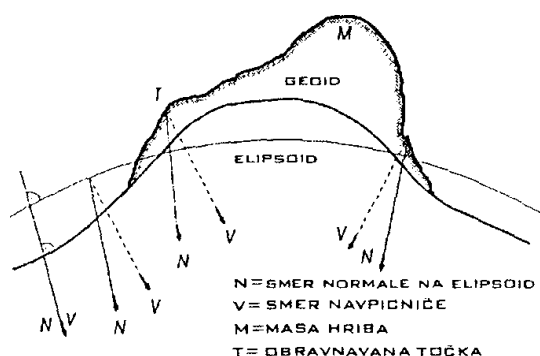
**Ploskev Zemljinega splošnega elipsoida**, ki predstavlja najbližjo aproksimacijo ploskve geoida z maksimalnim odstopanjem v mejah  $\pm 100$ -150 m. Na območju Slovenije znašajo ta odstopanja v povprečju +46 m. Elipsoid ima pravilno matematično obliko, geometrijsko je definiran z veliko polosjo  $a$  in sploščenostjo  $f$ , fizikalno pa z maso  $M$  (enako skupni masi Zemlje in atmosfere) in kotno hitrostjo rotacije  $\omega$  zato je primeren za dvodimenzionalno določitev položaja točk na Zemlji. Središče elipsoida leži v težišču Zemlje, mala os se ujema z vrtilno osjo Zemlje. Ploskev geoida se valovito vzdiguje in ponira glede na privzeti Zemljin elipsoid (Slika 1). Ker ima elipsoid določeno maso  $M$ , je določen tudi normalni potencial  $U$ .

---

<sup>1</sup> Mejno območje v notranjosti Zemlje med zemeljsko skorjo in plaščem. Po predvidevanjih je vzrok nezveznosti oziroma prehoda sprememba sestave kamnin na tej globini. Mohorovičičeva nezveznost se nahaja pod zemeljsko skorjo, kar pomeni približno 5 km pod oceani oziroma oceanskimi hrbti in do 75 km pod kontinentalno skorjo.

Pri določitvi normalnega težnostnega polje je potrebno podati povezavo med fizikalnimi parametri polja (nivojski elipsoid) in geometričnimi parametri rotacijskega elipsoida. Izhajamo iz znane zveze med vektorskimi in skalarnimi funkcijami. Vektor normalne sile teže  $\gamma$  je gradient normalnega težnega potenciala:

$$\gamma = \text{grad}U \quad (6)$$



Slika 1: Osnovne ploskve in smeri v geodeziji (Pribičević, 2000)

## 2.4 Anomalijsko težnostno polje Zemlje

Dejansko težnostno polje Zemlje odstopa od normalnega težnostnega polja nivojskega elipsoida. Razliko med težnostnim poljem Zemlje  $W$  in normalnim težnostnim poljem  $U$  imenujemo anomalija potenciala oz. moteči potencial (angl. "disturbing potencial") in se v literaturi označi s  $T$ . Velja izraz:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad (7)$$

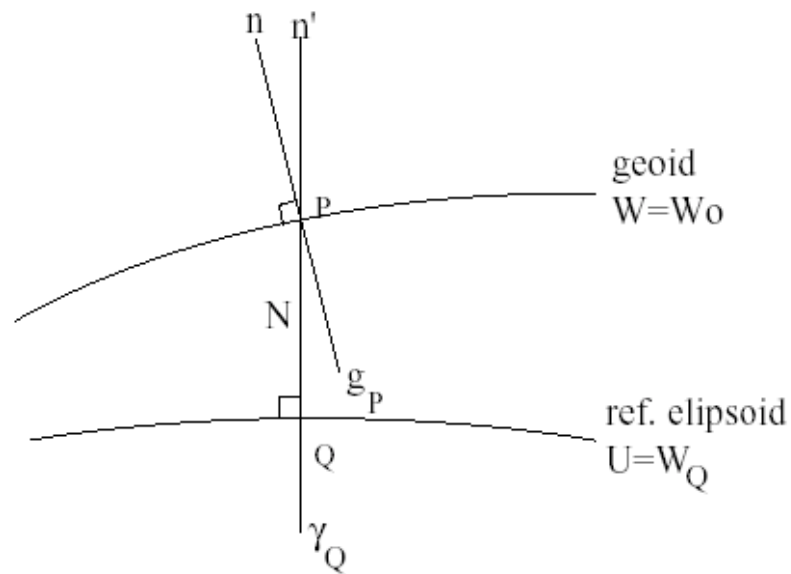
če primerjamo dve referenčni ploskvi - geoid:

$$W(x, y, z) = W_0 \quad (8)$$

in nivojski elipsoid:

$$U(x, y, z) = U_0 \quad (9)$$

z enakim potencialom  $W_0 = U_0$ . Skozi točko P na geoidu povlecimo normalo na elipsoid in dobimo točko Q na elipsoidu (Slika 2). Razdalja PQ med geoidom in elipsoidom se imenuje geoidna višina ali geoidna ondulacija ter jo označujemo z  $N$  (angl. "geoid height").



Slika 2: Nepravilnosti težnostnega polja Zemlje (Kuhar, 2007)

#### 2.4.1 Anomalija težnosti

Če primerjamo vektor težnega pospeška  $\mathbf{g}$  v točki P in vektor normalnega težnega pospeška  $\gamma$  v točki Q, nam njuna razlika poda vektor anomalije težnega pospeška  $\Delta\mathbf{g}$ . Vektor ima svojo velikost in smer. Razlika velikosti obeh vektorjev je anomalija težnosti (angl. "gravity anomaly"):

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (10)$$

Razlika v smeri pa je odklon navpičnice.

Vrnimo se na zgornjo sliko (Slika 2). Vektorja  $\mathbf{g}$  in  $\boldsymbol{\gamma}$  je možno primerjati tudi v točki P na geoidu. Ta primerjava nam poda vektor "motečega" težnega pospeška  $\delta\mathbf{g}$  (angl. "gravity disturbance vector"). Razlika v velikosti obeh vektorjev pa je "moteči" težni pospešek (moteča težnost):

$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P \quad (11)$$

Razlika v smeri teh dveh vektorjev je enaka kot v prejšnjem primeru, to pa je odklon navpičnice. Moteča težnost je pojmovno bolj preprosta količina kot anomalija težnosti, vendar v terestrični geodeziji nima tako velikega pomena kot slednja. Pomen anomalije težnosti je v tem, da je podana neposredno: vrednost težnega pospeška  $g$  merimo na geoidu (merimo jo na površini Zemlje in reduciramo na geoid), vrednost normalnega težnega pospeška pa izračunamo za poljubno dani elipsoid.

Geoidna višina, anomalija težnosti in odklon navpičnice so količine, ki se jih da določiti z geodetskimi meritvami.

Vrednosti težnega pospeška oz. njihovih razlik merimo na fizični površini Zemlje, na različnih nadmorskih višinah in na različnih geografskih širinah. Merjene vrednosti težnosti tako medsebojno niso neposredno primerljive. Izmerjene vrednosti težnega pospeška skrivajo v sebi vse možne prostorske in časovne vplive na težnostno polje raziskovanega območja. V različnih časih izmerjene vrednosti težnega pospeška se razlikujejo zaradi časovnih sprememb težnostnega polja in zaradi neenakomernega delovanja gravimetra. Za računanje anomalij težnosti moramo merjene vrednosti težnega pospeška reducirati na neko skupno raven, kjer lahko medsebojno primerjamo vse vrednosti. Cilj redukcije vrednosti težnega pospeška je dobiti t.i. anomalijske vrednosti težnosti, ki bodo odražale geofizikalni oz. geodetski problem (kontrast gostote oz. oblika Zemlje). Namen redukcije merjenih vrednosti težnega pospeška v geodeziji je premestitev topografskih mas zunaj geoida na takšen način, da geoid postane robna ploskev. V fizikalni geodeziji je zahteva, da s premeščanjem topografskih mas ne vplivamo na maso celotne Zemlje. Torej je potrebno mase v okolici opazovališča vtisniti v

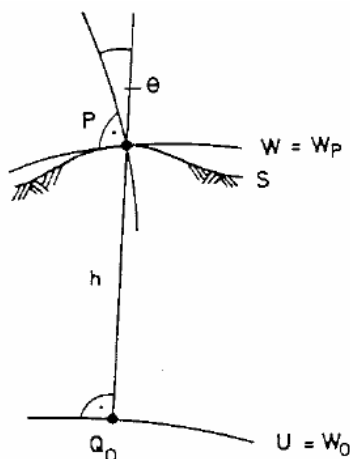
notranjost Zemlje ali pa enakomerno razporediti na njeno površje tako, da oblika geoida ostane nespremenjena. Redukcija na geoid je vedno opravljena z upoštevanjem določenih hipotez o gostoti notranjosti Zemlje. Iz tega izhajajo tudi največji možni pogreški pri gravimetrični določitvi geoida.

## 2.5 Odklon navpičnice

Osnovna smer pri astronomskih, geodetskih in gravimetričnih meritvah je smer vertikalne osi instrumenta, kar ni nič drugega kot navpičnica. Smer navpičnice predstavlja smer vektorja realne sile teže in se ujema s pravokotnico na ploskev geoida v vsakem opazovališču. Krivuljo, ki je pravokotna na nivojske ploskve od površja Zemlje do ploskve geoida, imenujemo težiščnica. To pomeni, da je navpičnica tangenta na težiščnico in smer navpičnice je podana vnaprej v katerikoli točki na Zemljinem površju in na geoidu. Smer normale je po drugi strani odvisna od izbire elipsoida oz. od njegovih dimenzij in njegove orientacije v prostoru in Zemljinem telesu. Praviloma se fizična površina Zemlje, elipsoid in geoid ne ujemajo in si niso vzporedni (Slika 1). Iz tega lahko sklepamo, da med pravokotnico na ploskev elipsoida (normalo) in pravokotnico na ploskev geoida (navpičnica) v ustrezni točki, obstajajo odstopanja v obliki prostorskega kota. Imenujemo ga odklon navpičnice  $\theta$  (angl. "deflection of the vertical").

### 2.5.1 Različne definicije odklonov navpičnic

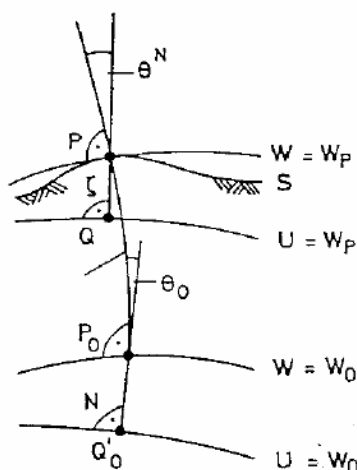
**Helmertov odklon navpičnice.** Helmert je primerjal smer normale in smer navpičnice na fizični površini Zemlje.



Slika 3: Helmertov odklon navpičnice (Kuhar, 2007)

Odklon navpičnice je pri tem kot  $\theta$  na površini Zemlje med smerjo navpičnice (težiščnice) in elipsoidno normalo skozi točko P. Točka  $Q_0$  je prirejena točki P z definicijo normale na elipsoid.

**Pizzetijev odklon navpičnice.** Pizzeti je primerjal obe smeri na samem geoidu.



Slika 4: Odkloni navpičnice po Pizzetiju in Molodenskemu (Pribičević, 2000)

Odklona navpičnic na površju Zemlje in geoidu nista identična zaradi ukrivljenosti navpičnice. Navpičnica med površino Zemlje in geoidom je pravokotna na nivojske ploskve. Nivojske ploskve med sabo niso vzporedne (poglavje 1.2), zato je navpičnica ukrivljena.

Razlike med Pizzetijevim in Helmertovim odklonom so zelo majhne, reda velikosti  $0,01''$ , kar je manj od natančnosti astronomskih opazovanj za določanje astronomskih geografskih koordinat  $\Phi$  in  $\Lambda$ .

Odklon navpičnice je kot  $\theta_0$  na geoidu med navpičnico in elipsoidno normalo skozi točko  $P_0$  na geoidu. Točka  $P_0$  je prirejena točki  $P$  na površini Zemlje s preslikavo po težiščnici. Pri tem mora imeti elipsoid enak potencial  $W_0$  kot geoid. Razdalja  $P_0Q_0$  je višinska razlika med elipsoidom in geoidom in se imenuje geoidna višina ( $N$ ).

**Odklon navpičnice po Molodenskem.** Odklon navpičnice je kot  $\theta^N$  na površini Zemlje med smerjo navpičnice in smerjo normale v točki  $P$  na sferopotencialni ploskvi, ki ima isti potencial  $W_P$ , kot geopotencialna ploskev skozi točko  $P$ . Ploskev, za katero velja, da je v vsaki njeni točki  $Q$  izpolnjeno  $U_Q = W_P$ , se po Hirvonenu imenuje teluroid. Višinska razlika med teluroidom in fizično površino Zemlje  $\zeta$  se imenuje anomalija višine (angl. "height anomaly"). Pri tem velja opomniti, da teluroid ni nivojska ploskev, ampak samo geometrijsko mesto točk, za katere velja  $U_Q = W_P$ .

Odklon navpičnice  $\theta$  je prostorski kot, zato ga lahko razčlenimo na dve pravokotni komponenti:

- komponenta  $\zeta$  (meridianska) – v smeri meridiana (smer sever-jug, NS),
- komponenta  $\eta$  (longitudinalna) – v smeri prvega vertikalnega (smer vzhod-zahod, EW).

Smer težiščnice je neposredno določena z geografskimi koordinatami: geografsko dolžino in geografsko širino. Zaradi tega je možno komponente odklona navpičnice izraziti s pomočjo geografskih koordinat. Dejanske geografske koordinate točke  $P$  na geoidu, ki določajo smer težiščnice ( $n$ ) oz. smer vektorja težnega pospeška  $\mathbf{g}$ , lahko določimo z astronomskimi meritvami. Zato tako dobljene koordinate imenujemo astronomske koordinate in jih običajno označujemo: astronomsko širino z  $\Phi$  in astronomsko dolžino z  $\Lambda$ . Elipsoidne koordinate, določene s smerjo normale na ploskev elipsoida ( $n'$ ), označujemo: elipsoidno (tudi geodetsko) širino z  $\varphi$  in elipsoidno (geodetsko) dolžino z  $\lambda$ :

- normala na geoid  $n \rightarrow$  astronomske koordinate  $\Phi, \Lambda$ ;

- normala na elipsoid  $n' \rightarrow$  geodetske koordinate  $\varphi, \lambda$ .

Glede na izbiro elipsoida, na katerega se nanašajo geodetske koordinate, ločimo absolutne in relativne odklone navpičnic:

*Absolutni odkloni navpičnic* se nanašajo na srednji zemeljski rotacijski elipsoid. Ta je geocentričen in njegovi fizikalni parametri (masa, gravitacijski potencial, kotna hitrost) so izbrani tako, da ustrezajo dejanskim parametrom Zemlje. Ti elipsoidi so osnova za vzpostavitev globalnih geodetskih referenčnih sistemov (GRS 80, WGS 74, WGS 84 itd.).

*Relativni odkloni navpičnic* se nanašajo na relativne t.i. referenčne elipsoide, katerih parametri so bili določeni v različnih časovnih obdobjih in na osnovi bolj ali manj omejenih regionalnih meritev (Bessel, Hayford, Krasovski itd.). Male osi tako določenih elipsoidov so sicer vzporedne z rotacijsko osjo Zemlje, vendar odražajo parametri teh elipsoidov nekatere sistematične značilnosti območij, s katerih so bili podatki za izračun elipsoidov zajeti. Zato se referenčni elipsoidi med seboj razlikujejo, njihova oblika pa je dober približek le za dele zemeljske površine in ne tudi za Zemljo kot celoto.

## 2.5.2 Lastnosti odklonov navpičnic

Odkloni navpičnic imajo številne pomembne lastnosti (Pribečević, 2000):

- Odkloni navpičnic predstavljajo odstopanja realnega težnostnega polja Zemlje od normalnega, zato jih, skupaj z geoidnimi višinami, uporabljamo v raziskavah oblike Zemlje in geodetskega datuma.
- Odkloni navpičnic podajajo zvezo med geodetskimi in astronomskimi koordinatami oz. podajajo zvezo med uporabljenim matematičnim modelom in dejansko obliko Zemlje.
- So velikega pomena pri orientaciji in izravnavi astrogeodetskih mrež, saj skupaj z Laplaceovimi azimuti omogočajo prehod iz astronomskega v geodetski azimut.
- Brez odklonov navpičnic ni možno reducirati geodetskih opazovanj s fizične površine Zemlje na referenčni elipsoid.

Odkloni navpičnic skupaj z geoidnimi višinami tvorijo temeljno zvezo med fizikalno stvarnostjo in geometrijskim modelom in to opravičuje potrebo za njihovo določitev s čim večjo natančnostjo.

## 2.6 Metode določitve odklona navpičnice

Odklonov navpičnic ni mogoče neposredno izmeriti, temveč jih določamo posredno po računski poti. Glede na način določitve ločimo naslednje metode:

- *astronomsko-geodetska* – iz primerjave koordinat  $\Phi$ ,  $\Lambda$  in  $\varphi$ ,  $\lambda$ ;
- *topografska* – iz izračuna privlačnega vpliva topografskih mas v okolici točke;
- *astrogravimetrična* – kombinacija gravimetričnih in astrogeodetskih podatkov s pomočjo enačbe Vening Meinesza;
- *topo-izostazijska* – z upoštevanjem izostazije;
- *satelitsko-gravimetrična* – iz kombinacije satelitskih opazovanj, satelitske altimetrije in gravimetrične izmere določimo geopotencialni model, iz njega pa odklone navpičnic;
- *izračun iz geoidnih višin* - za manjša območja, ki jih zajemajo GPS-mreže je možno analitično predstaviti ploskev geoida. Uporabimo lahko ravnino in koeficienti ravnine nam dajo odklone navpičnic v težiščni točki mreže.

### 3 ASTRONOMSKO – GEODETSKA METODA DOLOČITVE ODKLONOV NAVPIČNIC

Ena izmed najnatančnejših metod določitve odklonov navpičnic je astronomsko – geodetska. Gre za kombinacijo dolgotrajnih astronomskih opazovanj ter GPS-opazovanj. Na ta način določeni odkloni navpičnic so v diplomski nalogi uporabljeni kot merilo za določitev natančnosti in uporabnosti odklonov, ki sem jih izračunala iz interpoliranih geoidnih višin z metodo ravnine. Zato metodi posvečam več pozornosti.

Z astronomskimi opazovanji zvezd in Sonca določamo astronomske koordinate točk na Zemlji (astronomska širina  $\Phi$  in astronomska dolžina  $\Lambda$ ) ter azimute stranic v državni mreži (A). Astronomska opazovanja so zelo zahtevna, zamudna in draga ter so omejena na celinske dele Zemlje. V ustrezni točki na elipsoidu definira normala geodetski koordinati  $\varphi$ ,  $\lambda$ . Razlike astronomskih in geodetskih koordinat tako določajo odklon navpičnice. Te predstavljajo zvezo med lokalnim elipsoidnim in lokalnim astronomskim koordinatnim sistemom.

Princip astronomsko – geodetske metode določitve odklonov navpičnic je bil uporabljen pri določitvi referenčne ploskve geoida Slovenije (Pribičević, 2000). Te vrednosti odklonov navpičnic so uporabljene v diplomski nalogi.

Potek opazovanj je bil naslednji. Vsa astronomska opazovanja so bila opravljena na vsaki novi točki praviloma v dveh nočeh. Če je bila razlika po  $\Phi$  ali po  $\Lambda$  večja od strogo določene meje 1.0", so opravili dodatno tretjo meritev. Simultana določitev astronomskih koordinat  $\Phi$  in  $\Lambda$  za nove geoidne točke je bila izpeljana po znani "metodi enakih višin"<sup>2</sup>. Srednji kvadratni pogrešek opazovanj v eni noči znaša za vsa opazovanja v vseh sezonah 0.2" do 0.3" (notranja natančnost). Zunanjo natančnost lahko izrazimo s srednjim kvadratnim pogreškom razlik opazovanj dveh noči. Ta se giblje v mejah 0.3" do 0.4". Na osnovi tako določenih astronomskih koordinat  $\Phi$  in  $\Lambda$  in ustreznih geodetskih koordinat  $\varphi$  in  $\lambda$  (v uradnem državnem koordinatnem sistemu ali novem sistemu ETRS89) so bile izračunane vrednosti odklonov navpičnic za vsako novo geoidno točko.

---

<sup>2</sup> Hkratna določitev astronomske širine in dolžine, ki se je začela množično uporabljati s prihodom računalniške opreme in nivelirjev s kompenzatorjem. Merimo le prehod zvezde čez nitni križ instrumenta z opazovanjem na konstantni zenitni razdalji, kar nam poda uporaba astrolaba.

