UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Maja Peperko

Hilbertovi aksiomi ravninske evklidske geometrije

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2014

Kazalo

Hilbertovi aksiomi ravninske evklidske geometrije

Povzetek

Evklidovi Elementi so bili temelj aksiomatike v geometriji dobrih 2000 let. Šele v 19. stoletju je David Hilbert zapolnil obstoječe primankljaje in jih zapisal v jeziku moderne geometrije ter tako postavil aksiomatske temelje današnje geometrije.

Že kot osnovnošolci se srečamo s pojmom ploščine, geometrijskimi liki in formulami, celo Pitagorovim izrekom. Pa vendar se samo naučimo njihove uporabe, zakaj jih sploh „smemo” uporabiti, pa se kasneje navadno ne sprašujemo, pač pa naučene „očitne resnice” hitro vzamemo za znana dejstva.

Namen mojega dela diplomskega seminarja je pokazati, kako samo z uporabo aksiomov resnično zgradimo nekatere že tako dolgo poznane trditve. Najprej predstavim skupine aksiomov, ki nam zagotovijo osnovne elemente geometrije z različnimi relacijami med njimi, definiram različne ravnine in dokažem nekatere osnovne trditve. Na koncu predstavim še ploščino in dokaza za Pitagorov izrek ter izračun ploščine poljubnega trikotnika.

Hilbert's Axioms for Plane Geometry

Abstract

Euclid's Elements were the foundation of geometry for over 2000 years. It was not until the 19th century that David Hilbert filled the missing gaps and contributed substantially to the establishment of the formalistic foundations of geometry.

As children we meet with basic mathematical formulas and other geometric rules, but we don't in fact know why we can use them. The purpose of my work is to show how to build some of those basic theorems using only axioms.

First I introduce groups of axioms which give us the basics elements of geometry, then define different planes and at the end we tackle the concept of area, Pythagorean and some other theorems.

Math. Subj. Class. (2010): 51-01, 51-03, 01A20, 01A55

Ključne besede: točka, premica, Hilbertova ravnina, Evklidova ravnina, trikotnik, ploščina

Keywords: point, line, Hilbert plane, Euclidean plane, triangle, area

1. Zgodovina geometrije

Geometrija je ena od najstarejših vej matematike, saj se je začela razvijati že v času starih kultur, ki so jo potrebovale iz čisto praktičnih razlogov. Večina najstarejših civilizacij je nastala ob velikih rekah: kitajska civilizacija ob Rumeni reki, mezopotamska ob Evfratu in Tigrisu, egipčanska ob Nilu in podobno. Ob vsakoletnih poplavah so se zabrisale meje med posameznimi območji, ki jih je bilo potrebno obnoviti in tako so začeli meriti, risati in računati.

Prvi, ki so geometrijo začeli obravnavati na bolj znanstven način, so bili starogrški matematiki, ki so uvedli abstrakcijo ter pojma trditve in dokaza. Eden izmed njih je bil Tales iz Mileta, ki je iz svojih trgovskih potovanj po Mali Aziji in Egiptu prinesel znanje o geometriji v Grčijo. Verjetno najpomembnejši starogrški matematik pa je bil Evklid iz Aleksandrije (mesto v današnjem Egiptu ob Sredozemskem morju).

1.1. **Evklid.** Okoli leta 300 pr. n. š. je napisal znano delo Elementi, ki obsega 13 zvezkov in je dobrih 2000 let veljalo za temelj aksiomatike v geometriji, ki se ga ostali matematiki niso drznili spreminjati. Tudi sicer veljajo Elementi za najpomembnejše znanstveno delo in zasedajo kar drugo mesto, takoj za Svetim pismom, po številu tiskanih izdaj v različnih jezikih. Napisani so v starogrščini, matematična terminologija, kot jo poznamo danes (pojmi kot so premica, daljica, . . .), pa še ni bila izdelana (točko je Evklid definiral kot „tisto, kar nima delov”). Vseeno pa je slog pisanja zelo sodoben. Zgradba se začne z definicijami in aksiomi, šele tem pa sledijo izreki, ki jih je potrebno dokazati, kar velja za standard tudi danes.