## 4 RAZVOJ POTENCIALA V VRSTO PO SFERNIH FUNKCIJAH

S sledenjem pravilnosti tirov gibanja nizkoletnih satelitov in z analizo pridobljenih podatkov je možno določiti model za zemeljski težnostni potencial, t.i. geopotencialni model, kjer je gravitacijski potencial Zemlje predstavljen s harmoničnimi koeficienti  $\overline{C}, \overline{S}$ . Globalni geopotencialni modeli imajo velik pomen zaradi svoje uporabnosti na območju celotne Zemlje, ker niso omejeni le na celine ali oceane. Njihova slaba stran je relativno majhna ločljivost v predstavitvi težnostnega polja manjših območij na Zemlji. Različne zemeljske znanosti potrebujejo natančne geopotencialne modele. Za raziskavo strukture Zemlje, kontrolo klimatskih procesov, računanje orbit satelitov in za izračun geoida. Geopotencialni model v diplomski nalogi predstavljam podrobneje, saj sem za primerjavo odklonov navpičnice, pridobljenimi z metodo ravnine, uporabila tudi odklone, določene iz globalnega geopotencialnega modela EGM96.

### 4.1 Gravitacijski potencial Zemlje

Gravitacijski potencial Zemlje  $W$  v točki P na površju Zemlje je lahko dan tudi s sfernimi koordinatami:

$\theta$  = polarni kot (sferna širina)

$\lambda$  = sferna dolžina

$r$  = radij (geocentrična razdalja).

#### 4.1.1 Gravitacijski potencial Zemljinega telesa in Zemljine atmosfere

Gravitacijski potencial Zemlje lahko razdelimo v gravitacijski potencial Zemljinega telesa  $V_E$  (trdna Zemlja, ledeni pokrov in oceani), gravitacijski potencial Zemljine atmosfere  $V_A$  in centrifugalni potencial  $Z$  (Wenzel, 1999):

$$W_{(\theta, \lambda, r)} = V_E + V_A + Z \quad (12)$$

kjer je: 
$$Z = \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \quad (13)$$

Gravitacijski potencial Zemljine atmosfere  $V_A$  je podan z Newton-ovim gravitacijskim zakonom:

$$V_A = G \iiint_{\Omega_A} \frac{\rho_A d\Omega_A}{d} \quad (14)$$

in gravitacijski potencial Zemljinega telesa  $V_E$  je tudi dan z Newton-ovim gravitacijskim zakonom:

$$V_E = G \iiint_{\Omega_E} \frac{\rho_E d\Omega_E}{d} \quad (15)$$

kjer so:  $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  = gravitacijska konstanta

$\Omega_A$  = volumen atmosfere

$\rho_A$  = gostota atmosfere

$d\Omega_A$  = diferencialni volumski element atmosfere

$d$  = razdalja med točko izračuna  $P$  in diferencialnim volumskim elementom

$d\Omega_A$

$\Omega_E$  = volumen Zemljinega telesa

$\rho_E$  = gostota Zemljinega telesa

$d\Omega_E$  = diferencialni volumski element Zemljinega telesa

Gravitacijski potencial atmosfere  $V_A$  lahko izračunamo iz Newton-ovega gravitacijskega zakona z dovolj veliko natančnostjo, če uporabimo model razporeditve gostote.

Aproksimacija do  $0.06 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  je dana z izrazom:

$$V_A = \frac{GM_A}{r} \quad (16)$$

kjer je:  $M_A = \text{vsa masa atmosfere} = 5.32 \cdot 10^{18} \text{ kg}$

Gravitacijski potencial Zemljinega telesa  $V_E$  ne more biti dovolj natančno izračunan iz enačbe Newton-ovega gravitacijskega zakona, saj je poznavanje razporeditve gostote v notranjosti Zemlje  $\rho_E$  pomanjkljivo. Namesto tega lahko gravitacijski potencial  $V_E$  razvijemo v vrsto po sfernih funkcijah:

$$V_{E(r,\theta,\lambda)} = \frac{GM_E}{r} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \theta) \quad (17)$$

kjer je:  $M_E = \text{masa Zemljinega telesa}$

$a = \text{velika polos geocentričnega referenčnega elipsoida}$

$\bar{C}_{l,m}, \bar{S}_{l,m} = \text{popolno normirani koeficienti razvoja sfernih funkcij}$

$\bar{P}_{l,m} = \text{prirejena Legendre-jeva funkcija 1. vrste}$

$l = \text{stopnja}$

$m = \text{red}$

Razvoj potenciala po sfernih funkcijah potrebujemo zato, ker je lažje določiti neznane koeficiente razvoja potenciala po sfernih funkcijah kot pa rešiti integral z neznano funkcijo razporeda gostote. Neznane koeficiente razvoja lahko določimo iz podatkov satelitskih opazovanj, satelitske altimetrije in gravimetrične izmere. Koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah so integrali mase oz. funkcije razporeditve mas Zemlje. Njihova velikost je odvisna od razporeda mas znotraj Zemlje (ki pa žal ni znana). Imajo tudi fizikalno oz. geometrijsko razlago. Geometrijsko opisujejo koeficienti odstopanje Zemlje od rotacijske simetrije (odstopanje Zemlje od krogle). Največje odstopanje Zemlje od sferne simetrije predstavlja njena sploščenost na polih in ekvatorske izbokline. Ker so koeficienti funkcija mase, pomeni, da tam, kjer je potencial pozitiven je prisoten višek mas, kjer pa je potencial negativen, je prisoten primanjkljaj mas.

Najnovejši globalni geopotencialni model je EGM96 (angl. Earth Gravitational Model), ki so ga skupaj določili NIMA (angl. National Imagery and Mapping Agency), NASA in OSU

(angl. Ohio State University). Predstavljen je v obliki vrste sfernih funkcij gravitacijskega potenciala, razvit je do stopnje in reda  $n=m=360$  (Kuhar, Prešeren, 2000).

Statistični kazalci geoidnih višin modela EGM96, izračunanih v pravilni mreži 15' x 15' za celotno oblo so naslednji:

- srednja vrednost: = -0.57 m,
- st. deviacija: = 30.56 m,
- minimum: = -106.99 m,
- maksimum: = 85.39 m.

Standardna deviacija kaže na tipično razliko med geoidom in elipsoidom.

## 4.2 Uporaba geopotencialnega modela

Klasična uporaba geopotencialnega modela predstavlja naslednja enačba:

$$W_{(\theta,\lambda,r)} = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \theta) + \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \quad (18)$$

kjer je:  $GM$  geocentrična gravitacijska konstanta.

Koeficienti  $GM$ ,  $a$ ,  $\bar{C}_{l,m}$ ,  $\bar{S}_{l,m}$  so ponavadi dani iz geopotencialnega modela. Koeficienti  $\bar{C}_{l,m}$ ,  $\bar{S}_{l,m}$  so brez dimenzije. Iz zgornje enačbe lahko izračunamo za geodezijo pomembne fizikalne količine, ki so odvodi težnostnega potenciala  $W$ .

### 4.2.1 Normalni potencial

Za uporabo v fizikalni geodeziji je velikokrat primerna uporaba referenčnega gravitacijskega polja, ki ga definira nivojski elipsoid. Nivojski elipsoid istočasno predstavlja obliko Zemlje in njeno težnostno polje. Na elipsoidnem površju je definiran konstanten normalni potencial  $U$ . Takšen geodetski referenčni sistem je definiran s štirimi parametri:

$a$  = večja polos

$GM$  = geocentrična gravitacijska konstanta

$J_2 = \sqrt{5} \cdot \bar{C}_{2,0}$  = drugi harmonični koeficient

$\omega$  = kotna hitrost rotacije Zemlje.

Vse ostale parametre lahko izračunamo iz osnovnih parametrov. Normalni potencial  $U$  lahko z razvojem po sfernih funkcijah izračunamo z naslednjim izrazom:

$$U_{(\theta, \lambda, r)} = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{10} \left( \frac{a}{r} \right)^l \bar{C}_{l,0}^N \bar{P}_{l,0}(\cos \theta) + \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \quad (19)$$

kjer je:  $\bar{C}_{l,0}^N$  = harmonični koeficienti razvoja normalnega potenciala

Normalni težni pospešek je pravokoten na nivojski elipsoid in njegova vrednost na elipsoidu je podana z znanim izrazom Somigliane, ki je prirejen za numerične izračune:

$$\gamma_0 = \gamma_e \cdot \frac{(1 + k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (20)$$

kjer so:  $\gamma_e$  = normalna težnost na ekvatorju

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 = \text{konstanta gravitacijske formule Somiglianna}$$

$\gamma_p$  = normalna težnost na polu

$a, b$  = velika in mala polos elipsoida

$e$  = prva ekscentriciteta

$\varphi$  = elipsoidna (geodetska) širina

Normalno težnost v točki z elipsoidno višino  $h$  lahko izračunamo iz Taylor-jevega izraza:

$$\gamma_h = \gamma_0 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)_0 \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{\partial^3 \gamma}{\partial h^3} \right)_0 \cdot h^3 \quad (21)$$

Mednarodno združenje za geodezijo in geofiziko (IUGG) je leta 1930 na generalni skupščini v Stokholmu na predlog italijanskega geodeta G. Cassinisa sprejelo izraz za izračun vrednosti težnega pospeška glede na privzeti referenčni elipsoid. Danes je v veljavi t.i. Geodetski referenčni sistem 1980 (GRS 1980) in izraz za  $\gamma_0$  se glasi:

$$\gamma_0 = 9,780327(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) \text{ ms}^{-2} \quad (22)$$

Zgornji izraz nam poda vrednost normalne težnosti z natančnostjo  $1 \mu\text{ms}^{-2} = 0,1 \text{ mgal}$ .

Če želimo  $g$  izračunati z večjo natančnostjo, moramo upoštevati člene višjih stopenj.

Povprečna vrednost težnosti v sistemu GRS 80 znaša:  $\gamma_{pov} = 9,797\,645 \text{ ms}^{-2}$ .

Vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini v sistemu GRS 1980 se glasi:

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 - 0,30877 \cdot 10^{-6} (1 - 0,00142 \sin^2 \varphi) h + 0,75 \cdot 10^{-12} h^2 \text{ ms}^{-2} \quad (23)$$

#### 4.2.2 Moteči potencial

Moteči potencial predstavlja razliko med Zemljinim dejanskim gravitacijskim potencialom in normalnim potencialom in ga lahko zapišemo tudi:

$$T_P = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta \bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \theta) \quad (24)$$

kjer je:  $\Delta \bar{C}_{l,m} = \bar{C}_{l,m} - \bar{C}_{l,0}^N \quad \text{za } l = 0$

$$\Delta \bar{C}_{l,m} = \bar{C}_{l,m} \quad \text{za } l \neq 0$$

$$\Delta \bar{S}_{l,m} = \bar{S}_{l,m}$$

Na podlagi poznanega motečega potenciala in normalnega težnega pospeška lahko izračunamo geoidno višino. Zvezo podaja Brunsova enačba:

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma} \quad (25)$$

in pelje v:

$$N_P = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\theta) \quad (26)$$

#### 4.2.3 Moteča težnost, anomalija težnosti in odkloni navpičnic

Če hočemo izračunati geoid iz geopotencialnega modela, ni nujno, da izračunamo druge fizikalne parametre, kot na primer odklone navpičnic in anomalije težnosti. Vendar pa jih velikokrat potrebujemo za določitev geoida iz gravimetričnih opazovanj. S sferno aproksimacijo lahko izračunamo motečo težnost, anomalijo težnosti in komponente odklona navpičnice:

$$\partial g = \frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} (l+1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\theta) \quad (27)$$

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \cdot (l-1) \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\theta) \quad (28)$$

$$\xi = \frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \frac{d\bar{P}_{l,m}(\cos\theta)}{d\theta} \quad (29)$$

$$\eta = \frac{GM}{r^2 \sin\theta} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (-m\Delta\bar{C}_{l,m} \sin m\lambda + m\Delta\bar{S}_{l,m} \cos m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\theta) \quad (30)$$

## 5 VZPOSTAVITEV ESRS V SLOVENIJI

Državni koordinatni sistemi praktično predstavljajo državne geodetske mreže. Obstoječi koordinatni sistem Slovenije sestavljajo tri osnovne geodetske mreže: astrogeodetska in položajna – horizontalna geodetska mreža, nivelmanska – višinska geodetska mreža in gravimetrična mreža.

Z razmahom GPS-tehnologije se je pojavila tudi možnost vrednotenja kakovosti geodetskih mrež glede na rezultate GPS-izmer. Na tem temelječe analize so pokazale, da je kakovost obstoječih mrež preslaba za sodobne potrebe. Glede na to, da so bile obstoječe mreže slabo vzdrževane, se ni zdelo smiselno, da bi novi koordinatni sistem temeljil na popravkih obstoječe mreže pač pa na vzpostavitvi novega sistema.

Nov državni koordinatni sistem je realizacija evropskega referenčnega sistema ESRS na našem ozemlju. Horizontalno komponento predstavlja ETRS89 in višinsko komponento, ki bo temeljila na EVRS. ESRS naj bi zagotavljal dolgoročno prostorsko in časovno stabilno referenčno osnovo za vse potrebe (Stopar, 2007).

### 5.1 Nov horizontalni koordinatni sistem

Realizacija koordinatnega sistema ETRS89 v Slovenji je bila izvedena v okviru izmer EUREF, ki so potekale v 90. letih prejšnjega stoletja. Rezultati teh izmer so koordinate točk v koordinatnem sistemu ETRS89 in predstavljajo ogrodje novega horizontalnega sistema. Z uvedbo novega sistema se spremeni tudi referenčna ploskev horizontalnega sistema, ki je sedaj rotacijski elipsoid GRS80 s parametroma:

- velika polos  $a = 6378137,00$  m in
- prvo sploščenostjo  $f = 1/298,257222101$ .

Za realizacijo koordinatnega sistema, ki bo široko praktično uporaben, je Geodetska uprava Republike Slovenije do sedaj sistematično izvedla zgostitev EUREF-točk do gostote približno 1 točka/100 km<sup>2</sup>, ki so razporejene po celotnem ozemlju Slovenije. Mreža geodetskih točk v

ETRS89 in novem višinskem sistemu ter omrežje GNSS-postaj<sup>3</sup> so osnova novega koordinatnega sistema v Sloveniji. Prehod na novi koordinatni sistem poteka postopoma. Na osnovi točk danih v starem in novem koordinatnem sistemu, je mogoče izvajati transformacijo med koordinatnima sistemoma na posameznem območju.

## 5.2 Višinski sistem Slovenije

Nov državni višinski sistem Slovenije je višinski sistem v težnostnem polju Zemlje. Evropski višinski sistem predstavlja EVRS, katerega težnostni potencial na višinski referenčni ploskvi je enak težnostnemu potencialu referenčnega elipsoida GRS80. Višine v sistemu pa so razlike dejanskega težnostnega potenciala obravnavane točke in potenciala referenčne ploskve EVRS. Zadnja realizacija sistema EVRS je EVRF2000, ki ima izhodišče v NAP (angl. Normaal Amsterdams Peil). Višine točk v EVRF2000 so geopotencialne kote in normalne višine. Končne odločitve o tipu višin v slovenskem višinskem sistemu še nismo sprejeli. Kot vemo, pa so geopotencialne kote osnova za njihov preračun v katerikoli tip višin (Stopar, 2007).

### 5.2.1 Višinski sistemi

Definicija višinskega sistema je dokaj težavna naloga in je odvisna od načina določitve višine. Če višine določimo z izmero GNSS, lahko govorimo o geometričnem višinskem sistemu, ki ni povezan s težnostnim poljem Zemlje. Kadar so višine določene v težnostnem polju Zemlje, velja, da so določene v enem od fizikalnih višinskih sistemov, ki povezujejo nivelmansko in gravimetrično izmero.

Višino neke točke lahko podamo v različnih fizikalnih višinskih sistemih. Osnovo vsem fizikalnim višinskim sistemov predstavljajo *geopotencialne kote*. Določamo jih na osnovi merjenih višinskih razlik in podatkov o merjenem težnostnem pospešku. Enota geopotencialne kote imenujemo geopotencialno število ali GPU, kjer je

---

<sup>3</sup> Slovensko omrežje permanentnih GPS-postaj, ki je povezano z evropskim omrežjem EPN.

$$1 \text{ GPU} = 1 \text{ kgalm} = 10 \text{ Nm/kg} = 10 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Predpostavimo, da je višina ničelne nivojske ploskve oziroma geoida enaka 0, potem nam geopotencialna kota poda razliko potenciala od točke na površju do geoida.

Da dobimo višine točk podane v metrih je potrebno geopotencialno koto deliti s težnostnim pospeškom. Če delimo z različnimi vrednostmi težnostnega potenciala, dobimo različne vrste višin. Geopotencialno koto lahko delimo s konstantno vrednostjo težnostnega pospeška in dobimo *dinamične višine*. *Normalne višine* so določene na osnovi vrednosti normalne težnosti točke na elipsoidu in težnosti pripadajoče točke na teluroidu, pri tem pa so višine neodvisne od porazdelitve mas pod površjem Zemlje. V splošnem ni sprejemljivo, da višino neke točke predstavlja višina, ki se ne konča v tej točki. Zato je Molodenski postopek obrnil in definiral novo ploskev kvazigeoid. Če bi normalne višine vseh točk na površini Zemlje nanese na navzdol v njeno notranjost, bi dobili ploskev kvazigeoida. Na ta način je kvazigeoid za normalne višine to, kar je geoid za ortometrične višine. Kvazigeoid ni nivojska ploskev, vendar so njegova odstopanja od geoida majhna, na morjih ti dve ploskvi sovpadata (Kuhar, 2007).

Poznamo še *ortometrične višine*, kjer je težni pospešek določen vzdolž prostorske krivulje, težiščnice, med točko na površini Zemlje in pripadajočo točko na geoidu. Vrednosti dejanskega težnostnega pospeška seveda ne poznamo, zato je v primeru ortometričnih višin določen na osnovi hipotez o spreminjanju težnostnega pospeška pod površjem Zemlje.

V Sloveniji so zaenkrat v veljavi *normalne ortometrične višine*. Te višine danes sodijo med višine, ki so določene v zastarelem višinskem sistemu, ki so ga uporabljali v preteklosti, ko so bile meritve težnostnega pospeška zapletene in dolgotrajne (Koler, Medved, Kuhar, 2007). Za izračun popravkov merjenih višinskih razlik se namesto izmerjenega težnostnega pospeška uporabljajo izračunane vrednosti oziroma t. i. normalni težnostni pospešek. Normalne ortometrične višine se nanašajo na ničelno nivojsko ploskev, ki nima fizikalne osnove.

Višine točk, ki so določene v višinskem sistemu, ki ni določen na osnovi gravimetrične izmere, so *podane z elipsoidnimi višinami*. Njihov pomen se povečuje z razvojem GNSS-izmere. Točke istih elipsoidnih višin pri nas odstopajo od nivojskih ploskev od 44 m do 49 m,

zato je za državni višinski sistem izrednega pomena možnost prehoda na elipsoidne višine in obratno. Poleg tega naj bi sodoben višinski sistem izpolnjeval kar nekaj pogojev: višine točk morajo biti nedvoumno definirane in določljive neodvisno od poti niveliranja, določene naj bi bile na osnovi merjenj na površini Zemlje in pri tem naj bi upoštevali čim manj različnih hipotez, popravki merjenih višinskih razlik naj bi bili čim manjši, višine točk, ki ležijo na isti nivojski ploskvi, naj bi imele isto višino, višine naj bi bile v metrih, obstajala naj bi geometrijska razlaga, določene naj bi bile glede na referenčno ploskev, ki ima fizikalno razlago.

Ti pogoji se do določene mere med seboj izključujejo, zato odločitev o višinskem sistemu ni preprosta. Zraven se pojavljajo še interesi najrazličnejših uporabnikov. Ob uvedbi sodobnega višinskega sistema pa se predstavlja tudi možnost, da hkrati uvedemo nov vertikalni datum višinskih mrež na območju Slovenije.

## 6 UPORABA ODKLONOV NAVPIČNIC

### 6.1 Transformacija med astronomskimi in geodetskimi koordinatami

Z astronomskimi meritvami pridobimo astronomske koordinate ( $\Phi, A$ ), ki se nanašajo na dejansko težnostno polje Zemlje. Za izračune na matematični ploskvi, elipsoidu, lahko uporabimo odklone navpičnic in transformiramo astronomske koordinate v geodetske, ki se nanašajo na elipsoid. Zveza je naslednja:

$$\xi_S = \Phi - \varphi \quad (31)$$

$$\eta_S = (A - \lambda) \cos \varphi \quad (32)$$

in iz tega sledi:

$$\varphi = \Phi - \xi_S \quad (33)$$

$$\lambda = A - \frac{\eta_S}{\cos \varphi} \quad (34)$$

kjer se:  $\xi_S$  in  $\eta_S$  nanašata na odklon navpičnice na površini Zemlje (ang. "surface")

Odklon navpičnice se nanaša na točko na površju Zemlje, kar je tudi točka, kjer se astronomske koordinate običajno merijo. Če pa v enačbah (31 in 32) uporabimo odklon navpičnice, ki se nanaša na točko na geoidu, bi morali upoštevati ukrivljenost navpičnice. Glede na ugotovitve v poglavju 1.6, upoštevanje ukrivljenosti težiščnice na podlagi aproksimacije ni nujno smiselno, saj lahko na ta način dosežemo večjo napako, kot če predvidevamo, da sta odklona navpičnic na geoidu in na površini Zemlje enaka.

### 6.2 Redukcija terestričnih opazovanj v računski prostor

V klasični geodetski mreži je horizontalni položaj ločen od višinskega. Razlike elipsoidnih višin, ki so izpeljane iz zenitnih razdalj, vsebujejo večje nezanesljivosti, ki jih upoštevamo

skozi redukcijo težnostnega polja in vertikalne refrakcije. Glavni razlog ločitve horizontalnih in vertikalnih mrež je v tem, ker uporabniki zahtevajo višine, ki so definirane v težnostnem polju. Če elipsoid predstavlja referenčno površino, horizontalni položaj zahteva elipsoidno trigonometrijo in redukcijo opazovanih položajnih vrednosti na elipsoid. Ko elipsoid ustrezno orientiramo, lahko z enačbami izračunamo elipsoidne koordinate (Torge, 2001). Pri redukciji opazovanj na površino referenčnega elipsoida upoštevamo dve skupini redukcij. Prva skupina so redukcije zaradi vpliva geometrije težnostnega polja Zemlje, druga skupina so geometrijski popravki računske referenčne ploskve. S tako reduciranimi smermi in dolžinami lahko sestavimo matematični model določitve koordinat točk na površini rotacijskega elipsoida. Sestavimo lahko tudi model za določitev koordinat točk v ravnini kartografske projekcije, vendar moramo upoštevati še projekcijske popravke izbrane projekcije.

Ko azimute in razdalje reduciramo na elipsoid, se ti nanašajo na normalni presek. Normalni presek je definiran s krivuljo križanja vertikalne ravnine z elipsoidom. Normali na elipsoid v dveh točkah med sabo nista vzporedni, zato normalna preseka  $P_1$  do  $P_2$  in  $P_2$  do  $P_1$  med seboj ne sovpadata. Razlike v azimutu (manj kot  $0.1''$  za  $S=100$  km) in razdalji (manj kot  $1 \mu\text{m}$  za  $S = 100$  km) so majhne in jih lahko zanemarimo. Opazovane dolžine običajno reduciramo na geodetsko krivuljo, ki je definirana kot najkrajša razdalja med dvema točkama in je omejena z dvema normalnima presekom. Z dolžinami moramo za različne izračune uskladiti tudi kotna opazovanja in jih reducirati na geodetsko krivuljo.

### **6.2.1 Redukcija opazovanj zaradi zemeljskega težnostnega polja**

Ko opazovanja popravimo za meteorološke in instrumentalne vplive, sledi redukcija opazovanj zaradi geometrije težnostnega polja (Stopar, 2006).

#### **6.2.1.1 Popravek astronomskega azimuta $A$ na geodetski azimut $\alpha'$**

Terestrična opazovanja na zemeljskem površju se nanašajo na lokalni astronomski<sup>4</sup> ( $LA$ ) koordinatni sistem. Astronomski azimut  $A$ , opazovan v  $LA$  sistemu se razlikuje od prostorskega geodetskega azimuta  $\alpha'$ , ki se nanaša na lokalni geodetski<sup>5</sup> ( $LG$ ) koordinatni sistem. Razliko obeh azimutov podamo z naslednjo zvezo:

$$\delta A = \alpha' - A \quad (35)$$

kar predstavlja popravek azimuta zaradi odklona navpičnice. To je dejansko Laplacejeva enačba in znaša:

$$\delta\alpha_g = C_1 + C_2 \quad (36)$$

$$C_1 = -\eta_i \operatorname{tg} \varphi_i \quad (37)$$

$$C_2 = -(\xi_i \sin A_{ij} - \eta_i \cos A_{ij}) \operatorname{ctg} Z_{ij} \quad (38)$$

$$\alpha' = A_{ij} + C_1 + C_2 \quad (39)$$

kjer so:

- $\xi_i$     komponenta odklona navpičnice v točki  $i$  v smeri meridiana
- $\eta_i$     komponenta odklona navpičnice v točki  $i$  v smeri I. vertikal.
- $Z_{ij}$     astronomska zenitna razdalja opazovanja v točki  $i$  proti točki  $j$
- $A_{ij}$     astronomski azimut opazovan v točki  $i$  proti točki  $j$
- $\varphi_i$     geodetska širina točke  $i$

Popravek astronomskega azimuta je nič, ko navpičnica in normala sovpadata. V primeru horizontalne vizure odpade člen  $C_2$  v zgornji enačbi.

#### 6.2.1.2 Horizontalni kot/horizontalna smer

<sup>4</sup> Izhodišče v poljubni točki  $P$  na zemeljskem površju,  $z$ -os pravokotna na ekvipotencialno ploskev v točki  $P$ ,  $x$ -os tangenta na astronomski meridian v smeri smernege pola,  $y$ -os izbrana tako, da je sistem levosučen.

<sup>5</sup> Izhodišče v poljubni točki  $P$  na zemeljskem površju,  $z$ -os smer normale na elipsoid v točki  $P$ ,  $x$ -os leži v tangencialni ravnini geodetskega meridiana, usmerjena proti severu,  $y$ -os pravokotna na meridijsko ravnino s pozitivno smerjo izbrano tako, da je sistem levosučen.

Opazovane horizontalne kote popravljamo na enak način kot astronomske azimute, ker se prav tako nanašajo na navpičnico v opazovališču. Ker je velikost člena  $C_1$  za stojišče  $i$  konstanta, se pri izračunu horizontalnih kotov oz. smeri odšteje, ker je horizontalni kot (horizontalna smer) dana z razliko dveh smeri:

$$\delta\beta_g = (C_2)_{ik} - (C_2)_{ij} \quad (40)$$

kjer je:  $C_2$  dan z enačbo (38)

### 6.2.1.3 Zenitna razdalja

Popravek zenitne razdalje je dan z:

$$\delta Z_g = \xi_i \cos A_{ij} + \eta_i \sin A_{ij} \quad (41)$$

## 6.2.2 Popravki zaradi geometrije elipsoida

### 6.2.2.1 Dolžine

Prostorsko dolžino  $D_{ij}$  moramo reducirati za vpliv geoidnih višin točke  $\rightarrow$  dolžina geodetske krivulje na površini referenčnega elipsoida. Izmerjeno prostorsko dolžino  $D_{ij}$  med  $P_i$  in  $P_j$  najprej reduciramo v tetivo elipsoida  $d_{ij0}$  s pomočjo izraza (Stopar, 2006):

$$d_{ij}^0 = \sqrt{\frac{D_{ij}^2 - (h_i - h_j)^2}{\left(1 + \frac{h_i}{R_m}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_j}{R_m}\right)}} \quad (42)$$

kjer je:  $R_m$  polmer ukrivljenosti elipsoida v geodetskem azimutu  $\alpha'$ :

$$R_m = \frac{R_i(\alpha) + R_j(\alpha)}{2} \quad (43)$$

$$R_i(\alpha) = \frac{M_i \cdot N_i}{M_i \cdot \sin^2(\alpha_{ij}) + N_i \cdot \cos^2(\alpha_{ij})} \quad (44)$$

kjer sta:  $M_i$  polmer ukrivljenosti meridiana v točki i,  $M_i = M_i(\varphi_i)$

$N_i$  polmer ukrivljenosti I. vertikala v točki i,  $N_i = N_i(\varphi_i)$

Za redukcijo opazovanj dolžine  $D_{ij}$  v tetivo elipsoida moramo poznati elipsoidno višino točke  $\rightarrow h_i$  in  $h_j$ . Elipsoidno tetivo reduciramo v dolžino geodetske krivulje  $D_{ij}^E$  na referenčnem elipsoidu:

$$D_{ij}^E = 2 \cdot R_m \cdot \arcsin\left(\frac{d_{ij}^\circ}{2 \cdot R_m}\right) \quad (45)$$

Neupoštevanje geoidne višine povzroči napako 6-7 ppm napake v merilu, če imamo absolutni geoid ( $42 \text{ m} < N < 48 \text{ m}$ ). Za relativni geoid lahko  $N$  zanemarimo ( $-3 \text{ m} < N < 3 \text{ m}$ ).

#### 6.2.2.2 Redukcija geodetskega azimuta $\alpha'$ v Laplacov azimut $\alpha$

Prvi geometrijski popravek je redukcija prostorskega geodetskega azimuta  $\alpha'$  na površino referenčnega elipsoida. Imenujemo ga azimut normalnega preseka = Laplacev azimut. Ta redukcija je odvisna od višine opazovane točke (Stopar, 2006):

$$C3 = \alpha_{ij} - \alpha'_{ij} = \frac{h_j}{2 \cdot M_m} \cdot e^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha'_{ij}) \cdot \cos^2(\varphi_m) \quad (46)$$

kjer so:  $\varphi_m = \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}$ ,  $M_m = \frac{M_i + M_j}{2}$ ,  $M_i(\varphi) = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt[3]{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^2}}$

Opazovani astronomski azimut je sedaj reduciran v azimut normalnega preseka:

$$\alpha_{ij} = \alpha'_{ij} + C3 = A_{ij} + C1 + C2 + C3 \quad (47)$$

### 6.2.2.3 redukcija Laplacejevega azimuta $\alpha$ na azimut geodetske krivulje $\alpha^E$

Normalna preseka dveh točk ne sovpadata, enolična povezava točk na površini referenčnega elipsoida je le geodetska krivulja, zato moramo tudi Laplacev azimut reducirati na azimut geodetske krivulje  $\alpha_{ij}^E$  :

$$C4 = \alpha_{ij}^E - \alpha_{ij} = \frac{e^2 \cdot D_{ij}^{E2} \cdot \cos^2(\varphi_m) \cdot \sin(2\alpha_{ij})}{12 \cdot M_m \cdot N_m} \quad (48)$$

$$\alpha_{ij}^E = \alpha_{ij} + C4 = A_{ij} + C1 + C2 + C3 + C4 \quad (49)$$

## 6.3 Primer uporabe redukcije opazovanj v računski prostor

Primer uporabe redukcije opazovanj v računski prostor smo delali na vajah pri predmetu Višja geodezija III. Dana so bila opazovanja astronomskega azimuta  $A$ , zenitne razdalje  $z$  in dolžine  $D$  od točke 1 do točke 2.

### 6.3.1 Podatki

*točka 1:*

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 46^\circ 09' 54.547927'' \\ \lambda_1 &= 14^\circ 07' 05.468779'' \\ h_1 &= 1564.840 \text{ m} \\ N_1 &= 47.321 \text{ m} \\ \eta_1 &= 3.07'' \\ \xi_1 &= -4.77''\end{aligned}$$

*točka 2:*

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= 45^\circ 55' 43.737012'' \\ \lambda_2 &= 14^\circ 28' 32.904494'' \\ h_2 &= 1115.110 \text{ m} \\ N_2 &= 46.952 \text{ m} \\ \eta_2 &= 2.88'' \\ \xi_2 &= 7.23''\end{aligned}$$

opazovanja:

|           |                |
|-----------|----------------|
| $A_{1-2}$ | 133°22'26.905" |
| $z_{1-2}$ | 90°50'44.7569" |
| $D_{1-2}$ | 38156.3629 m   |

### 6.3.2 Izračunane vrednosti

Geodetski azimut:

$$\alpha' = 133^{\circ}22'23.687''$$

Popravljen zenitna razdalja:

$$Z' = 90^{\circ} 50' 50.2643''$$

Dolžina geodetske krivulje:

$$D_{ij}^E = 38145.7544 \text{ m}$$

Laplacev azimut:

$$\alpha_{ij} = 133^{\circ} 22' 23.629''$$

Azimut geodetske krivulje:

$$\alpha_{ij}^E = 133^{\circ} 22' 23.628''$$

Iz dobljenih vrednosti lahko vidimo, da je razlika zaradi upoštevanja odklonov navpičnice v primeru azimuta okoli 3", pri zenitni razdalji je razlika skoraj 6". Geodetska linija se od merjene dolžine razlikuje za 11 m, medtem ko azimut geodetske krivulje ne odstopa bistveno od geodetskega azimuta.

## 7 GEOID SLOVENIJE 2000

Ko je GPS-tehnologija, ki omogoča visoko natančnost določitve položaja, postala osnovno sredstvo za vzpostavitev geodetskih mrež, se je pojavil tudi problem, saj z GPS meritvami pridobimo elipsoidne višine, ki niso uporabne v vsakdanji geodetski praksi. Kar pomeni, da brez geoida ni ustrezne praktične uporabe GPS-tehnologije. Zaradi tega razloga je bilo opravljeno računanje natančne ploskve geoida, ki je v Sloveniji trenutno v veljavi (Pribičević, 2000).

### 7.1 Izračun ploskve geoida Slovenije

Sodobni način določitve geoida uporablja tri vrste informacij:

- dolgovalovne strukture Zemljinega težnostnega polja, ki jih poda globalni geopotencialni model EGM96,
- za srednjevalovni del spektra so uporabili opazovane komponente odklona navpičnice  $\zeta$  in  $\eta$  ter anomalije težnosti prostega zraka  $\Delta g$  in na koncu podatke GPS/NVN o geoidnih višinah,
- kratkovalovni in ultrakratkovalovni del spektra se modelira s pomočjo digitalnega modela reliefa in digitalnega modela gostote površinskih mas.

Za dejanski izračun so uporabili kolokacijo po metodi najmanjših kvadratov v znani tehniki "remove-restore". Postopek je razdeljen v tri korake: najprej odstranimo vpliv topografskih in izostatskih mas ter geopotencialnega modela iz površinskih odklonov navpičnice  $\zeta$  in  $\eta$  in anomalije prostega zraka  $\Delta g$  (remove). Potem sledi redukcija izgubljenih reduciranih geoidnih višin z metodo kolokacije. Na koncu opravimo povrnitev mas oz. povrnitev vpliva geopotencialnega modela EGM96 (restore).

#### 7.1.1 Uporabljeni podatki

#### 7.1.1.1 Globalni geopotencialni model Zemlje (EGM96)

Uporabljen je bil najnovejši globalni geopotencialni model EGM96. Za določitev EGM96 so bili uporabljeni podatki opazovanj s pomočjo več vrst satelitov in vsi možni gravimetrični podatki, tudi iz območja Slovenije. Model tvorijo koeficienti razvoja težnostnega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah, do stopnje in reda  $n=m=360$ . Uporabljen je za izračun vpliva dolgovalovnih struktur Zemljinega težnostnega polja.

#### 7.1.1.2 Digitalni model reliefa (DMR)

Datoteka DMR-ja je nastala s povezovanjem več drugih datotek, saj je zajemala ozemlje več sosednjih držav. Glede na to, da je pri izračunu potrebno upoštevati topoizostatske vplive okoli točke v polmeru 167 km, je zajemala datoteka DMR-ja območje:  $11^{\circ} < \lambda < 19^{\circ}$  in  $44^{\circ} < \varphi < 49^{\circ}$ . DMR sta tvorila dejansko dva modela:

- detajlni DMR v mreži 11".25 x 18".75 in
- grobi DMR v mreži 90" x 150".

#### 7.1.1.3 Digitalni model gostote (DMG)

Zajema območje  $44^{\circ} < \Phi < 47^{\circ}$ ,  $11^{\circ} < \lambda < 19^{\circ}$ . Datoteka je izdelana v mreži, kompatibilni z mrežo DMR-ja:

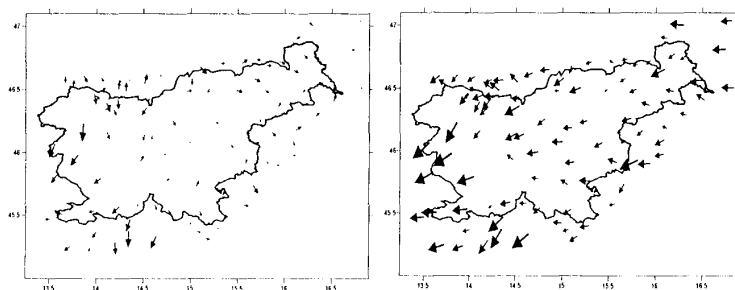
- detajlni DMG v mreži 11".25 x 18".75 in
- grobi DMG v mreži 90" x 150".

Vpliv nepravilnega razporeda gostote Zemljinih mas predstavljajo odkloni navpičnic, ki jih določimo z opazovanji, vendar so ti odkloni določeni le na omejenem številu t.i. geoidnih točk. Geodetsko-astronomsko delo za določanje odklonov navpičnice je zelo obsežno, zato število točk v Sloveniji ni zadoščalo potrebam računanja visoko natančne ploskve geoida. Izdelane datoteke DMG-ja, ki vsebujejo informacije o gostoti Zemljine skorje, so v veliki meri olajšale izračun geoida. Uporabljene so bile pri določanju vpliva topografskih mas v

okolici obravnavane točke t.j. na opazovane količine  $\xi, \eta, \Delta g$ <sup>6</sup>. Poleg tega pa so bili preučeni tudi tektonski premiki delov geoloških struktur, saj je očitno, da so vertikalne in horizontalne spremembe položaja katerekoli točke na površju Zemlje posledica teh premikov. Iz primerjave razporedov epicentrov in strukturnega sestava za območje raziskav so ugotovili, da se zelo dobro ujemajo z določeno ploskvijo geoida in razporedom površinskih mas. Torej je pri določitvi ploskve geoida koristno in potrebno upoštevati geološko-geofizične podatke. Velja tudi obratno, da se ploskev geoida lahko uspešno uporabi pri različnih geološko-geofizičnih raziskavah.

#### 7.1.1.4 Odkloni navpičnic

Za izračun geoida je bilo uporabljenih skupaj 99 točk z merjenimi vrednostmi odklona navpičnice. Od tega je 51 točk v Sloveniji, 23 na območju Hrvaške, 20 na območju Avstrije in 5 točk na Madžarskem. Ker imajo države različne koordinatne sisteme je bilo potrebno odklone transformirati v sitem ETRS89 oz. GRS80.



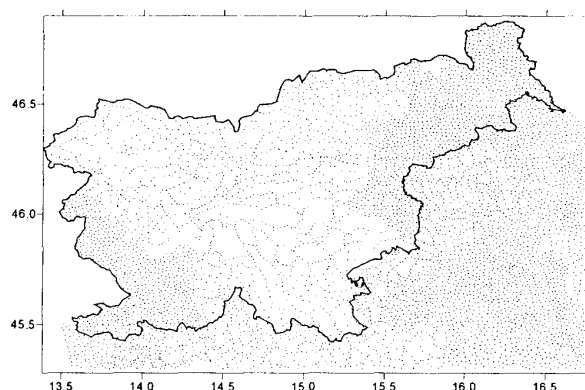
Slika 5: Odkloni navpičnic v relativni (desno) in absolutni (levo) orientaciji (Pribečević, 2000)

#### 7.1.1.5 Anomalije težnosti

Vrednosti anomalij težnosti so bile uporabljene za dva namena. Prvi je bil izračun empirične kovariančne funkcije. Drugi namen je bil kombinirani izračun geoida v postopku kolokacije. Uporabljene so bil točkaste vrednosti anomalij težnosti prostega zraka. Uporabljenih je bilo 4605 anomalij.

---

<sup>6</sup> Raziskave so potekale v sodelovanju Inštituta za geologijo, geofiziko in geotehniko iz Ljubljane ter Rudarsko-geološko-naftne fakultete iz Zagreba, kot nosilca projekta.



Slika 6: Razpored gravimetričnih podatkov (Pribičević, 2000)

#### 7.1.1.6 Podatki GPS/NVN

Za potrebe izračuna geoida so ustvarili datoteko s 163 točkami GPS/NVN, ki so dokaj enakomerno razporejene po celotnem ozemlju Slovenije. Ker se točke na Hrvaškem nanašajo na isti višinski datum kot točke v Sloveniji, so jih lahko uporabili, medtem ko točke iz Avstrije in Madžarske niso bile upoštevane, saj ležijo v drugačnih višinskih datumih. Povezava GPS točk z reperji NVN na ozemlju Slovenije in obmejnem pasu s Hrvaško je pomembna zaradi določitve ortometričnih višin  $H^s$  oziroma zaradi določitve geoidnih višin  $N$  na GPS točkah, ki imajo znane elipsoidne višine. Tako se lahko opravi absolutna orientacija ploskve geoida po višini. Priporočljiva je določitev čim večjega števila teh točk. Zbrali so vse informacije o že opravljenih geodetskih delih, pri katerih so bile GPS-točkam določene ortometrične višine z metodo preciznega nivelmana. V mnogih primerih niso razpolagali z ortometrično višino, pač pa z normalno ortometrično višino. Razlog je v tem, da vzdolž nivelmanskih vlakov NVN niso bile povsod opravljene gravimetrične meritve. Pri izravnavi mreže so zato namesto dejanskih vrednosti težnostnega pospeška uporabljali vrednosti normalnega težnostnega pospeška, ki so ga izračunali po preprosti enačbi. S tem je seveda bila zmanjšana natančnost določitve geoidnih višin. Če je obravnavano območje manjše, brez večjih sprememb v višini in če se gostota površinskih mas ne spreminja veliko, so lahko predpostavili centimetrsko natančnost določitve geoidnih višin.