Oglejmo si pet Evklidovih postulatov (v sodobnem jeziku), ki so tako dolgo ostali temelj aksiomatike v geometriji:

(1) Skozi poljubni dve točki poteka natanko ena premica.
(2) Premica je neomejena.
(3) Za vsako daljico obstaja krožnica, ki ima to daljico za polmer in eno od krajišč za središče.
(4) Vsi pravi koti so skladni.
(5) Če poljubni dve premici sekamo s tretjo (presečnico) in je vsota notranjih kotov na eni strani presečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici sekata na tej strani presečnice.

Peti postulat je veliko bolj poznan v ekvivalentni obliki kot aksiom o vzporednici, ki so ga formulirali kasnejši matematiki in pravi:

(5’) Skozi poljubno točko T, ki ne leži na premici p, poteka natanko ena vzporednica k premici p.

1.1.1. *Evklidska in neevklidske geometrije.* Ravno aksiom o vzporednici je pritegnil največ zanimanja matematikov, saj za razliko od ostalih ni tako geometrijsko očiten in zato so se matematiki različnih časovnih obdobij dolgo trudili, da bi pokazali njegovo nepotrebnost (ga izpeljali iz ostalih aksiomov). Okoli leta 1800 pa sta madžarski matematik Janos Bolyai in ruski matematik Nikolaj Lobačevski, neodvisno drug od drugega, odkrila neevklidske geometrije. Kot prva sta si upala objaviti, da aksiomatski sestav s prvimi štirimi aksiomi in negacijo aksioma o vzporednici (skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka več vzporednic k tej premici) predstavlja novo geometrijo, ki se ne sklada z evklidsko, pa kljub temu ni protislovna.

2. David Hilbert

Šele v 19. stoletju se je našel nekdo, ki si je upal 2000 let stare aksiome posodobiti in zapolniti Evklidove vrzeli. To je bil mož, ki je ogromno prispeval k matematiki na mnogih različnih področjih, Nemec David Hilbert. Rodil se je v času nemškega nacionalizma leta 1862, umrl pa je leta 1943. Svoje znanstveno delo je začel na področju teorije invariant, v grobem pa lahko njegovo delo razdelimo še na pet področij oziroma obdobij, ki so sledila: algebraična teorija števil, osnove geometrije, analiza, teoretična fizika in osnove matematike.

Hilbert je bil prepričan, da je vsak matematični problem rešljiv in s temi besedami je tudi začel nagovor matematikom na drugem mednarodnem kongresu v Parizu, leta 1900, kjer je postavil svoj znameniti izbor 23-ih problemov, ki so imeli precejšen vpliv na matematiko 20. stoletja, nekateri od njih pa ostajajo odprti še danes. [4, David Hilbert]

2.1. **Osnove geometrije.**

Hilbert se je z geometrijo ukvarjal v obdobju 1899-1903. Že leta 1899 je napisal knjigo z naslovom Osnove geometrije (Grundlagen der Geometrie), ki je postala njegovo najbolj znano delo.

Takrat strogi aksiomatski temelji geometrije še niso bili postavljeni in več kot 2000 let stari Evklidovi postulati niso več zadoščali modernim merilom znanosti. To se je s Hilbertovim delom spremenilo in tudi geometrija je dobila svojo strogo aksiomatično osnovo.

Delo se začne z obravnavo osnovnih geometrijskih objektov: točke, premice in ravnine ter relacij med njimi: biti na, med, biti skladen, vzporeden in zvezen. Nato postavi sistem 21-ih aksiomov, za katerega zahteva *popolnost* (vsi izreki teorije morajo biti izvedljivi z logičnim premislekom le iz sistema aksiomov), *neodvisnost* (če iz sistema odstranimo poljuben aksiom, potem obstaja izrek, ki ga ne moremo več dokazati) in *neprotislovnost* (iz sistema aksiomov ne moremo z logičnim premislekom priti do protislovja).

2.2. **Sistem aksiomov.**

Hilbert poda tudi aksiome geometrije v prostoru, vendar pa se bom sama omejila le na ravninsko geometrijo in zato navedla le aksiome ravninske geometrije.

Osnovni gradnik ravninske in prostorske geometrije je točka. Naj bo P množica točk in $L \subset 2^P$ množica premic.