Več podatkov o geoidnih višinah, pridobljenih iz kombinacije GPS/NVN so prevzeli z Geodetske uprave Republike Slovenije. Podatke iz ozemlja Hrvaške so pridobili od različnih geodetskih podjetij, nekaj pa jih je bilo določenih naknadno.

### 7.1.2 Postopek Remove

V postopku remove odstranimo vpliv okoliških topografskih mas na merske točke, tj. točke v katerih so merjene komponente odklona navpičnice, anomalije težnosti in vrednosti geoidnih višin. Za izračun topoizostatskega vpliva so uporabili program TC, ki so ga razvijali na več univerzah po svetu. Vpliv z oddaljevanjem od točke izračuna upada, zato so uporabili dva različna digitalna modela reliefa:

- detajlni model DMR v mreži 11".25 x 18".75 in
- grobi model DMR v mreži 90" x 150".

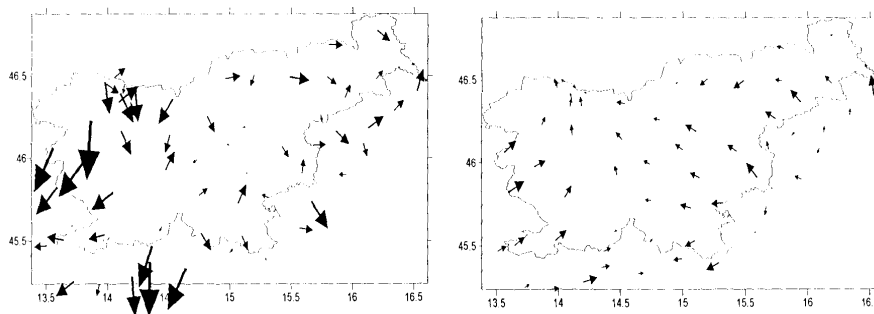
V modeliranju mas okoli računske točke je fini DMR uporabljen za izračun vpliva do radija 5 km okoli točke. Grobi DMR je uporabljen za izračun vpliva do radija 167 km okoli točke.

V izračunu s programom TC so nato primerjali uporabo različnih virov gostote. V prvem primeru so uporabili konstantno gostoto  $2,67 \text{ g/cm}^3$ , v drugem pa so uporabili DMG (digitalni model gostote).

Sam postopek remove zmanjša vrednosti komponent odklona navpičnice, anomalij težnosti in geoidnih višin na kogeoidu<sup>7</sup>. Dobili so reducirane t.i. "zglajene" merjene količine na kogeoidu. Te so potem pripravne za kolokacijo po metodi najmanjših kvadratov.

---

<sup>7</sup> Ekvipotencialna ploskev, ki jo dobimo s premeščanjem mase nad geoidom pod geoid ali na sami ploskvi geoida.



Slika 7: Prikaz površinskih odklonov navpičnic (levo) in reduciranih odklonov navpičnic na kogeoidu (desno) (Pribičević, 2000)

### 7.1.3 Postopek kolokacije

Za izračun v postopku kolokacije so uporabili program LSC, katerega avtor je prof. H. Sünkel s TU Gradec.

Metoda kolokacije je pomembna kadar imamo opravka z velikim številom raznovrstnih količin, ki so pogosto različne natančnosti, drugačnega prostorskega razporeda in podobno. Zato je tudi bila uporabljena pri izračunu geoida.

Za kolokacijo je značilno, da obstaja modeliranje slučajnih in sistematičnih pogreškov. Kolokacijsko enačbo definiramo s pomočjo merjenih vrednosti:

$$l = Ax + s + n \quad (50)$$

kjer je:

- $Ax$  označuje sistematični, "pravilni" del modela
- $s$  predstavljajo moteče količine (nepravilne-sistematične količine)
- $n$  predstavlja slučajne pogreške

Pri uporabi metode kolokacije je nujno definirati kovariančno funkcijo, za katero obstajajo mnogi izrazi. Glavna lastnost kovariančne funkcije je ta, da ima maksimum v izhodiščni točki ( $r=0$ ) in z oddaljevanjem od začetne točke ( $r \rightarrow \infty$ ) gredo vrednosti funkcije proti nič. V določitvi geoida so bili prevzeti parametri kovariančne funkcije, ki so jih dobili drugi avtorji

za izračun geoida na širšem območju. V kolokaciji so tako bile izračunane predciranane vrednosti geoidnih višin v mreži 1'.0 x 1'.5 za območje Slovenije. Geoid je dejansko absolutno orientiran po višini, ker so v izračunu bile uporabljene geoidne višine iz kombinacije GPS/NVN. Absolutna orientacija je bila opravljena s transformacijo odklonov navpičnic v sistem ETRS89.

#### **7.1.4 Postopek Restore**

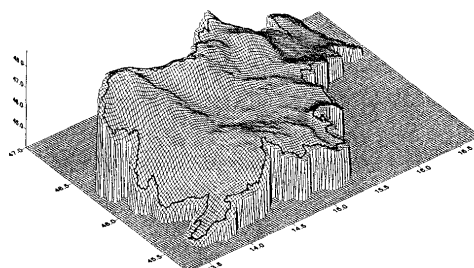
Po opravljeni kolokaciji in izračunani absolutno orientirani ploskvi kogeoida v mreži 1'.0 x 1'.5 so opravili še zadnji korak, postopek restore (povrnitev mas). V vsaki površinski točki mreže so opravili povrnitev potenciala topoizostatskih mas. Tako so iz ploskve kogeoida prešli na ploskev geoida.

#### **7.2 Raziskave natančnosti ploskve geoida Slovenije**

Zaradi lažjega ugotavljanja natančnosti ploskve geoida so opravili več vrst izračunov, da so rešitve lahko primerjali med seboj:

- astrogeodetska rešitev s konstantno gostoto ( $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ );
- astrogeodetska rešitev s spremenljivo gostoto (datoteka DMG);
- gravimetrična rešitev s konstantno gostoto;
- gravimetrična rešitev s spremenljivo gostoto;
- kombinirana rešitev s konstantno gostoto;
- kombinirana rešitev s spremenljivo gostoto.

Iz rezultatov je bilo očitno, da je bila uporaba spremenljive gostote več kot smiselna, v vseh treh primerih. Razlike geoidnih višin z in brez DMG-ja so znašale okoli 0.2 m, kar je tudi do desetkrat več od dosežene notranje natančnosti. Po opravljeni analizi vseh rešitev so ugotovili, da je najboljša rešitev kombinacija vseh podatkov z uporabo digitalnega modela gostote (DMG).



Slika 8: Tridimenzijski prikaz ploskve geoida za območje Slovenije (Pribečević, 2000)

Na sliki se nazorno kaže ploskev geoida. Razvidna je tudi medsebojna koreliranost geoida z reliefom na površju Zemlje. Dosežena je bila zelo homogena natančnost, ki znaša 2-3 cm za celotno območje Slovenije (notranja natančnost). Geoid je podan v obliki pravilne mreže (grida) za celotno območje Slovenije.

### 7.3 Težave obstoječega geoidnega modela

Pri preučevanju obstoječih podatkov za uvedbo novega višinskega sistema so ugotovili, da je uporaba trenutno uveljavljenega geoida vprašljiva. Največji problem sedanje rešitve geoidne ploskve so namreč t.i. GPS/nivelman točke, saj so višine točk, ki so bile uporabljene za višinsko orientacijo ploskve, spremenile svoje vrednosti zaradi preračuna nivelmanske mreže Slovenije. Slabost preračuna je v tem, da je bila opravljena izravnavo v sistemu niveliranih višinskih razlik. Izravnavo je bila izvedena po opravljenem računanju obstoječega geoida. Zaradi tega prihaja na določenih območjih tudi do odstopanj več decimetrov. Z uvedbo novega višinskega sistema se tako kot nujno izpostavlja določitev novega (kvazi)geoida (Koler, Medved, Kuhar, 2007). Še prej pa bo potreben vnovičen preračun celotne nivelmanske mreže v sistemu geopotencialnih kot (Stopar, 2007).

## **8 IZRAČUN KOMPONENT ODKLONA NAVPIČNICE IZ GEOIDNIH VIŠIN**

### **8.1 Metoda določitve geoidne ravnine**

Geoid ima zelo komplicirano geometrijsko strukturo. Na globalni ravni ga lahko predstavimo v obliki sfernih funkcij (poglavje 4), vendar ne dosega centimetrske natančnosti. Na območju neke države ga lahko predstavimo s pravilno mrežo točk (poglavje 6). Za manjša območja, ki zajemajo GPS mreže, se lahko lokalni geoid analitično predstavi v obliki ploskve drugega reda (krogla, elipsoid, hiperbola, parabola), v večini primerov pa zadošča tudi ravninska aproksimacija (npr. ravnina). Tako dobimo bolj natančno lokalno geometrijsko strukturo geoida. Pomembno je, da nam koeficienti ravnine podajo odklone navpičnic v težiščni točki mreže. V diplomski nalogi sem tako uporabila metodo izračuna navpičnic iz geoidnih višin, ki temelji na principu določitve ravnine.

### **8.2 Podatki in programska oprema za izračun**

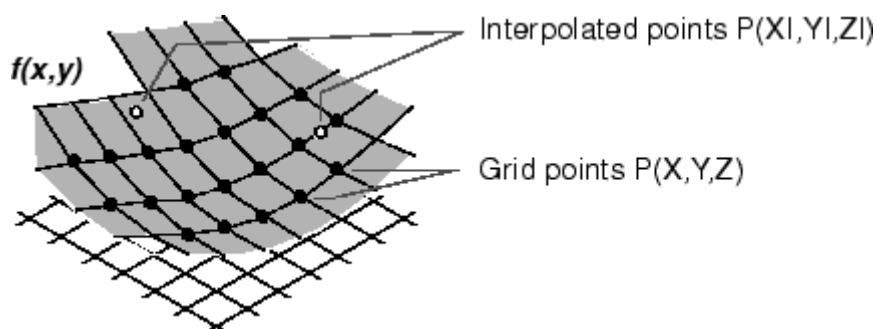
Za interpolacijo geoidnih višin iz grida sem potrebovala:

- GK koordinate gridnih točk,
- pravokotno mrežo geoidnih višin,
- elipsoidne koordinate pravokotne mreže geoidnih višin,
- program za računanje (uporabila sem programski paket Matlab),
- program za grafično predstavitev rezultatov (AutoCAD).

### **8.3 Teoretične osnove**

Zanima me princip bilinearne interpolacije iz grida geoidnih višin ter lokalna metoda določitve geoidne ravnine.

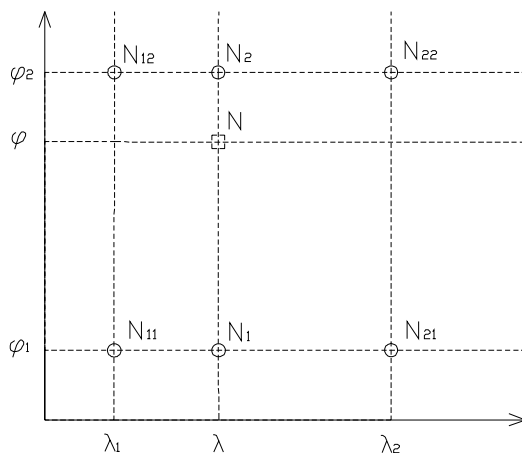
### 8.3.1 Interpolacija



Slika 9: Princip interpolacije ( <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc> (3.2.2008))

Na sliki je prikazana osnova interpolacije, ki je bila uporabljena v diplomski nalogi. Gridne točke (angl. "grid points") predstavljajo mrežo geoidnih višin s pripadajočimi elipsoidnimi koordinatami, interpolirane točke (angl. "interpolated points") pa GK točke, izračunane na enaki oddaljenosti od gridne točke, ki sem jih pretvorila v elipsoidne koordinate. Moja naloga je bila določitev geoidnih višin z interpolacijo.

Interpolacija je v matematiki približna vrednost funkcije znotraj obsega znanih nepovezanih vrednosti neodvisne spremenljivke. V primeru, ko imamo na razpolago pravilno mrežo, uporabimo bilinearno interpolacijo. Gre za princip, da najprej izvedemo linearno transformacijo v  $x$  smeri in nato še v  $y$  smeri (Slika 10).



Slika 10: Princip bilinearne interpolacije

Predpostavimo, da želimo določiti neznano vrednost v točki  $N = (\varphi, \lambda)$ . Vrednosti so znane v točkah  $N_{11} = (\varphi_1, \lambda_1)$ ,  $N_{12} = (\varphi_1, \lambda_2)$ ,  $N_{22} = (\varphi_2, \lambda_2)$ ,  $N_{21} = (\varphi_2, \lambda_1)$ . Bilinearne interpolacija v točki  $N$  poteka po enačbi (Kuhar, 2007):

$$N(\varphi, \lambda) = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY \quad (51)$$

kjer so:

$$a_0 = N_{11}$$

$$a_1 = N_{21} - N_{11}$$

$$a_2 = N_{12} - N_{11}$$

$$a_3 = N_{11} + N_{22} - N_{21} - N_{12}$$

$$X = (\lambda - \lambda_1) / (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$Y = (\varphi - \varphi_1) / (\varphi_2 - \varphi_1)$$

### 8.3.2 Analitična predstavitev lokalnega geoida

Rezultat določanja geoida Slovenije (poglavje 7) so vrednosti geoidnih višin predstavljene v gridu, ki jih lahko obravnavamo kot funkcijo dveh spremenljivk:

$$N = N(y, x) \quad (52)$$

Spremenljivki  $x$  in  $y$  sta ravninski koordinati točk v mreži. Običajno se koordinate podajajo v lokalnem koordinatnem sistemu. Funkcija  $N(y, x)$  predstavlja regresijsko oziroma interpolacijsko ploskev, določeno s številom točk z znanimi geoidnimi višinami. V primeru ravnine je enačba naslednja:

$$N(y, x) = Ay' + Bx' + C \quad (53)$$

kjer so:  $A, B$  in  $C$  koeficienti ravnine in se  $y' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j y_i$  in  $x' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j x_i$  nanašata na

težišče mreže, saj imajo le tako koeficienti polinoma ustrezno geometrijsko pojasnitev:

- $A, B$  – razlika naklona tangentne ravnine na elipsoid in ustrezne geoidne ploskve v težiščni točki ( $A \rightarrow$  naklon vzhod – zahod,  $B \rightarrow$  naklon sever – jug),
- $C$  – vzporedni odmik elipsoida od geoida.

Smerni kot, ki ga določata koeficienta A in B, nam poda tudi smer največjega naklona ploskve lokalnega geoida.

### 8.3.3 Način izračuna geoidne ravnine

Enačba ravnine, predstavljena v prejšnjem poglavju, vsebuje tri neznane parametre A, B in C. Za določitev treh neznanih parametrov potrebujemo vsaj tri enačbe oblike 53. Če hočemo doseči zanesljivejšo rešitev, moramo povečati število danih geoidnih višin.

Število danih višinskih točk in njihov položaj neposredno vpliva na natančnost izračunane regresijske ploskve. Čim več danih točk je na voljo in čim bolj enakomerno so razporejene, tem boljša sta nadštevilčnost in zanesljivost izbranega modela. S tem je seveda višja splošna natančnost določitve regresijske ploskve (Kuhar, 1996).

#### 8.3.3.1 Posredna izravnavna

Če imamo na razpolago več kot tri dane točke, ki so nujno potrebne za enolično določitev koeficientov ravnine, moramo vrednosti izravnati po metodi najmanjših kvadratov.

Najprimernejša je posredna izravnavna, katere postopek je v primeru določitve ravnine naslednji:

- določitev enačb ravnine:

$$N_i = Ay_i' + Bx_i' + C \quad (54)$$

kjer je:  $i = 1, 2, \dots, n$

- posredna izravnavna:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \Delta = \mathbf{f} \quad (55)$$

kjer so:  $\mathbf{v}$  vektor popravkov ( $n \times 1$ )

$\mathbf{B}$  matrika koeficientov ob neznankah v enačbah popravkov ( $n \times n$ )

$\mathbf{f}$  vektor odstopanj ( $n \times 1$ )

$\Delta$  vektor neznank ( $n \times 1$ )

$$N = B^T \cdot B \quad (56)$$

kjer je:  $N$  matrika normalnih členov ( $n \times n$ )

$$t = B^T \cdot f \quad (57)$$

kjer je:  $t$  vektor prostih členov ( $n \times 1$ )

$$\Delta = N^T \cdot t = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$v = f - B \cdot \Delta \quad (59)$$

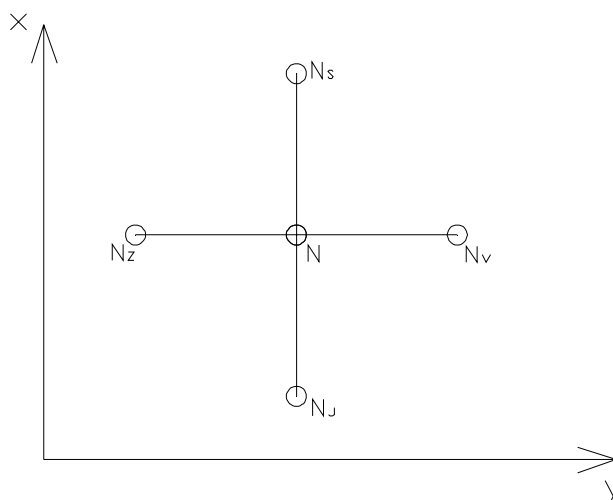
#### 8.4 Interpolacija geoidnih višin

Geoid Slovenije je podan v pravilni mreži (gridu) geoidnih višin (Slika 11).

|    | 13     | 14     | 15     | 16     | 17     | 18     | 19     | 20     | 21     | 22     | 23     | 24     | 25     | 26     |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 6  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 7  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 8  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 9  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.696 | 44.732 |
| 10 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.681 | 44.734 | 44.78  | 44.812 |
| 11 | 0      | 0      | 0      | 44.302 | 44.371 | 44.432 | 44.497 | 44.556 | 44.625 | 44.685 | 44.742 | 44.796 | 44.843 | 44.876 |
| 12 | 0      | 0      | 44.273 | 44.336 | 44.392 | 44.46  | 44.525 | 44.601 | 44.661 | 44.725 | 44.783 | 44.837 | 44.887 | 44.926 |
| 13 | 0      | 44.238 | 44.3   | 44.349 | 44.41  | 44.472 | 44.541 | 44.621 | 44.687 | 44.75  | 44.823 | 44.878 | 44.933 | 44.972 |
| 14 | 44.188 | 44.249 | 44.304 | 44.358 | 44.421 | 44.487 | 44.56  | 44.623 | 44.69  | 44.76  | 44.826 | 44.894 | 44.961 | 45.01  |
| 15 | 44.188 | 44.243 | 44.299 | 44.364 | 44.437 | 44.495 | 44.575 | 44.644 | 44.695 | 44.764 | 44.836 | 44.905 | 44.97  | 45.046 |
| 16 | 44.179 | 44.246 | 44.308 | 44.378 | 44.45  | 44.503 | 44.574 | 44.646 | 44.701 | 44.761 | 44.838 | 44.924 | 44.998 | 45.075 |
| 17 | 44.167 | 44.238 | 44.302 | 44.367 | 44.438 | 44.503 | 44.567 | 44.615 | 44.673 | 44.744 | 44.822 | 44.918 | 45.011 | 45.089 |
| 18 | 44.16  | 44.217 | 44.274 | 44.344 | 44.397 | 44.462 | 44.542 | 44.589 | 44.651 | 44.73  | 44.819 | 44.91  | 45.011 | 45.084 |
| 19 | 44.14  | 44.194 | 44.258 | 44.311 | 44.375 | 44.433 | 44.504 | 44.566 | 44.634 | 44.714 | 44.805 | 44.909 | 45.006 | 45.114 |
| 20 | 0      | 44.181 | 44.242 | 44.293 | 44.355 | 44.412 | 44.483 | 44.549 | 44.635 | 44.717 | 44.816 | 44.923 | 45.014 | 45.148 |
| 21 | 0      | 0      | 44.217 | 44.276 | 44.337 | 44.393 | 44.467 | 44.552 | 44.638 | 44.723 | 44.814 | 44.915 | 45.034 | 45.171 |
| 22 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.379 | 44.453 | 44.54  | 44.637 | 44.712 | 44.803 | 44.92  | 45.036 | 45.183 |
| 23 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.453 | 44.525 | 44.615 | 44.712 | 44.811 | 44.93  | 45.054 | 45.189 |
| 24 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.447 | 44.529 | 44.621 | 44.713 | 44.835 | 44.972 | 45.102 | 45.224 |
| 25 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 45.01  | 45.132 | 45.253 |
| 26 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.911 | 45.042 | 45.153 | 45.265 |
| 27 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.948 | 45.061 | 45.176 | 45.275 |
| 28 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.871 | 44.98  | 45.078 | 45.187 | 45.293 |
| 29 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.8   | 44.903 | 45.006 | 45.108 | 45.207 | 45.292 |
| 30 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.65  | 44.746 | 44.84  | 44.94  | 45.031 | 45.115 | 45.208 | 45.306 |
| 31 | 0      | 0      | 0      | 0      | 44.535 | 44.622 | 44.699 | 44.792 | 44.878 | 44.973 | 45.047 | 45.132 | 45.229 | 45.328 |
| 32 | 0      | 0      | 44.476 | 44.538 | 44.602 | 44.68  | 44.758 | 44.828 | 44.906 | 44.98  | 45.07  | 45.157 | 45.252 | 45.341 |
| 33 | 0      | 44.471 | 44.544 | 44.614 | 44.675 | 44.742 | 44.794 | 44.865 | 44.946 | 45.016 | 45.091 | 45.176 | 45.27  | 45.374 |

Slika 11: Izsek iz grida geoidnih višin za Slovenijo

Pravokotna mreža velja v elipsoidnih koordinatah. Dane imamo tudi GK koordinate teh točk, vendar pravokotna mreža ne velja pri GK pravokotnih koordinatah, ker sam geoid ni v izhodišču izračunan v pravokotni XY mreži. GK koordinate imamo podane zaradi lažjega izračuna štirih točk, ki so enako oddaljene od gridne točke. Naredila sem tri primere. V prvem, so bile točke od gridne točke oddaljene 10 m, v drugem 20 m, tretjem pa 30 m. Na sliki ( Slika 12) vidimo gridno točko (N) in štiri točke, ki so enako oddaljene od nje v smeri sever, jug, vzhod in zahod ( $N_s$ ,  $N_j$ ,  $N_v$ ,  $N_z$ ).



Slika 12: Strategija določitve štirih točk, ki so enako oddaljene od gridne točke

V vseh štirih točkah in na vseh treh oddaljenostih sem nato za vsako gridno točko interpolirala geoidne višine iz grida geoidnih višin.

Najprej sem GK koordinate pretvorila v elipsoidne in izločila vse točke, ki ne padejo na območje Slovenije ( $\varphi < 45.25^\circ$  in  $\varphi > 47^\circ$ ,  $\lambda < 13.25^\circ$  in  $\lambda > 16.75^\circ$ ). Izločiti sem morala tudi točke na robu geoida. Geoid je določen na območju Slovenije. V gridu so prikazane tudi točke zunaj Slovenije, vendar je vrednost geoidnih višin 0. Interpolacija robnih točk bi bila napačna, saj pri bilinearni interpolaciji potrebujemo 4 točke z dano vrednostjo. Če je ena vrednost 0, je rezultat interpolacije napačen. Na koncu sem s pomočjo programskega paketa Matlab po zgornjem principu bilinearne interpolacije izračunala vrednosti vsem točkam, ki sem jih kasneje potrebovala za izračun geoidne ravnine.

## 8.5 Izračun geoidne ravnine

Naslednji korak je bil določitev geoidne ravnine skozi štiri točke z interpoliranimi geoidnimi višinami, ki so enakomerno razporejene okoli gridne točke. Za enolično rešitev koeficientov ravnine bi potrebovala 3 točke, ker pa sem imela dane 4 točke, sem uporabila posredno izravnavo (poglavje 8.3.3.1). Gridnih točk je bilo 14678. Ko sem izločila vse točke, ki ležijo na robu Slovenije ali ne ležijo na območju Slovenije, sem lahko izračunala 6370 ravnin in s

tem pridobila toliko odklonov navpičnic. Gre za veliko število rezultatov, katerim bi bilo smiselno določiti natančnost. Lahko bi jo ocenila na podlagi primerjave z bolj natančnimi rezultati, vendar jih za te točke ni mogoče pridobiti. Postopek določitve geoidne ravnine sem tako ponovila na točkah, ki imajo tudi astronomsko merjene odklone navpičnic in na ta način ocenila natančnost izračunanih odklonov navpičnic.

## 9 PRIMERJAVA MERJENIH ODKLONOV, DOLOČENIH IZ GLOBALNEGA GEOPOTENCIALNEGA MODELA EGM96 IN IZRAČUNANIH IZ GRIDA GEOIDNIH VIŠIN

V nekaterih točkah na območju Slovenije so bili odkloni navpičnic določeni z astronomsko meritvijo in tudi iz globalnega modela EGM96. Ravnino in s tem odklon navpičnice sem izračunala tudi v teh točkah. Na podlagi primerjave z merjenimi odkloni lahko ocenim natančnost izračunanih odklonov navpičnic. Ravnino sem ponovno določila s točkami oddaljenimi od izhodiščne točke 10 m, 20 m in 30 m. Med vrednostmi odklonov navpičnice izračunanih na tri načine bi težko določila najboljši način, saj rezultati nimajo sistematičnih razlik. Če pogledamo minimalna in maksimalna odstopanja izračunanih odklonov od merjenih (Preglednica 1) bi lahko rekla, da še najboljše rezultate da ravnina določena iz točk, ki so od izhodiščne točke oddaljene 20 m.

### 9.1 Velikosti in razlike med odkloni

Preglednica 1: Odstopanja izračunanih odklonov od merjenih odklonov navpičnic v različnih primerih

| Odklon v različnih primerih | Min_odstopanje | Max_odstopanje |
|-----------------------------|----------------|----------------|
| $\xi_{10\text{ m}}$         | 0.01"          | 4.44"          |
| $\xi_{20\text{ m}}$         | 0.01"          | -4.10"         |
| $\xi_{30\text{ m}}$         | 0.01"          | -4.45"         |
| $\eta_{10\text{ m}}$        | -0.20"         | -4.26"         |
| $\eta_{20\text{ m}}$        | 0.06"          | -3.75"         |
| $\eta_{30\text{ m}}$        | 0.01"          | -3.92"         |

Preglednica 2: Odstopanja izračunanih odklonov od odklonov navpičnic določenih iz EGM96 v različnih primerih

| Odklon v različnih primerih | Min_odstopanje | Max_odstopanje |
|-----------------------------|----------------|----------------|
| $\xi_{10\text{ m}}$         | 0.15"          | -13.30"        |
| $\xi_{20\text{ m}}$         | 0.15"          | -13.30"        |
| $\xi_{30\text{ m}}$         | 0.15"          | -13.30"        |
| $\eta_{10\text{ m}}$        | 0.07"          | -9.94"         |
| $\eta_{20\text{ m}}$        | 0.07"          | -9.94"         |
| $\eta_{30\text{ m}}$        | 0.07"          | -9.59"         |

Odstopanja izračunanih odklonov v primerjavi z odkloni določenimi iz EGM96 so precej večja (Preglednica 2).

V nadaljevanju tako podajam rezultate odklonov navpične v primeru ravnine določene iz točk, ki so od izhodiščne točke oddaljene 20 m.

Preglednica 3: Ime točke<sup>8</sup>, merjena, določena iz EGM96 in izračunana komponenta odklona navpičnice  $\xi$  in merjena, določena iz EGM96 in izračunana komponenta odklona navpičnice  $\eta$

| Ime točke   | $\xi_{mer.}$ | $\xi_{izr.}$ | $\xi_{EGM96}$ | $\eta_{mer.}$ | $\eta_{izr.}$ | $\eta_{EGM96}$ |
|-------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| Pliš        | -11.70"      | -10.83"      | -4.32"        | -5.12"        | -3.61"        | -3.34"         |
| Malija      | 1.10"        | 1.03"        | -1.8"         | -6.46"        | -5.16"        | -5.31"         |
| Debeli Vrh  | -4.13"       | -4.64"       | -1.52"        | 2.17"         | 0.52"         | 0.81"          |
| Slavnik     | -1.11"       | -2.58"       | -3.61"        | -6.30"        | -3.61"        | -4.63"         |
| Cerk        | -5.04"       | -8.77"       | -2.95"        | 3.72"         | 0.00"         | -1.17"         |
| Snežnik     | -1.43"       | -3.09"       | -3.77"        | -1.08"        | -0.52"        | -2.79"         |
| Vel. Rigelj | 5.39"        | 5.16"        | -1.26"        | 3.37"         | 3.61"         | 1.67"          |
| Gorjanci    | 0.85"        | 0.00"        | -0.78"        | -2.71"        | -0.52"        | 2.73"          |

se nadaljuje

<sup>8</sup> Elipsoidne koordinate točk so podane v Prilogi.

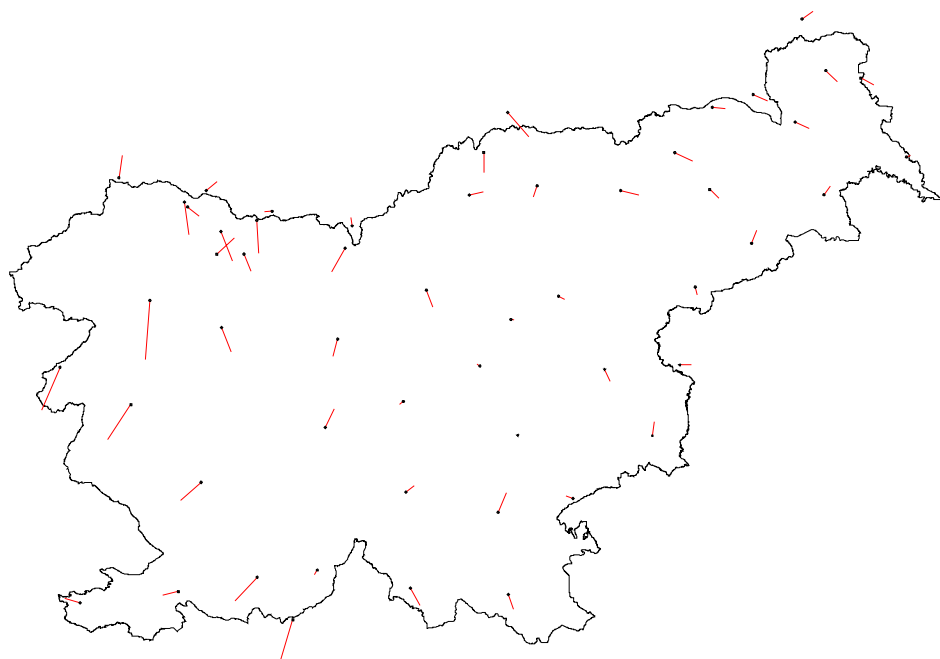
|             |         |         |        |        |        |        |
|-------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| Sveta Ana   | 1.93"   | 1.03"   | -2.15" | 3.38"  | 1.55"  | -0.05" |
| Nanos       | -5.07"  | -8.25"  | -4.31" | -8.40" | -7.22" | -4.75" |
| Kremenjak   | -7.64"  | -8.77"  | -4.37" | -8.12" | -5.16" | -7.47" |
| Brežice     | 4.01"   | 1.03"   | -1.13" | 0.72"  | 3.09"  | 2.84"  |
| Zglavnica   | -0.16"  | -1.03"  | -1.40" | 0.58"  | 0.52"  | 2.41"  |
| Krim        | 5.18"   | 5.67"   | -2.78" | 3.75"  | 1.55"  | -0.99" |
| Mrzovec     | -10.00" | -10.83" | -5.39" | -9.44" | -7.22" | -6.20" |
| Kucelj      | -0.93"  | -1.55"  | -1.86" | -1.77" | -1.03" | 0.73"  |
| Korada      | -12.57" | -15.99" | -7.06" | -7.34" | -3.61" | -6.60" |
| Javornik    | -3.20"  | -2.06"  | -1.91" | 2.44"  | 2.58"  | 3.15"  |
| Orljek      | 0.50"   | -0.52"  | -1.76" | -1.02" | 0.52"  | 1.90"  |
| Kumrovec    | -0.03"  | 0.00"   | -1.62" | 4.76"  | 3.09"  | 2.97"  |
| Rašica      | -5.00"  | -3.09"  | -2.00" | -2.01" | -1.03" | 0.21"  |
| Blegoš      | -6.78"  | -10.83" | -3.58" | 3.83v  | 2.06"  | -2.06" |
| Mrzlica     | 0.09"   | 1.03"   | -2.05" | 1.14"  | 2.06"  | 2.13"  |
| Rodica      | -16.90" | -14.44" | -5.05" | -1.45" | -0.52" | -3.58" |
| Vivodnik    | -4.79"  | -4.13"  | -1.62" | 2.73"  | 2.06"  | 1.06"  |
| Donačka g.  | -2.02"  | -3.61"  | -1.83" | 0.51"  | 1.55"  | 3.64"  |
| Hom         | 4.60"   | 3.09"   | -3.08" | 7.43"  | 4.13"  | -0.70" |
| JBT         | -4.83"  | -5.67"  | -2.56" | 3.03"  | 2.06"  | -0.14" |
| Grintavec   | -6.93"  | -7.22"  | -1.48" | -5.57" | -2.58" | 0.78"  |
| Šeferjev h. | 3.73"   | 2.06"   | -1.14" | 2.24"  | 2.58"  | 3.90"  |
| Katarina    | -8.39"  | -8.25"  | -2.88" | 4.95"  | 2.58"  | -0.16" |
| Begunjščica | -9.51"  | -8.25"  | -2.26" | 0.93"  | 1.03"  | 0.58"  |
| Beleščica   | -2.78"  | -6.70"  | -2.66" | -0.63" | -2.58" | 0.41"  |
| T21         | -2.77"  | -6.19"  | -3.50" | 4.87"  | 4.13"  | -0.32" |
| T10         | -9.26"  | -5.16"  | -0.27" | 1.86"  | 2.58"  | 3.71"  |
| Jeruzalem   | 2.42"   | 1.03"   | -1.71" | 2.76"  | 2.58"  | 0.83"  |
| Uršlja Gora | 0.67"   | 1.55"   | -3.10" | 5.76"  | 3.61"  | 0.34"  |
| Golica      | 2.76"   | 4.13"   | -2.22" | 4.39"  | 3.61"  | 3.70"  |

se nadaljuje

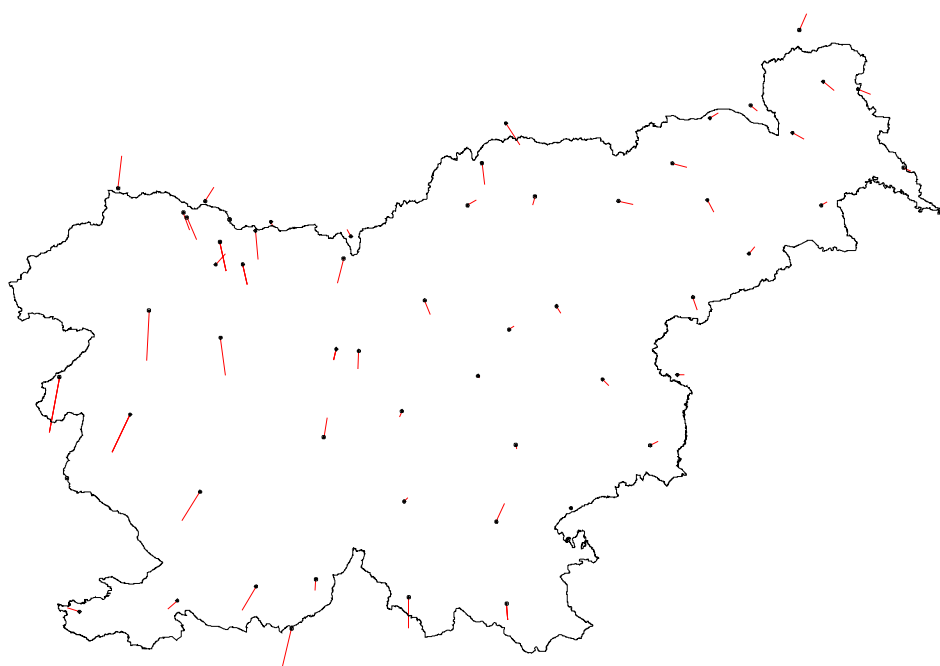
|                |        |        |        |        |        |        |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Žigertov V.    | -1.23" | -1.03" | -1.71" | 7.53"  | 6.19"  | 4.77"  |
| Grmada         | -2.37" | -3.61" | -2.01" | 3.60"  | 2.58"  | 1.82"  |
| Vel. Kopa      | -3.32" | -2.58" | 0.13"  | -1.56" | -1.03" | 2.71"  |
| D. Lend. g.    | 0.30"  | -1.03" | -1.45" | 1.66"  | 3.09"  | 5.35"  |
| Lokavec        | -0.39" | 1.55"  | -1.03" | 5.35"  | 3.61"  | 4.75"  |
| Kamenek        | -3.24" | -2.58" | -1.62" | 4.76"  | 4.64"  | 0.81"  |
| Dravograd      | -5.93" | -6.19" | -2.34" | -0.01" | 1.03"  | 2.69"  |
| Celje          | -0.97" | -2.06" | -1.85" | 2.42"  | 1.55"  | 0.48"  |
| Domžale        | -3.30" | -5.16" | -0.97" | -0.22" | -0.52" | 4.92"  |
| Murska So.     | -2.05" | -2.06" | -1.81" | 5.71"  | 4.64"  | 4.77"  |
| Maribor        | -2.38" | -1.03" | -4.07" | 7.32"  | 6.19"  | -3.75" |
| Ilir. Bistrica | -6.75" | -6.70" | -0.95" | -9.01" | -5.67" | 2.13"  |
| 402            | 6.46"  | 9.28"  | -4.02" | 1.10"  | 1.03"  | 0.34"  |
| 430            | 2.16"  | 4.64"  | -1.41" | 4.44"  | 3.09"  | 1.09"  |
| 431            | -6.73" | -6.19" | -1.33" | 8.67"  | 5.67"  | 2.42"  |
| 435            | -2.07" | -1.55" | -2.09" | 5.76"  | 2.58"  | 1.44"  |
| 691            | 2.24"  | 2.06"  | -2.00" | -0.44" | -1.55" | 1.10"  |
| 692            | -9.41" | -8.25" | -0.79" | 0.95"  | 1.03"  | 4.01"  |
| 693            | -0.03" | -1.03" | -1.27" | -3.23" | 0.52"  | 4.72"  |
| 694            | -3.07" | -6.70" | 0.15"  | -0.98" | -2.58" | 1.66"  |
| RITD           | -2.00" | -1.55" | -0.45" | 5.27"  | 5.16"  | 1.52"  |

Iz Preglednice 3 lahko vidimo, da med razlikami odklonov ni sistematičnih odstopanj.

Merjeni in izračunani odkloni imajo večinoma isti predznak po velikosti pa različno odstopajo. Odkloni, interpolirani iz EGM96, se bistveno bolj razlikujejo od merjenih vrednosti kot računani odkloni.



Slika 13: Grafična predstavitev merjenih odklonov navpičnic



Slika 14: Grafična predstavitev izračunanih odklonov na točkah z merjenimi odkloni

Iz grafične predstavitve merjenih (Slika 13) in računskih (Slika 14) odklonov na prvi pogled ne opazimo razlik. Če podrobno pogledamo posamezno točko, se velikost in smer nekaterih odklonov med seboj razlikujejo. To smo ugotovili že v Preglednici 3. Iz merjenih odklonov lahko vidimo, da so odkloni precej odvisni od reliefa. Na severovzhodu Slovenije so precej večji odkloni kot na vzhodu oz. severovzhodu. To razberemo tudi iz grafične predstavitve računskih odklonov.

## 9.2 Natančnost izračunanih odklonov

Natančnost izračunanih odklonov je zaradi uporabe približnih postopkov interpolacije in aproksimacije geoidne ploskve z ravnino težko določljiva. Ocenim jo lahko na podlagi merjenih vrednosti odklonov navpičnice, ki dosegajo natančnost okoli 0.3". Uporabimo naslednjo zvezo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-1}} \quad (60)$$

kjer je:  $\Delta = \xi_{\text{merjeno}} - \xi_{\text{izracunano}}$  ali  $\Delta = \eta_{\text{merjeno}} - \eta_{\text{izracunano}}$   
 $n$     število točk

Natančnost odklonov navpičnic, določenih iz točk, ki so od izhodiščne točke oddaljene 20 m, je podana v naslednji preglednici:

Preglednica 4: Natančnost izračunanih odklonov navpičnic

| $\sigma_{\xi}$ | $\sigma_{\eta}$ |
|----------------|-----------------|
| 1.804"         | 1.801"          |

Geoidne višine za izračun ravnine sem interpolirala iz grida geoidnih višin, kar je preprosta metoda, zato tudi ne najbolj natančna. Vendar je bil cilj naloge prav v tem, da na podlagi interpolacijskih geoidnih višin izračunam odklone navpičnice in na podlagi primerjave z

merjenimi odkloni ocenim njihovo natančnost in uporabnost. Natančnost okoli 2" se na prvi pogled pri tako majhnih vrednostih zdi velika. V nadaljevanju zato predstavljam uporabo izračunanih odklonov navpičnice na praktičnem primeru. S tem ugotavljam kakšne razlike dobimo z in brez upoštevanja računskih odklonov navpičnic.