Po vzoru Evklidovih petih postulatov je tudi Hilbert razdelil aksiome v pet glavnih skupin.

(A) Aksiomi pripadnosti

(1) Za vsaki dve različni točki A in B obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.
(2) Vsaka premica vsebuje vsaj dve točki.
(3) Obstajajo vsaj tri točke, ki ne ležijo na isti premici. Te točke popolnoma določajo ravnino.

(B) Aksiomi ureditve

Sledeči aksiomi govorijo o relaciji „biti med”, ki pa ni vedno smiselna za vse geometrije, saj ni nujno, da so vsi elementi med seboj primerljivi.

Vpeljemo relacijo $R \subset P \times P \times P : A * B * C \Leftrightarrow (A, B, C) \in R$ in preberemo: B leži med A in C.

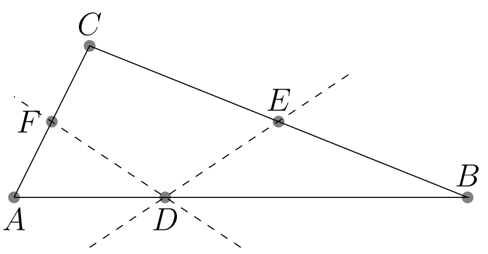
Aksiomi te skupine so:

(1) Če velja $A*B*C$, potem so A, B, C tri različne točke na neki skupni premici, za katere velja tudi $C * B * A$.
(2) Za dani različni točki A in B obstaja točka C, da velja $A * B * C$.
(3) Če so A, B, C različne točke na skupni premici, potem zanje velja natanko ena od izjav: $A * B * C, B * C * A, C * A * B$.
(4) Naj bodo A, B, C različne nekolinearne točke in p premica, ki ne vsebuje nobene od teh točk. Če točka D leži na p in velja $A * D * B$, potem velja natanko ena od izjav: obstaja tudi točka E na p, da velja $B * E * C$ ali pa obstaja točka F na p, da velja $A * F * C$, vendar pa nikoli obe hkrati.

S pomočjo ureditve vpeljemo pojma *daljice*: $AB = \{A, B\} \bigcup \{C; A * C * B\}$ in *poltraka*: $\overrightarrow{AB} = AB \bigcup \{C; A * B * C\}$. Točko A imenujemo *izhodišče poltraka.* Če točke A, B, C ne ležijo na isti premici, definiramo *kot* $\angle BAC$: $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

Ko imamo dane tri točke A, B, C, ki ne ležijo na isti premici, vsak par točk določa svojo premico.*Trikotnik* ABC je podmnožica ravnine, ki vsebuje daljice AB, AC in BC.

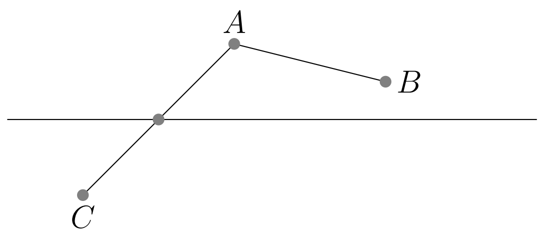
Če za točke A, B, C vzamemo oglišča trikotnika, četrti aksiom ureditve pove: če premica seka katero od stranic trikotnika in ne poteka skozi nobeno oglišče, potem seka natanko dve njegovi stranici.



2.2.1. *Delitev ravnine.*

Trditev 2.1. *Poljubna premica p v Hilbertovi ravnini (točke in premice zadoščajo aksiomom pripadnosti, ureditve in skladnosti) razdeli to ravnino na dve polravnini z lastnostma:*

(1) *Izbrani točki $A, B \notin p$ ležita v isti polravnini natanko tedaj, ko daljica AB ne seka premice p.*
(2) *Izbrani točki $A, C \notin p$ ležita vsaka v svoji polravnini natanko tedaj, ko se daljica AC in premica p sekata v eni skupni točki.*

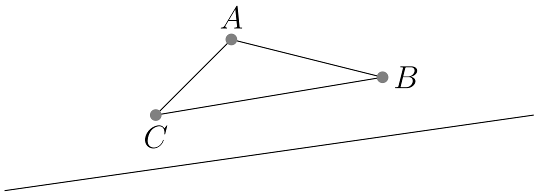


Dokaz. Definirajmo relacijo $\sim$ kot: $A \sim B$, če je $A = B$ ali če daljica AB ne seka premice p.