## 10 PRIMER UPORABE IZRAČUNANIH ODKLONOV NAVPIČNIC

Dano imam mrežo štirih točk, med katerimi so bile na klasičen način opazovane dolžine, smeri in zenitne razdalje. Meritve so bile opravljene na terenskih vajah Fakultete za gradbeništvo in geodezijo leta 2007. Želela sem ugotoviti razlike med izravnavo mreže z uporabo odklonov navpičnic in brez uporabe odklonov. Izravnavo sem naredila v 3R prostoru z eno dano točko.

Pri določitvi položaja točke v 3R prostoru gre za pristop integrirane geodezije. To pomeni, da ne ločimo določitve položaja v vertikalnem in horizontalnem smislu, ampak skupaj obravnavamo vse tipe opazovanj, ne glede na njihovo odvisnost od težnostnega polja (Bogatin, 2001).

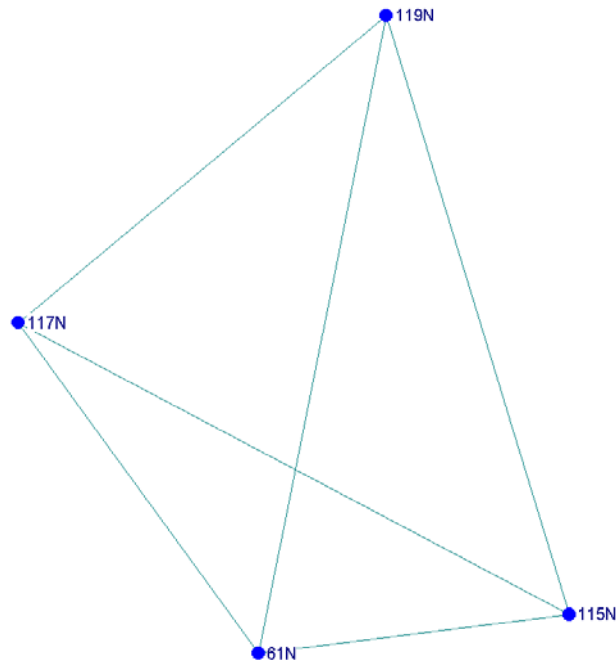
### 10.1 Podatki in programska oprema

Preglednica 5: Elipsoidne koordinate, geoidna višina ter odklona navpičnic vseh štirih točk mreže

| Točka 115N                          | Točka 117N                          | Točka 61N                           | Točka 119N                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\varphi = 45^{\circ}31'06.37884''$ | $\varphi = 45^{\circ}31'33.93064''$ | $\varphi = 45^{\circ}31'02.70755''$ | $\varphi = 45^{\circ}32'02.93144''$ |
| $\lambda = 13^{\circ}37'28.81747''$ | $\lambda = 13^{\circ}36'14.56870''$ | $\lambda = 13^{\circ}36'46.90409''$ | $\lambda = 13^{\circ}37'04.15632''$ |
| $h = 207.8025\text{m}$              | $h = 45.7445\text{m}$               | $h = 232.8546\text{m}$              | $h = 158.5828\text{m}$              |
| $N = 44.3637\text{m}$               | $N = 44.2971\text{m}$               | $N = 44.3347$                       | $N = 44.3225$                       |
| $\xi = -5.1566''$                   | $\xi = -4.641''$                    | $\xi = -4.641''$                    | $\xi = -5.1566''$                   |
| $\eta = 2.5783''$                   | $\eta = 2.5783''$                   | $\eta = 2.5783''$                   | $\eta = 3.094''$                    |

Izravnavo mreže sem izvedla s pomočjo programa Columbus. Uporabila sem elipsoid WGS84, saj se ne razlikuje veliko od GRS80 elipsoida, ki je pri nas po novem v veljavi. Ob uporabi GRS80 elipsoida tako ne bi dobili bistveno drugačnih rezultatov. Za izravnavo v 3R prostoru program zahteva ali dve dani točki ali opazovan azimut. Ker opazovanega azimuta nisem imela na voljo, smo ga na podlagi reševanja geodetske naloge izračunali iz koordinat. Uporabila sem azimut od točke 61N do točke 119N. To možnost smo uporabili, ker me pravzaprav ne zanimajo same koordinate, ampak razlika koordinat z in brez uporabe odklonov

navpičnic. Kot dano sem prevzela točko 61N<sup>9</sup>. Geoidne višine sem določila z interpolacijo iz grida geoidnih višin, odklone  $\xi$  in  $\eta$  z metodo ravnine.



Slika 15: Grafična ponazoritev mreže za izravnavo

## 10.2 Primerjava izravnanih koordinat mreže z in brez uporabe odklonov navpičnice

Preglednica 6: Izravnane elipsoidne koordinate

| Točka | Brez uporabe odklonov               | Z uporabo odklonov                  |
|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 115N  | $\varphi = 45^{\circ}31'06.37888''$ | $\varphi = 45^{\circ}31'06.37820''$ |
|       | $\lambda = 13^{\circ}37'28.81745''$ | $\lambda = 13^{\circ}37'28.81760''$ |
|       | $h = 207.81745 \text{ m}$           | $h = 207.78081 \text{ m}$           |
| 117N  | $\varphi = 45^{\circ}31'33.93067''$ | $\varphi = 45^{\circ}31'33.93111''$ |
|       | $\lambda = 13^{\circ}36'14.56841''$ | $\lambda = 13^{\circ}36'14.56962''$ |
|       | $h = 45.79214 \text{ m}$            | $h = 45.76424 \text{ m}$            |

se nadaljuje

<sup>9</sup> Opazovanja dolžin, zenitnih razdalj in smeri so podana v Prilogi C1 in C2.

|      |                                     |                                     |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 119N | $\varphi = 45^{\circ}32'02.93136''$ | $\varphi = 45^{\circ}32'02.93105''$ |
|      | $\lambda = 13^{\circ}37'04.15630''$ | $\lambda = 13^{\circ}37'04.15834''$ |
|      | $h = 158.62734 \text{ m}$           | $h = 158.61128 \text{ m}$           |

Preglednica 7: Odstopanje elipsoidnih koordinat z in brez uporabe odklonov

| Točka | Odstopanje z - brez             |
|-------|---------------------------------|
| 115N  | $\Delta\varphi = -0.00068''$    |
|       | $\Delta\lambda = 0.00015''$     |
|       | $\Delta h = -0.03664 \text{ m}$ |
| 117N  | $\Delta\varphi = 0.00044''$     |
|       | $\Delta\lambda = 0.00121''$     |
|       | $\Delta h = -0.0279 \text{ m}$  |
| 119N  | $\Delta\varphi = -0.00031''$    |
|       | $\Delta\lambda = 0.00204''$     |
|       | $\Delta h = -0.01606 \text{ m}$ |

Preglednica 8: Izravnane GK koordinate na WGS-84 elipsoidu

| Točka | Brez uporabe odklonov      | Z uporabo odklonov         |
|-------|----------------------------|----------------------------|
| 115N  | $x = 42977.921 \text{ m}$  | $x = 42977.900 \text{ m}$  |
|       | $y = 392552.997 \text{ m}$ | $y = 392552.999 \text{ m}$ |
| 117N  | $x = 43856.239 \text{ m}$  | $x = 43856.253 \text{ m}$  |
|       | $y = 390956.491 \text{ m}$ | $y = 390956.517 \text{ m}$ |
| 119N  | $x = 44732.861 \text{ m}$  | $x = 44732.851 \text{ m}$  |
|       | $y = 392047.877 \text{ m}$ | $y = 392047.921 \text{ m}$ |

Preglednica 9: Odstopanje GK koordinat na WGS-84 z in brez uporabe odklonov

| Točka | Odstopanje $z$ - brez |
|-------|-----------------------|
| 115N  | $\Delta x = -0.021$ m |
|       | $\Delta y = 0.002$ m  |
| 117N  | $\Delta x = 0.014$ m  |
|       | $\Delta y = 0.026$ m  |
| 119N  | $\Delta x = -0.01$ m  |
|       | $\Delta y = 0.034$ m  |

Iz zgornjih preglednic lahko vidimo, da v izravnavi dane mreže z uporabo odklonov navpičnic dobimo drugačne rezultate kot brez uporabe odklonov. Če pogledamo GK koordinate, ki so v metrih in zato lažje predstavljive, so razlike v koordinatah (ravninske in elipsoidna višina) od 2 mm pa do 3.6 cm. Zavedati se moramo, da je mreža majhna, vendar so višinske razlike kar velike. Izračunani odkloni so okoli 2" do 5". Lahko sklepamo, da bi v primeru večje mreže, kjer bi bile še večje razlike nadmorskih višin in s tem večji odkloni navpičnic, dobili tudi večje razlike v koordinatah.

## 11 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi smo ugotovili, da v vsakdanji geodetski praksi zaradi neuporabe odklonov navpičnic delamo napake. Pri tem se seveda postavi vprašanje ali je napaka tako velika, da bi jo morali upoštevati. Iz primera, ki je predstavljen v diplomski nalogi, vidimo, da je napaka zaradi neuporabe odklonov navpičnic pri manjši mreži okoli 2 cm. Katastrske meritve in meritve za potrebe gradnje stanovanjskih in drugih prostorov zahteva natančnost 4 cm. Očitno je, da v primeru takih meritev, ki zavzemajo manjše območje in v glavnem enakomeren teren, upoštevanje odklonov navpičnic ne bi bilo smiselno.

V primeru zahtevnejših meritev, recimo tunelov, viaduktov, kompleksnih objektov, meritev v večjih nadmorskih višinah ali kontrolnih meritvah, kjer je večkrat zahtevana mm natančnost, lahko zaradi neupoštevanja odklonov navpičnic naredimo napako, ki bi precej vplivala na pravilnost meritev oziroma kakovost objekta.

Z letom 2008, ko Slovenija prehaja na nov koordinatni sistem, sprejemamo tudi nov referenčni elipsoid GRS 80, ki je globalni elipsoid in se najbolj prilega celotni Zemlji. Prej je bil v veljavi Besselov elipsoid, ki se najbolje prilega Srednji Evropi. Geoidna višina v primeru Besselovega elipsoida je bila na območju Slovenije od -3 m do +3 m, kar pomeni, da so bili tudi odkloni navpičnic majhni in zato zanemarljivi. S spremembo elipsoida so se geoidne višine povečale na 44 m do 49 m in s tem tudi odkloni navpičnic. GRS 80 elipsoid se najbolj prilega celotni Zemlji, zato lokalno precej bolj odstopa. Če na novem elipsoidu računamo z opazovanji, ki jih ne reduciramo na referenčni elipsoid, naredimo sedaj večjo napako kot smo jo v primeru lokalnega elipsoida (Featherstone, 2000). Ta podatek ne bi smeli zanemariti v geodetskih meritvah višje natančnosti.

V diplomski nalogi smo ugotovili, da lahko odklone navpičnic izračunamo na številne načine. Z uporabo gravimetričnih meritev, z astrogeodetskimi meritvami, iz globalnih geopotencialnih modelov, iz primerjave koordinat  $\Phi$ ,  $\Lambda$  in  $\varphi$ ,  $\lambda$  ter z interpolacijsko ploskvijo, ki je bila predstavljena v diplomski nalogi. Odkloni navpičnic, ki jih določimo iz globalnih geopotencialnih modelov, ne dosegajo dovolj visoke natančnosti na lokalni ravni. Ostale metode so odvisne od posebnih merskih naprav, od dolgotrajnih meritev ali oboje. Iz

teh razlogov bi bila uporaba interpolacijske metode smiselna, saj zahteva le grid geoidnih višin za določeno območje, nadaljevanje pa je računski postopek, ki se ga lahko vgradi v programsko okolje. Postavi se vprašanje, ali bi bila natančnost interpoliranih odklonov dovolj visoka za vse uporabnike. Iz grafičnega prikaza odklonov lahko vidimo, da računski odkloni prikazujejo povezavo z nadmorsko višino in kažejo v isto smer kot merjeni odkloni. Računske odklone žal nismo mogli primerjati z merjenimi odkloni na mejnih območjih Hrvaške in Avstrije, saj je geoidni model Slovenije podan točno do meje. Iz tega izhaja tudi slabša natančnost računskih odklonov navpičnic. Vseeno menim, da bi bila uporaba teh odklonov boljša izbira, kot da jih sploh ne bi uporabili. Pri tem je pomembna tudi kritičnost uporabnikov, ki bi glede na izkušnje ocenili pravilnost odklonov navpičnic v posamezni točki.

V Sloveniji je trenutno problematično to, da so bile za izračun obstoječega geoida uporabljene nadmorske višine, ki ne ustrezajo novim uradnim višinam, saj je bil geoid določen pred novim preračunom višin reperjev v Sloveniji leta 2000. Nova višinska referenčna ploskev v Sloveniji še ni določena. Smiselno bi bilo računske odklone določiti iz novega geoidnega modela Slovenije, ko bo ta določen. Z natančnejšim geoidnim modelom, ki bi bil podan tudi prek mej države, bi se izboljšala tudi natančnost računskih odklonov navpičnic.

## VIRI

Bogatin, S. 2001. Izravnava terestričnih in GPS- opazovanj v globalnem koordinatnem sistemu. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 95 str.

Columbus 3.7 - navodila za uporabo programa, Bestfit Computing.

<http://www.bestfit.com/docum.shtml> (3.2.2008)

Featherstone, E. W. 1999. The Use and Abuse of Vertical Deflections. V: Sixth South East Asian Surveyors' Congress, Fremantle, Western Australia: 86-97.

Featherstone, E. W., Rüger M. J. 2000. The Importance of Using Deviations of the Vertical for Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum. The Australian Surveyor, 45, 2: 46-59.

## GURS

[http://www.gu.gov.si/fileadmin/gu.gov.si/pageuploads/ogs/nov\\_drz\\_koord\\_sist/Novi\\_drzavn\\_koordinatni\\_sistem\\_PR.pdf](http://www.gu.gov.si/fileadmin/gu.gov.si/pageuploads/ogs/nov_drz_koord_sist/Novi_drzavn_koordinatni_sistem_PR.pdf) (07.03.2008).

## IZS

[http://www.izs.si/FILEADMIN/DOKUMENTI/STROKOVNI\\_IZPITI/MSGEO/OSNOVNI\\_GEODETSKI\\_SISTEM.PDF](http://www.izs.si/FILEADMIN/DOKUMENTI/STROKOVNI_IZPITI/MSGEO/OSNOVNI_GEODETSKI_SISTEM.PDF) (13.12.2007).

Koler B., Medved K., Kuhar M. 2007. Uvajanje sodobnega višinskega sistema v Sloveniji. Ljubljana, Geodetski vestnik 51, 4: 777-792.

Kuhar, M. 1996. Raziskave ploskve geoida v Sloveniji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 91-116.

Kuhar, M. 2007. Geofizika, študijski pripomoček. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

[http://www.fgg.uni-lj.si/~mkuhar/Zalozba/Geofizika\\_skripta.pdf](http://www.fgg.uni-lj.si/~mkuhar/Zalozba/Geofizika_skripta.pdf) (05.03.2008).

Kuhar, M., Prešeren, P. 2000. Evropski in globalni model geoida na območju Slovenije. Ljubljana, Geodetski vestnik, 44, 3: 177-184.

Kuhn, M. 2003. Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information. Journal of Geodesy 77: 50-65.

<http://www.springerlink.com/content/515hkwt7y61w6/fulltext.pdf> (06.12.2007).

MATLAB

<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc> (3.2.2008).

Natural Resources Canada. Geological Survey of Canada, Gravity, Theory.

[http://gsc.nrcan.gc.ca/gravity/theory\\_e.php](http://gsc.nrcan.gc.ca/gravity/theory_e.php) (05.12.2007).

Pribičević, B. 2001. Uporaba geološko - geofizičnih in geodetskih baz podatkov za računanje ploskve geoida Republike Slovenije. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 179 str.

Pribičević, B. 1999. Nov preračun geoida Republike Slovenije. Magistrska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 102 str.

RIJEČNIK

<http://www.geof.hr/~zhecimovic/Rjecnik/Rjecnik.htm#K> (22.02.2008).

Stopar, B. 2007. Vzpostavitev ESRS v Sloveniji. Ljubljana, Geodetski vestnik, 51, 4: 763-776.

Stopar, B. 2006. Višja geodezija III, zapiski s predavanj. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Torge, W. 2001. Geodesy. Berlin, New York, Walter de Gruyter: 350 str.

Vaniček, P., Krakiwsky, E. Geodesy – the concept. 1986. 2. izdaja. Amsterdam. Elsevier: 697.

Wenzel, G. 1999. Global Models of the Gravity Field of High and Ultra - High Resolution. predavanje pripravljeno za Third International School on "THE DETERMINATION AND USE OF THE GEOID" Milano 15.-19. Februar 1999: 37 str.

#### WIKIPEDIA

[http://sl.wikipedia.org/wiki/Mohorovi%C4%8Di%C4%87eva\\_diskontinuiteta](http://sl.wikipedia.org/wiki/Mohorovi%C4%8Di%C4%87eva_diskontinuiteta) (05.03.2008).

[http://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear\\_interpolation](http://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation) (20.02.2008).

## PRILOGE

### *Priloga A1: Elipsoidne koordinate točk v Sloveniji z merjenimi odkloni navpičnic*

| Ime točke   | $\varphi$ [°] | $\lambda$ [°] |
|-------------|---------------|---------------|
| Pliš        | 45.469336     | 14.365686     |
| Malija      | 45.503792     | 13.643386     |
| Debeli Vrh  | 45.531194     | 15.097744     |
| Slavnik     | 45.533900     | 13.975933     |
| Cerk        | 45.546356     | 14.764331     |
| Snežnik     | 45.588481     | 14.447600     |
| Vel. Rigelj | 45.727558     | 15.062936     |
| Gorjanci    | 45.759769     | 15.318183     |
| Sveťa Ana   | 45.775597     | 14.747653     |
| Nanos       | 45.795136     | 14.049139     |
| Kremenjak   | 45.823372     | 13.592431     |
| Brežice     | 45.908889     | 15.591000     |
| Zglavnica   | 45.911231     | 15.129861     |
| Krim        | 45.928528     | 14.471100     |
| Mrzovec     | 45.978111     | 13.805681     |
| Kucelj      | 45.991953     | 14.738881     |
| Korada      | 46.064942     | 13.560606     |
| Javornik    | 46.067733     | 15.428364     |
| Orljek      | 46.076658     | 15.000531     |
| Kumrovec    | 46.077183     | 15.685883     |
| Rašica      | 46.139767     | 14.512117     |
| Blegoš      | 46.164819     | 14.113506     |
| Mrzlica     | 46.187522     | 15.107453     |
| Rodica      | 46.227711     | 13.865244     |
| Vivodnik    | 46.257419     | 14.816283     |
| Donačka g.  | 46.262711     | 15.742333     |
| Hom         | 46.339914     | 14.093772     |
| JBT         | 46.340881     | 14.187372     |
| Grintavec   | 46.357103     | 14.535414     |

| Ime točke      | $\varphi$ [°] | $\lambda$ [°] |
|----------------|---------------|---------------|
| Šeferjev h.    | 46.365658     | 15.937003     |
| Katarina       | 46.394236     | 14.107564     |
| Begunjščica    | 46.421672     | 14.229892     |
| Beleščica      | 46.448269     | 14.140278     |
| T21            | 46.451739     | 13.991456     |
| T10            | 46.463383     | 13.979844     |
| Jeruzalem      | 46.479008     | 16.189783     |
| Uršlja Gora    | 46.485064     | 14.963981     |
| Golica         | 46.491456     | 14.054631     |
| Žigertov V.    | 46.494458     | 15.487092     |
| Grmada         | 46.495194     | 15.795053     |
| Vel. Kopa      | 46.506678     | 15.198061     |
| D. Lend. g.    | 46.565889     | 16.476914     |
| Lokavec        | 46.691417     | 15.806931     |
| Kamenek        | 46.775208     | 16.202922     |
| Dravograd      | 46.586308     | 15.013886     |
| Celje          | 46.243158     | 15.271231     |
| Domžale        | 46.135658     | 14.589611     |
| Murska So.     | 46.653631     | 16.093297     |
| Maribor        | 46.583908     | 15.675031     |
| Ilir. Bistrica | 45.569806     | 14.243658     |
| 402            | 46.519300     | 13.752169     |
| 430            | 46.899631     | 16.122331     |
| 431            | 46.681819     | 15.097181     |
| 435            | 46.720850     | 15.949161     |
| 691            | 46.410139     | 14.560169     |
| 692            | 46.421631     | 14.229919     |
| 693            | 46.443531     | 14.283311     |
| 694            | 46.448219     | 14.140331     |
| RITD           | 46.755844     | 16.323525     |

***Priloga B1: Programska koda (Matlab) za interpolacijo geoidnih višin na območju Slovenije***

```
function [N] = intergxy()

%funkcija interpolira vrednosti v geoidnem modelu Slovenije
%avtor B.Pribicevic (2000), vendar nekoliko spremenjeno
%vhodna podatka Ygk in Xgk (na elipsoidu GRS 80)
%koordinate morajo biti podane s vsemi stevkami:
%Y s številko cone 5, X s 5 (pet mio. km od ekvatorja)
%program vrne interpolirano geoidno visino
%metoda interpolacije: bilinearna

visina = fopen('N.txt','w');
dolzina = fopen('la.txt','w');
sirina = fopen('fi.txt','w');
iks = fopen('la_grid.txt','w');
epsilon = fopen('fi_grid.txt','w');
mreza = fopen('mreza.txt','w');

grid = load('gridyx.dat');

Ygk = grid(:,1);
Xgk = grid(:,2);

[fi,la]=gk2bl(Ygk,Xgk,'grs80');

for i=size(fi,1):-1:1
    if (fi(i) < 45.25)|(fi(i) > 47)|(la(i) < 13.25)|(la(i) > 16.75)
        fi(i)=[];
        la(i)=[];
    end
end

load ('geoid_slo.mat');    %nalozi geoidni model

for i=1:size(geoid,1)
    for j=1:size(geoid,2)
        if geoid(i,j)==0
            geoid(i,j)=NaN;
        end
    end
end
geoid;

X=13.25:(1.5/60):16.75;    %določitev gridnih točk
Y=45.25:(1/60):47;

N=interp2(dec2rad(X),dec2rad(Y),geoid,dec2rad(la),dec2rad(fi),'linear');
%interpolacija

dlmwrite('N.txt',N,'\t');
dlmwrite('la.txt',la,'\f');
dlmwrite('fi.txt',fi,'\f');
dlmwrite('la_grid.txt',X,'\t');
dlmwrite('fi_grid.txt',Y,'\t');
```

***Priloga B2: Programska koda (Matlab) za določitev geoidne ravnine (in s tem odklonov navpičnic) z izravnavo***

```
%posredna izravnavo
n=4;
n0=3;

grid = load('gridyx.dat');

Ygk = grid(:,1);
Xgk = grid(:,2);

[fi, la]=gk2bl(Ygk,Xgk, 'grs80');

for i=size(fi,1):-1:1
    if (fi(i) < 45.25)|(fi(i) > 47)|(la(i) < 13.25)|(la(i) > 16.75)
        fi(i)=[];
        la(i)=[];
    end
end

[Y,X]=bl2gk(fi, la, 15, 'grs80');

grid2=[Y,X];

x=grid2;
x(:,1)=[];
y=grid2;
y(:,2)=[];

%4 tocke okoli gridne tocke
X=-[x+20,x,x,x-20];
Y=-[y,y+20,y-20,y];

%težišče mreže 4 tock okoli gridne tocke
Y0=sum(Y,2)/n;
X0=sum(X,2)/n;

%%Preracun vseh tock glede na težišče
x_s=X;
x_s(:,2)=[];
x_s(:,2)=[];
x_s(:,2)=[];

x_v=X;
x_v(:,1)=[];
x_v(:,2)=[];
x_v(:,2)=[];

x_z=X;
x_z(:,1)=[];
x_z(:,1)=[];
x_z(:,2)=[];

x_j=X;
```

```
x_j(:,1)=[];  
x_j(:,1)=[];  
x_j(:,1)=[];  
  
y_s=Y;  
y_s(:,2)=[];  
y_s(:,2)=[];  
y_s(:,2)=[];  
  
y_v=Y;  
y_v(:,1)=[];  
y_v(:,2)=[];  
y_v(:,2)=[];  
  
y_z=Y;  
y_z(:,1)=[];  
y_z(:,1)=[];  
y_z(:,2)=[];  
  
y_j=Y;  
y_j(:,1)=[];  
y_j(:,1)=[];  
y_j(:,1)=[];  
  
x1=x_s-X0;  
x2=x_v-X0;  
x3=x_z-X0;  
x4=x_j-X0;  
  
y1=y_s-Y0;  
y2=y_v-Y0;  
y3=y_z-Y0;  
y4=y_j-Y0;  
  
x_k=[x1,x2,x3,x4];  
y_k=[y1,y2,y3,y4];  
  
%%Geoidne višine 4 točk okoli gridne točke  
  
koeficienti = fopen('delta.txt','w');  
popravki = fopen('v1.txt','w');  
natancnost = fopen('sigma.txt','w');  
koeficienti_dms = fopen('eta_dms.txt','w');  
koeficienti_dms = fopen('ksi_dms.txt','w');  
  
N_s = load('N_s.txt');  
N_v = load('N_v.txt');  
N_z = load('N_z.txt');  
N_j = load('N_j.txt');  
  
N_k = [N_s,N_v,N_z,N_j];  
  
delta = zeros(size(x_k,1),3);  
v = zeros(size(x_k,1),4);  
sigma = zeros(size(x_k,1),1);  
  
for i=1:1:size(N_k,1)  
    B=[y_k(i,1) x_k(i,1) 1
```

```
        y_k(i,2) x_k(i,2) 1
        y_k(i,3) x_k(i,3) 1
        y_k(i,4) x_k(i,4) 1];
        f=N_k(i,:)' ;
        N=B'*B;
        t=B'*f;
        delta(i,:)=(inv(N)*t)';
        v(i,:)=(f-B*delta(i,:))';
        sigma(i,:)=sqrt((v(i,:)*v(i,:)))/(4-3));
end

dlmwrite('delta.txt',delta,'\t');
dlmwrite('v1.txt',v,'\t');
dlmwrite('sigma.txt',sigma,'\t');

delta1=delta;
delta1(:,2)=[];
delta1(:,2)=[];
delta2=rad2dms(delta1);

dlmwrite('eta_dms.txt',delta2,'\t');

delta_1=delta;
delta_1(:,1)=[];
delta_1(:,2)=[];
delta3=rad2dms(delta_1);

dlmwrite('ksi_dms.txt',delta3,'\t');
```

**Priloga C1: Rezultati izravnave mreže Fiesa brez uporabe odklonov navpičnic**

COLUMBUS 3D Geodetic Network Adjustment Software

COLUMBUS: Demo - Ver 3.6.2.36  
Report File: D:\marta\diploma\racunski\_primer\rezultati\_fiesa.txt  
Project: D:\marta\diploma\racunski\_primer mreza\_fiesa.txt  
DATE: 03/08/2008 TIME: 15:13:05

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Hgt Update : Ortho Hgt Update (fix ghgt, float ellip hgt)  
Settings : Geoid Hgt Update (float ortho, fix ellip hgt)  
: Ellip Hgt Update (fix ortho, float geoid hgt)

3D GEODETIC NETWORK ADJUSTMENT SUMMARY

|                    |         |                                    |                              |
|--------------------|---------|------------------------------------|------------------------------|
| Datum              | WGS 84  | 1D Expansion Factor                | 1.95937                      |
| Linear Units       | Meters  | 2D Expansion Factor                | 2.44788                      |
| Angular Units      | Degrees | 3D Expansion Factor                | 2.79532                      |
| Field Observations | 37      | A Priori Variance                  | 1.00000                      |
| Coord Observations | 0       | A Posteriori Variance              | 1.16549                      |
| TOTAL OBSERVATIONS | 37      | Confidence Level                   | 95.0                         |
|                    |         | Chi Square Test On Variance Factor | 0.711 < 1.0 < 2.256 (Passes) |
| Num Stations       | 4       | Variance Factor Used               | 1.16549                      |
| Fixed In 1D        | 0       | No Check Observations              | 0                            |
| Fixed In 2D        | 0       | Stan Res Rejections                | 0                            |
| Fixed In 3D        | 1       | ( Tau Stat = 2.959 )               |                              |
| Float Coord Parms  | 9       | Resid/SD Rejections                | 0                            |
| Direction Parms    | 4       | Residual Rejections                | 0                            |
| Scale Parms        | 0       | TOTAL OUTLIER OBS                  | 0                            |
| Rotation Parms N   | 0       |                                    |                              |
| Rotation Parms E   | 0       | Iterations                         | 2                            |
| Rotation Parms Up  | 0       | Convergence Criteria               | 0.0010000                    |
| TOTAL PARMS        | 13      | Zenith Angle Refraction            | 0.00000                      |
|                    |         | Rotate Bearings                    | No                           |
| DEGREES OF FREEDOM | 24      | Use Full Covariance                | Yes                          |

| A-POSTERIORI VARIANCE (and STAN DEV) FACTOR (by observation type) |       |                                   |                   |                 |                |
|-------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------|-------------------|-----------------|----------------|
| Obs Type                                                          | Count | Sum of Squared Weighted Residuals | Redundancy (D.F.) | A-Post Variance | A-Post StanDev |
| Azimuth                                                           | 1     | 0.000                             | 0.000             | 0.000           | 0.000          |
| Direct                                                            | 12    | 6.904                             | 7.840             | 0.881           | 0.938          |
| Zenith                                                            | 12    | 18.949                            | 9.024             | 2.100           | 1.449          |
| Chord                                                             | 12    | 2.118                             | 7.136             | 0.297           | 0.545          |
| TOTALS                                                            | 37    | 27.972                            | 24.000            | 1.165           | 1.080          |

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Hgt Update : Ortho Hgt Update (fix ghgt, float ellip hgt)  
Settings : Geoid Hgt Update (float ortho, fix ellip hgt)  
: Ellip Hgt Update (fix ortho, float geoid hgt)

Adjusted Coordinates

| Station     |   |                | Covariance Matrix |              |             |  |
|-------------|---|----------------|-------------------|--------------|-------------|--|
| 115N        |   |                |                   |              |             |  |
| Latitude    | N | 45-31-06.37888 | 0.000104052       |              |             |  |
| Longitude   | E | 13-37-28.81745 | -0.000008405      | 0.000008453  |             |  |
| Ellip Hgt   |   | 207.75998      | 0.000001981       | -0.000000158 | 0.000034903 |  |
| 117N        |   |                |                   |              |             |  |
| Latitude    | N | 45-31-33.93067 | 0.000064971       |              |             |  |
| Longitude   | E | 13-36-14.56841 | 0.000076495       | 0.000109963  |             |  |
| Ellip Hgt   |   | 45.79214       | 0.000004356       | -0.000003397 | 0.000046868 |  |
| 119N        |   |                |                   |              |             |  |
| Latitude    | N | 45-32-02.93136 | 0.000022285       |              |             |  |
| Longitude   | E | 13-37-04.15630 | -0.000074895      | 0.000379090  |             |  |
| Ellip Hgt   |   | 158.62734      | 0.000002265       | 0.000000460  | 0.000066495 |  |
| 61N         |   |                |                   |              |             |  |
| F Latitude  | N | 45-31-02.70755 | 0.000000000       |              |             |  |
| F Longitude | E | 13-36-46.90409 | 0.000000000       | 0.000000000  |             |  |
| F Ellip Hgt |   | 232.85460      | 0.000000000       | 0.000000000  | 0.000000000 |  |

F - Fixed Component

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Hgt Update : Ortho Hgt Update (fix ghgt, float ellip hgt)  
Settings : Geoid Hgt Update (float ortho, fix ellip hgt)  
: Ellip Hgt Update (fix ortho, float geoid hgt)

Adjusted State Plane Coordinates (Zone: UD Transverse Mercator,,,TM)

| Station | North       | SD    | East       | SD    | Ellip Hgt | SD    |
|---------|-------------|-------|------------|-------|-----------|-------|
| 115N    | 5042977.921 | 0.010 | 392552.997 | 0.003 | 207.760   | 0.006 |
| 117N    | 5043856.239 | 0.008 | 390956.491 | 0.010 | 45.792    | 0.007 |
| 119N    | 5044732.861 | 0.005 | 392047.877 | 0.019 | 158.627   | 0.008 |
| 3 61N   | 5042880.235 | 0.000 | 391641.468 | 0.000 | 232.855   | 0.000 |

1 - 1D Fixed 2 - 2D Fixed 3 - 3D Fixed

| Station | Grid SF      | Height SF    | Combined SF  | Map Ang      |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 115N    | 1.0000418979 | 0.9999674280 | 1.0000093246 | -0-58-52.886 |
| 117N    | 1.0000461459 | 0.9999928209 | 1.0000389664 | -0-59-46.347 |
| 119N    | 1.0000432347 | 0.9999751309 | 1.0000183646 | -0-59-11.442 |
| 61N     | 1.0000443158 | 0.9999634938 | 1.0000078080 | -0-59-22.737 |

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Geodetic Coordinate Differences

| Station | 1D Diff  | 2D Diff | 3DDiff  | Latitude | Longitude |
|---------|----------|---------|---------|----------|-----------|
| 115N    | -0.04252 | 0.00115 | 0.04254 | 0.00110  | -0.00033  |
| 117N    | 0.04764  | 0.00646 | 0.04807 | 0.00089  | -0.00640  |
| 119N    | 0.04454  | 0.00263 | 0.04461 | -0.00258 | -0.00051  |
| 61N     | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000   |

WGS 84            Major = 6378137.0000    1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Adjusted Observations (Mark To Mark)

Standardized Residual Rejection Constant ( Tau Stat )    = 2.95948  
Residual / A Priori Stan Dev Rejection Constant        = 5.00000  
Residual Rejection Constants For Each Observation Type  
  Azimuth                                                        = 10.000  
  Direct                                                          = 10.000  
  Zenith                                                          = 10.000  
  Chord                                                           = 1.00000

| Obs Type | Num Obs | Default SD | Scaler       |
|----------|---------|------------|--------------|
| Azimuth  | 1       | 0.000      |              |
| Direct   | 12      | 3.000      |              |
| Zenith   | 12      | 2.000      |              |
| Chord    | 12      | 0.00400    | 1.0000000000 |

| Default Instrument/Target Centering Errors |            |          |
|--------------------------------------------|------------|----------|
| Obs Set Type                               | Horizontal | Vertical |
| Az/Zen/Chord                               | 0.00000    | 0.00000  |
| Dir/Zen/Chord                              | 0.00000    | 0.00000  |
| Bearing/HorDist                            | 0.00000    | 0.00000  |
| HorAng/Zen/Chord                           | 0.00000    | 0.00000  |
| Hgt Diff                                   | 0.00000    | 0.00000  |
| GPS XYZ                                    | 0.00000    | 0.00000  |
| Local NEU                                  | 0.00000    | 0.00000  |

Default PPM Corrections

| Obs Type   | PPM     |
|------------|---------|
| Chord Dist | 0.00000 |
| Horiz Dist | 0.00000 |

| Stations | Observations           | SD     | Resid    | Stan Res |
|----------|------------------------|--------|----------|----------|
|          |                        | SD     | Resid SD | Resid/SD |
| AT 115N  | Direct 34-56-04.000    | 3.0000 | -0.2426  | -0.0922  |
|          | Corrected 34-56-04.000 | 3.0000 |          |          |
| T0 117N  | Adjusted 34-56-03.757  | 1.8883 | 2.6313   | -0.0809  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.66     |
| AT 115N  | Zenith 95-05-29.000    | 2.0000 | -1.5506  | -0.7832  |
|          | Corrected 95-05-17.773 | 2.0000 |          |          |
| T0 117N  | Adjusted 95-05-16.223  | 0.8619 | 1.9796   | -0.7753  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.84     |
| AT 115N  | Chord 1829.31400       | 0.0040 | -0.0022  | -0.6244  |
|          | Corrected 1829.30471   | 0.0040 |          |          |
| T0 117N  | Adjusted 1829.30254    | 0.0026 | 0.0035   | -0.5417  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.65     |
| AT 115N  | Direct 80-03-35.000    | 3.0000 | -0.3804  | -0.1451  |
|          | Corrected 80-03-35.000 | 3.0000 |          |          |
| T0 119N  | Adjusted 80-03-34.620  | 1.9013 | 2.6219   | -0.1268  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.66     |
| AT 115N  | Zenith 91-32-44.000    | 2.0000 | 2.1263   | 1.0965   |
|          | Corrected 91-32-55.627 | 2.0000 |          |          |

|    |      |           |               |                      |         |                 |
|----|------|-----------|---------------|----------------------|---------|-----------------|
| TO | 119N | Adjusted  | 91-32-57.753  | 0.9493<br>Redundancy | 1.9393  | 1.0632<br>0.81  |
| AT | 115N | Chord     | 1826.81900    | 0.0040               | 0.0019  | 0.5979          |
|    |      | Corrected | 1826.82130    | 0.0040               |         |                 |
| TO | 119N | Adjusted  | 1826.82324    | 0.0029<br>Redundancy | 0.0032  | 0.4843<br>0.56  |
| AT | 115N | Direct    | 0-00-00.000   | 3.0000               | 0.6229  | 0.2391          |
|    |      | Corrected | 0-00-00.000   | 3.0000               |         |                 |
| TO | 61N  | Adjusted  | 0-00-00.623   | 1.9246<br>Redundancy | 2.6049  | 0.2076<br>0.65  |
| AT | 115N | Zenith    | 88-25-40.000  | 2.0000               | 1.8617  | 1.0938          |
|    |      | Corrected | 88-26-08.102  | 2.0000               |         |                 |
| TO | 61N  | Adjusted  | 88-26-09.964  | 1.3285<br>Redundancy | 1.7021  | 0.9309<br>0.62  |
| AT | 115N | Chord     | 917.08600     | 0.0040               | 0.0010  | 0.3194          |
|    |      | Corrected | 917.08234     | 0.0040               |         |                 |
| TO | 61N  | Adjusted  | 917.08338     | 0.0028<br>Redundancy | 0.0033  | 0.2622<br>0.58  |
| AT | 117N | Direct    | 67-35-21.000  | 3.0000               | 1.7041  | 0.6475          |
|    |      | Corrected | 67-35-21.000  | 3.0000               |         |                 |
| TO | 115N | Adjusted  | 67-35-22.704  | 1.8876<br>Redundancy | 2.6318  | 0.5680<br>0.66  |
| AT | 117N | Zenith    | 84-55-33.000  | 2.0000               | -1.5826 | -0.7994         |
|    |      | Corrected | 84-55-44.227  | 2.0000               |         |                 |
| TO | 115N | Adjusted  | 84-55-42.644  | 0.8619<br>Redundancy | 1.9796  | -0.7913<br>0.84 |
| AT | 117N | Chord     | 1829.31200    | 0.0040               | -0.0002 | -0.0481         |
|    |      | Corrected | 1829.30271    | 0.0040               |         |                 |
| TO | 115N | Adjusted  | 1829.30254    | 0.0026<br>Redundancy | 0.0035  | -0.0417<br>0.65 |
| AT | 117N | Direct    | 0-00-00.000   | 3.0000               | -0.0018 | -0.0007         |
|    |      | Corrected | 0-00-00.000   | 3.0000               |         |                 |
| TO | 119N | Adjusted  | 359-59-59.998 | 1.9145<br>Redundancy | 2.6123  | -0.0006<br>0.65 |
| AT | 117N | Zenith    | 85-23-27.000  | 2.0000               | -4.6782 | -2.5710         |
|    |      | Corrected | 85-23-56.715  | 2.0000               |         |                 |
| TO | 119N | Adjusted  | 85-23-52.037  | 1.1624<br>Redundancy | 1.8196  | -2.3391<br>0.71 |
| AT | 117N | Chord     | 1404.37100    | 0.0040               | -0.0013 | -0.4110         |
|    |      | Corrected | 1404.35433    | 0.0040               |         |                 |
| TO | 119N | Adjusted  | 1404.35303    | 0.0029<br>Redundancy | 0.0032  | -0.3254<br>0.54 |
| AT | 117N | Direct    | 93-42-39.000  | 3.0000               | -1.7024 | -0.6512         |
|    |      | Corrected | 93-42-39.000  | 3.0000               |         |                 |
| TO | 61N  | Adjusted  | 93-42-37.298  | 1.9118<br>Redundancy | 2.6142  | -0.5675<br>0.65 |
| AT | 117N | Zenith    | 81-04-44.000  | 2.0000               | -0.8670 | -0.4793         |
|    |      | Corrected | 81-05-21.979  | 2.0000               |         |                 |
| TO | 61N  | Adjusted  | 81-05-21.112  | 1.1793<br>Redundancy | 1.8086  | -0.4335<br>0.70 |
| AT | 117N | Chord     | 1206.97600    | 0.0040               | -0.0008 | -0.2399         |