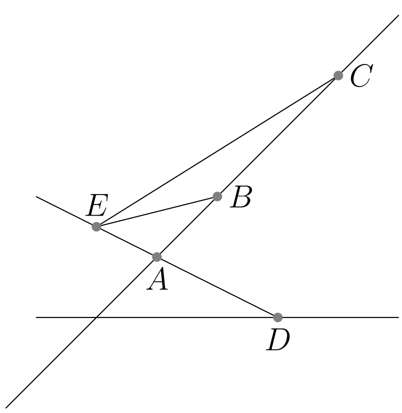
To je ekvivalenčna relacija:

(1) Refleksivnost je očitna, saj je $A = A$, torej po definiciji $A \sim A$.
(2) Simetričnost: Če je A v relaciji z B, potem je tudi B v relaciji z A, saj vrstni red krajišč v definiciji daljice ni pomemben (B1).
(3) Tranzitivnost: Veljati mora: če je A v relaciji z B in je B v relaciji s C, potem je tudi A v relaciji s C.
Ločimo dva primera.

- Točke A, B, C so nekolinearne: Ker je A v relaciji z B in B v relaciji s C, premica p nima skupnih točk z daljicama AB in BC. Po četrtem aksiomu ureditve mora premica, ki seka katero od trikotnikovih stranic, sekati natanko dve njegovi stranici. Ker so točke A, B, C nekolinearne, tvorijo trikotnik in po aksiomu (B4) premica p ne seka daljice AC, torej je res $A \sim C$.



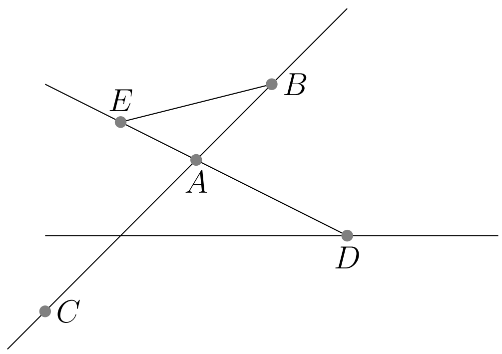
- Točke A, B, C so kolinearne in vse ležijo na premici q. Ker izbrane točke po predpostavki ne ležijo na premici p, sta p in q različni premici, ki imata lahko največ eno skupno točko (če bi imeli dve skupni točki, potem po prvem aksiomu pripadnosti obstaja natanko ena premica, ki ti dve točki vsebuje, torej $p = q$). Po drugem aksiomu pripadnosti vsaka premica vsebuje vsaj dve točki. Torej mora obstajati točka $D \in p$, ki ne leži na q. Po drugem aksiomu ureditve lahko najdemo točko E, da bo veljalo $D * A * E$, ki so po prvem aksiomu ureditve kolinearne. Ker $A \notin p$, tudi $E \notin p$ in daljica AE ne seka premice p (če bi jo, bi bilo to presečišče točka D, ki pa po konstrukciji ne leži med A in E). Točka E prav tako ne leži na q, saj bi bila v tem primeru premica skozi A in E enaka q in bi torej tudi točka D ležala na q, kar pa ne drži. Torej so A, B in E tri nekolinearne točke in po že dokazanem iz $A \sim E \wedge A \sim B$ sledi $B \sim E$. Če uporabimo zgoraj dokazano še enkrat, iz $B \sim E \wedge B \sim C$ zaključimo $C \sim E$. Ker so tudi A, C, E nekolinearne, iz $A \sim E \wedge C \sim E$ sledi $A \sim C$, kot smo želeli in $\sim$ je res ekvivalenčna relacija.



Ekvivalenčna relacija na množici deli to množico na disjunktne ekvivalenčne razrede. Pokazati moramo, da naša relacija $\sim$ določa natanko dva ekvivalenčna razreda. Če torej daljica AC seka p, točki A in C nista v relaciji in pripadata različnima ekvivalenčnima razredoma.