|    |      |                       |                                |                                |         |                 |
|----|------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------|-----------------|
| TO | 61N  | Corrected<br>Adjusted | 1206.94081<br>1206.94000       | 0.0040<br>0.0026<br>Redundancy | 0.0034  | -0.2046<br>0.62 |
| AT | 119N | Direct                | 0-00-00.000                    | 3.0000                         | -3.0596 | -1.1617         |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 0-00-00.000<br>359-59-56.940   | 3.0000<br>1.8850<br>Redundancy | 2.6337  | -1.0199<br>0.66 |
| AT | 119N | Zenith                | 88-28-13.000                   | 2.0000                         | 0.0064  | 0.0033          |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 88-28-01.373<br>88-28-01.380   | 2.0000<br>0.9493<br>Redundancy | 1.9393  | 0.0032<br>0.81  |
| AT | 119N | Chord                 | 1826.82100                     | 0.0040                         | -0.0001 | -0.0193         |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 1826.82330<br>1826.82324       | 0.0040<br>0.0029<br>Redundancy | 0.0032  | -0.0157<br>0.56 |
| AT | 119N | Direct                | 67-17-06.000                   | 3.0000                         | -2.6101 | -0.9926         |
| TO | 117N | Corrected<br>Adjusted | 67-17-06.000<br>67-17-03.390   | 3.0000<br>1.8906<br>Redundancy | 2.6297  | -0.8700<br>0.66 |
| AT | 119N | Zenith                | 94-37-24.000                   | 2.0000                         | -0.9232 | -0.5074         |
| TO | 117N | Corrected<br>Adjusted | 94-36-54.139<br>94-36-53.216   | 2.0000<br>1.1624<br>Redundancy | 1.8196  | -0.4616<br>0.71 |
| AT | 119N | Chord                 | 1404.36700                     | 0.0040                         | 0.0028  | 0.8775          |
| TO | 117N | Corrected<br>Adjusted | 1404.35025<br>1404.35303       | 0.0040<br>0.0029<br>Redundancy | 0.0032  | 0.6947<br>0.54  |
| AT | 119N | Direct                | 28-25-40.000                   | 3.0000                         | 5.6697  | 2.1498          |
| TO | 61N  | Corrected<br>Adjusted | 28-25-40.000<br>28-25-45.670   | 3.0000<br>1.8799<br>Redundancy | 2.6373  | 1.8899<br>0.66  |
| AT | 119N | Zenith                | 87-46-00.000                   | 2.0000                         | 0.0835  | 0.0424          |
| TO | 61N  | Corrected<br>Adjusted | 87-46-02.387<br>87-46-02.470   | 2.0000<br>0.8867<br>Redundancy | 1.9687  | 0.0417<br>0.83  |
| AT | 119N | Chord                 | 1898.10800                     | 0.0040                         | -0.0008 | -0.2475         |
| TO | 61N  | Corrected<br>Adjusted | 1898.10664<br>1898.10580       | 0.0040<br>0.0027<br>Redundancy | 0.0034  | -0.2102<br>0.62 |
| AT | 61N  | Direct                | 118-56-46.000                  | 3.0000                         | -2.1491 | -0.8345         |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 118-56-46.000<br>118-56-43.851 | 3.0000<br>1.9641<br>Redundancy | 2.5752  | -0.7164<br>0.63 |
| AT | 61N  | Zenith                | 91-34-45.000                   | 2.0000                         | 2.7349  | 1.6068          |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 91-34-16.898<br>91-34-19.633   | 2.0000<br>1.3285<br>Redundancy | 1.7021  | 1.3675<br>0.62  |
| AT | 61N  | Chord                 | 917.08700                      | 0.0040                         | 0.0000  | 0.0149          |
| TO | 115N | Corrected<br>Adjusted | 917.08334<br>917.08338         | 0.0040<br>0.0028<br>Redundancy | 0.0033  | 0.0122<br>0.58  |

|    |      |           |              |            |         |         |
|----|------|-----------|--------------|------------|---------|---------|
| AT | 61N  | Direct    | 0-00-00.000  | 3.0000     | 1.5737  | 0.6066  |
|    |      | Corrected | 0-00-00.000  | 3.0000     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 0-00-01.574  | 1.9389     | 2.5943  | 0.5246  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.64    |
| AT | 61N  | Zenith    | 98-56-00.000 | 2.0000     | -4.5564 | -2.5193 |
|    |      | Corrected | 98-55-22.021 | 2.0000     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 98-55-17.465 | 1.1793     | 1.8086  | -2.2782 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.70    |
| AT | 61N  | Chord     | 1206.97200   | 0.0040     | 0.0032  | 0.9326  |
|    |      | Corrected | 1206.93681   | 0.0040     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 1206.94000   | 0.0026     | 0.0034  | 0.7954  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.62    |
| AT | 61N  | Azimuth   | 11-22-59.287 | 2.0000     | 0.0010  | 1.8026  |
|    |      | Corrected | 11-22-59.287 | 2.0000     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 11-22-59.288 | 2.1592     | 0.0006  | 0.0005  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.00    |
| AT | 61N  | Direct    | 47-26-06.000 | 3.0000     | 0.5754  | 0.2190  |
|    |      | Corrected | 47-26-06.000 | 3.0000     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 47-26-06.575 | 1.8933     | 2.6277  | 0.1918  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.66    |
| AT | 61N  | Zenith    | 92-14-58.000 | 2.0000     | 3.3412  | 1.6972  |
|    |      | Corrected | 92-14-55.613 | 2.0000     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 92-14-58.954 | 0.8867     | 1.9687  | 1.6706  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.83    |
| AT | 61N  | Chord     | 1898.10900   | 0.0040     | -0.0018 | -0.5419 |
|    |      | Corrected | 1898.10764   | 0.0040     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 1898.10580   | 0.0027     | 0.0034  | -0.4602 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.62    |

## ***Priloga C2: Rezultati izravnave mreže Fiesa z uporabo odklonov navpičnic***

### COLUMBUS 3D Geodetic Network Adjustment Software

COLUMBUS: Demo - Ver 3.6.2.36  
Report File: D:\marta\diploma\racunski\_primer\rezultati\_odkloni2.txt  
Project: D:\marta\diploma\racunski\_primer\mreza\_fiesa\_z\_odkloni.txt  
DATE: 03/08/2008 TIME: 17:44:53

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Hgt Update : Ortho Hgt Update (fix ghgt, float ellip hgt)  
Settings : Geoid Hgt Update (float ortho, fix ellip hgt)  
: Ellip Hgt Update (float ortho, fix geoid hgt)

### 3D GEODETIC NETWORK ADJUSTMENT SUMMARY

|                    |         |                                    |           |
|--------------------|---------|------------------------------------|-----------|
| Datum              | WGS 84  | 1D Expansion Factor                | 1.95937   |
| Linear Units       | Meters  | 2D Expansion Factor                | 2.44788   |
| Angular Units      | Degrees | 3D Expansion Factor                | 2.79532   |
| Field Observations | 37      | A Priori Variance                  | 1.00000   |
| Coord Observations | 0       | A Posteriori Variance              | 0.67126   |
| TOTAL OBSERVATIONS | 37      | Confidence Level                   | 95.0      |
|                    |         | Chi Square Test On Variance Factor |           |
|                    |         | 0.409 < 1.0 < 1.299 (Passes)       |           |
| Num Stations       | 4       | Variance Factor Used               | 0.67126   |
| Fixed In 1D        | 0       |                                    |           |
| Fixed In 2D        | 0       |                                    |           |
| Fixed In 3D        | 1       | No Check Observations              | 0         |
| Float Coord Parm   | 9       | Stan Res Rejections                | 0         |
|                    |         | ( Tau Stat = 2.959 )               |           |
| Direction Parm     | 4       | Resid/SD Rejections                | 0         |
| Scale Parm         | 0       | Residual Rejections                | 0         |
| Rotation Parm N    | 0       | TOTAL OUTLIER OBS                  | 0         |
| Rotation Parm E    | 0       |                                    |           |
| Rotation Parm Up   | 0       | Iterations                         | 2         |
| TOTAL PARMS        | 13      | Convergence Criteria               | 0.0010000 |
|                    |         | Zenith Angle Refraction            | 0.00000   |
|                    |         | Rotate Bearings                    | No        |
| DEGREES OF FREEDOM | 24      | Use Full Covariance                | Yes       |

| A-POSTERIORI VARIANCE (and STAN DEV) FACTOR (by observation type) |       |                                   |                   |                 |                |
|-------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------|-------------------|-----------------|----------------|
| Obs Type                                                          | Count | Sum of Squared Weighted Residuals | Redundancy (D.F.) | A-Post Variance | A-Post StanDev |
| Azimuth                                                           | 1     | 0.000                             | 0.000             | 0.000           | 0.000          |
| Direct                                                            | 12    | 4.617                             | 7.887             | 0.585           | 0.765          |
| Zenith                                                            | 12    | 9.464                             | 9.046             | 1.046           | 1.023          |
| Chord                                                             | 12    | 2.029                             | 7.067             | 0.287           | 0.536          |
| TOTALS                                                            | 37    | 16.110                            | 24.000            | 0.671           | 0.819          |

WGS 84 Major = 6378137.0000 1/f = 298.25722356  
Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

Hgt Update : Ortho Hgt Update (fix ghgt, float ellip hgt)  
Settings : Geoid Hgt Update (float ortho, fix ellip hgt)  
: Ellip Hgt Update (float ortho, fix geoid hgt)

Adjusted Coordinates



Linear Units: Meters  
Angular Units: Degrees

#### Adjusted Observations (Mark To Mark)

Standardized Residual Rejection Constant ( Tau Stat ) = 2.95948  
Residual / A Priori Stan Dev Rejection Constant = 5.00000  
Residual Rejection Constants For Each Observation Type  
Azimuth = 10.000  
Direct = 10.000  
Zenith = 10.000  
Chord = 1.00000

| Obs Type | Num Obs | Default SD | Scaler       |
|----------|---------|------------|--------------|
| Azimuth  | 1       | 2.000      |              |
| Direct   | 12      | 3.000      |              |
| Zenith   | 12      | 2.000      |              |
| Chord    | 12      | 0.00400    | 1.0000000000 |

#### Default Instrument/Target Centering Errors

| Obs Set Type     | Horizontal | Vertical |
|------------------|------------|----------|
| Az/Zen/Chord     | 0.00000    | 0.00000  |
| Dir/Zen/Chord    | 0.00000    | 0.00000  |
| Bearing/HorDist  | 0.00000    | 0.00000  |
| HorAng/Zen/Chord | 0.00000    | 0.00000  |
| Hgt Diff         | 0.00000    | 0.00000  |
| GPS XYZ          | 0.00000    | 0.00000  |
| Local NEU        | 0.00000    | 0.00000  |

#### Default PPM Corrections

| Obs Type | PPM |
|----------|-----|
|----------|-----|

|            |         |
|------------|---------|
| Chord Dist | 0.00000 |
| Horiz Dist | 0.00000 |

| Stations | Observations           | SD     | Resid    | Stan Res |
|----------|------------------------|--------|----------|----------|
|          |                        | SD     | Resid SD | Resid/SD |
| AT 115N  | Direct 34-56-04.000    | 3.0000 | -0.2483  | -0.1013  |
|          | Corrected 34-56-09.263 | 3.6699 |          |          |
| TO 117N  | Adjusted 34-56-09.014  | 1.7396 | 2.4524   | -0.0677  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.67     |
| AT 115N  | Zenith 95-05-29.000    | 2.0000 | -1.7989  | -0.8466  |
|          | Corrected 95-05-23.537 | 2.8284 |          |          |
| TO 117N  | Adjusted 95-05-21.738  | 0.9246 | 2.1249   | -0.6360  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.84     |
| AT 115N  | Chord 1829.31400       | 0.0040 | -0.0021  | -0.8123  |
|          | Corrected 1829.30471   | 0.0040 |          |          |
| TO 117N  | Adjusted 1829.30258    | 0.0020 | 0.0026   | -0.5324  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.64     |
| AT 115N  | Direct 80-03-35.000    | 3.0000 | -0.3650  | -0.1501  |
|          | Corrected 80-03-40.364 | 3.6552 |          |          |
| TO 119N  | Adjusted 80-03-39.999  | 1.7477 | 2.4318   | -0.0999  |
|          | Redundancy             |        |          | 0.66     |
| AT 115N  | Zenith 91-32-44.000    | 2.0000 | 2.3167   | 1.1124   |
|          | Corrected 91-32-59.603 | 2.8284 |          |          |
| TO 119N  | Adjusted 91-33-01.919  | 1.0164 | 2.0825   | 0.8191   |
|          | Redundancy             |        |          | 0.81     |

|    |      |           |              |            |         |         |
|----|------|-----------|--------------|------------|---------|---------|
| AT | 115N | Chord     | 1826.81900   | 0.0040     | 0.0018  | 0.7508  |
|    |      | Corrected | 1826.82130   | 0.0040     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 1826.82314   | 0.0022     | 0.0024  | 0.4591  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.56    |
| AT | 115N | Direct    | 0-00-00.000  | 3.0000     | 0.6028  | 0.2517  |
|    |      | Corrected | 0-00-05.338  | 3.6293     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 0-00-05.941  | 1.7628     | 2.3947  | 0.1661  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.65    |
| AT | 115N | Zenith    | 88-25-40.000 | 2.0000     | 1.7500  | 0.9548  |
|    |      | Corrected | 88-26-12.901 | 2.8284     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 88-26-14.651 | 1.4181     | 1.8328  | 0.6187  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.63    |
| AT | 115N | Chord     | 917.08600    | 0.0040     | 0.0011  | 0.4477  |
|    |      | Corrected | 917.08234    | 0.0040     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 917.08345    | 0.0021     | 0.0025  | 0.2778  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.57    |
| AT | 117N | Direct    | 67-35-21.000 | 3.0000     | 1.6573  | 0.6769  |
|    |      | Corrected | 67-35-25.717 | 3.6701     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 67-35-27.374 | 1.7457     | 2.4482  | 0.4516  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.66    |
| AT | 117N | Zenith    | 84-55-33.000 | 2.0000     | -1.7907 | -0.8427 |
|    |      | Corrected | 84-55-38.919 | 2.8284     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 84-55-37.128 | 0.9246     | 2.1249  | -0.6331 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.84    |
| AT | 117N | Chord     | 1829.31200   | 0.0040     | -0.0001 | -0.0494 |
|    |      | Corrected | 1829.30271   | 0.0040     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 1829.30258   | 0.0020     | 0.0026  | -0.0324 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.64    |
| AT | 117N | Direct    | 0-00-00.000  | 3.0000     | -0.0353 | -0.0151 |
|    |      | Corrected | 0-00-04.329  | 3.5673     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 0-00-04.293  | 1.7622     | 2.3317  | -0.0099 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.64    |
| AT | 117N | Zenith    | 85-23-27.000 | 2.0000     | -4.5068 | -2.3041 |
|    |      | Corrected | 85-23-54.797 | 2.8284     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 85-23-50.290 | 1.2426     | 1.9560  | -1.5934 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.71    |
| AT | 117N | Chord     | 1404.37100   | 0.0040     | -0.0014 | -0.5882 |
|    |      | Corrected | 1404.35433   | 0.0040     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 1404.35292   | 0.0022     | 0.0024  | -0.3520 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.53    |
| AT | 117N | Direct    | 93-42-39.000 | 3.0000     | -1.7094 | -0.6742 |
|    |      | Corrected | 93-42-44.077 | 3.7700     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 93-42-42.368 | 1.7641     | 2.5354  | -0.4534 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.67    |
| AT | 117N | Zenith    | 81-04-44.000 | 2.0000     | -0.8782 | -0.4514 |
|    |      | Corrected | 81-05-17.163 | 2.8284     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 81-05-16.285 | 1.2588     | 1.9456  | -0.3105 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.70    |
| AT | 117N | Chord     | 1206.97600   | 0.0040     | -0.0008 | -0.3263 |
|    |      | Corrected | 1206.94081   | 0.0040     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 1206.93997   | 0.0020     | 0.0026  | -0.2104 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.62    |

|    |      |           |               |            |         |         |
|----|------|-----------|---------------|------------|---------|---------|
| AT | 119N | Direct    | 0-00-00.000   | 3.0000     | -3.0253 | -1.2364 |
|    |      | Corrected | 0-00-05.362   | 3.6555     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 0-00-02.336   | 1.7271     | 2.4469  | -0.8276 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.67    |
| AT | 119N | Zenith    | 88-28-13.000  | 2.0000     | 0.3097  | 0.1487  |
|    |      | Corrected | 88-27-56.904  | 2.8284     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 88-27-57.213  | 1.0164     | 2.0825  | 0.1095  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.81    |
| AT | 119N | Chord     | 1826.82100    | 0.0040     | -0.0002 | -0.0669 |
|    |      | Corrected | 1826.82330    | 0.0040     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 1826.82314    | 0.0022     | 0.0024  | -0.0409 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.56    |
| AT | 119N | Direct    | 67-17-06.000  | 3.0000     | -2.5076 | -1.0646 |
|    |      | Corrected | 67-17-10.796  | 3.5674     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 67-17-08.288  | 1.7306     | 2.3554  | -0.7029 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.65    |
| AT | 119N | Zenith    | 94-37-24.000  | 2.0000     | -1.1621 | -0.5941 |
|    |      | Corrected | 94-36-56.124  | 2.8284     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 94-36-54.962  | 1.2426     | 1.9560  | -0.4109 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.71    |
| AT | 119N | Chord     | 1404.36700    | 0.0040     | 0.0027  | 1.1166  |
|    |      | Corrected | 1404.35025    | 0.0040     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 1404.35292    | 0.0022     | 0.0024  | 0.6681  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.53    |
| AT | 119N | Direct    | 28-25-40.000  | 3.0000     | 5.7033  | 2.3151  |
|    |      | Corrected | 28-25-45.475  | 3.6700     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 28-25-51.178  | 1.7240     | 2.4635  | 1.5540  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.67    |
| AT | 119N | Zenith    | 87-46-00.000  | 2.0000     | 0.3531  | 0.1671  |
|    |      | Corrected | 87-46-00.372  | 2.8284     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 87-46-00.725  | 0.9513     | 2.1131  | 0.1249  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.83    |
| AT | 119N | Chord     | 1898.10800    | 0.0040     | -0.0007 | -0.2797 |
|    |      | Corrected | 1898.10664    | 0.0040     |         |         |
| TO | 61N  | Adjusted  | 1898.10592    | 0.0020     | 0.0026  | -0.1791 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.61    |
| AT | 61N  | Direct    | 118-56-46.000 | 3.0000     | -2.1493 | -0.9091 |
|    |      | Corrected | 118-56-50.812 | 3.6293     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 118-56-48.662 | 1.8036     | 2.3641  | -0.5922 |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.63    |
| AT | 61N  | Zenith    | 91-34-45.000  | 2.0000     | 2.3342  | 1.2736  |
|    |      | Corrected | 91-34-12.611  | 2.8284     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 91-34-14.946  | 1.4181     | 1.8328  | 0.8253  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.63    |
| AT | 61N  | Chord     | 917.08700     | 0.0040     | 0.0001  | 0.0448  |
|    |      | Corrected | 917.08334     | 0.0040     |         |         |
| TO | 115N | Adjusted  | 917.08345     | 0.0021     | 0.0025  | 0.0278  |
|    |      |           |               | Redundancy |         | 0.57    |
| AT | 61N  | Direct    | 0-00-00.000   | 3.0000     | 1.6476  | 0.6550  |
|    |      | Corrected | 0-00-05.076   | 3.7698     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 0-00-06.724   | 1.7924     | 2.5153  | 0.4370  |

|    |      |           |              |            |         |         |
|----|------|-----------|--------------|------------|---------|---------|
|    |      |           |              | Redundancy | 0.66    |         |
| AT | 61N  | Zenith    | 98-56-00.000 | 2.0000     | -4.5451 | -2.3360 |
|    |      | Corrected | 98-55-26.837 | 2.8284     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 98-55-22.292 | 1.2588     | 1.9456  | -1.6069 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.70    |
| AT | 61N  | Chord     | 1206.97200   | 0.0040     | 0.0032  | 1.2250  |
|    |      | Corrected | 1206.93681   | 0.0040     |         |         |
| TO | 117N | Adjusted  | 1206.93997   | 0.0020     | 0.0026  | 0.7897  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.62    |
| AT | 61N  | Direct    | 47-26-06.000 | 3.0000     | 0.6362  | 0.2610  |
|    |      | Corrected | 47-26-10.924 | 3.6697     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 47-26-11.560 | 1.7600     | 2.4376  | 0.1734  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.66    |
| AT | 61N  | Zenith    | 92-14-58.000 | 2.0000     | 3.4752  | 1.6446  |
|    |      | Corrected | 92-14-57.225 | 2.8284     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 92-15-00.700 | 0.9513     | 2.1131  | 1.2287  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.83    |
| AT | 61N  | Chord     | 1898.10900   | 0.0040     | -0.0017 | -0.6703 |
|    |      | Corrected | 1898.10764   | 0.0040     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 1898.10592   | 0.0020     | 0.0026  | -0.4291 |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.61    |
| AT | 61N  | Azimuth   | 11-22-59.287 | 2.0000     | 0.0010  | 0.1103  |
|    |      | Corrected | 11-23-04.211 | 2.9097     |         |         |
| TO | 119N | Adjusted  | 11-23-04.212 | 2.3840     | 0.0091  | 0.0003  |
|    |      |           |              | Redundancy |         | 0.00    |