Po tretjem aksiomu pripadnosti obstaja točka A, ki ne leži na premici p, torej obstaja vsaj en ekvivalenčni razred. Naj bo D poljubna točka na p. Zaradi (B2) lahko izberemo točko C, da bo veljalo $A * D * C$ in zato A ni v relaciji s C. Torej sta ekvivalenčna razreda vsaj dva. Pokažimo, da jih več ne more biti. Če torej A ni v relaciji s C in B ni v relaciji s C, potem sta A in B točki istega ekvivalenčnega razreda:

- Če so A, B, C nekolinearne, tvorijo trikotnik. Če A ni v relaciji s C, daljica AC po definiciji seka p. Analogno daljica BC seka p. Po četrtem aksiomu ureditve potem daljica AB ne more sekati premice p, torej je res $A \sim B$.
- Naj bodo sedaj A, B, C kolinearne in naj ležijo na premici q. Kot prej v dokazu tranzitivnosti izberimo $D \in p$, ki ne leži na q. Spet lahko po aksiomih ureditve izberemo tako točko E, da velja $D * A * E$ in po že dokazanem je A v relaciji z E. Po predpostavki A ni v relaciji s C in zaradi tranzitivnosti tudi C ni v relaciji z E. Točke B, C in E so nekolinearne ter E in B nista v relaciji s C. Torej sta v relaciji med seboj, kar pomeni $B \sim E$. Tranzitivnost nam da željeni rezultat $A \sim B$.



□

2.2.2. *Delitev premice.*

Trditev 2.2. *Naj bo A točka na premici p. Potem lahko množico vseh ostalih točk na tej premici razdelimo na dve „strani" premice glede na točko A, natančneje v dve neprazni podmnožici S_1 in S_2, da velja:*

(1) *Točki B in C sta na isti strani premice glede na A natanko tedaj, ko A ne leži na daljici BC.*
(2) *Točki B in D sta na različnih straneh premice glede na A natanko tedaj, ko A leži na daljici BD.*

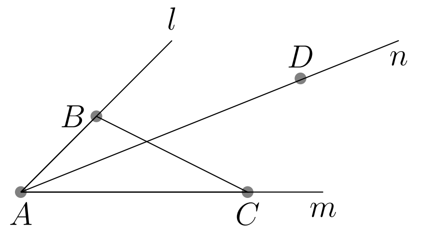
Dokaz. Naj bo dana premica p in na njej točka A. Po (A3) obstaja točka E, ki ne leži na p. Naj bo l premica skozi A in E. Po prejšnji trditvi l deli ravnino na dva dela S'_1 in S'_2. Definiramo S_1 in S_2 kot presek S'_1 in S'_2 s premico p in dobimo iskano delitev. Ker po (A2) obstaja točka B na p, različna od A in po (B2) obstaja točka D, da velja $B * A * D$, ki je torej na nasprotni strani kot B, sta obe podmnožici neprazni. □

Posledica 2.3. *Naj bosta A in B različni točki na premici p in naj bo poltrak $\overrightarrow{AB}^* := \{A\} \cup \{C\ ;\ C$ in B sta na isti strani premice p glede na $A\}$. Potem velja: $\overrightarrow{AB}^* = \overrightarrow{AB}$.*

Dokaz. Po definiciji je $\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C; A * B * C\}$. Videti želimo, da je $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AB}^*$. Očitno je $B \in \overrightarrow{AB}^*$. Videti hočemo še, da iz $A * C * B$ ali $A * B * C$ sledi $C \in \overrightarrow{AB}^*$. To pa sledi iz aksioma (B3), definicije daljice in iz točke (1) trditve 2.2. Potrebujemo še vsebovanost v drugo smer, $\overrightarrow{AB}^* \subset \overrightarrow{AB}$. Res, če sta B in C na isti strani premice glede na A in $C \neq B$, potem po aksiomu (B3) velja $A * C * B$ ali $A * B * C$. □

Trditev 2.4. *Naj bo $\angle BAC$ dani kot in D njegova notranja točka (tj. D in C ležita na isti strani premice AB ter B in D ležita na isti strani premice AC). Potem se poltrak $\overrightarrow{AD}$ in daljica BC sekata.*

Dokaz. Pokazati želimo, da premica, ki poteka skozi eno od trikotnikovih oglišč, seka nasprotno stranico.

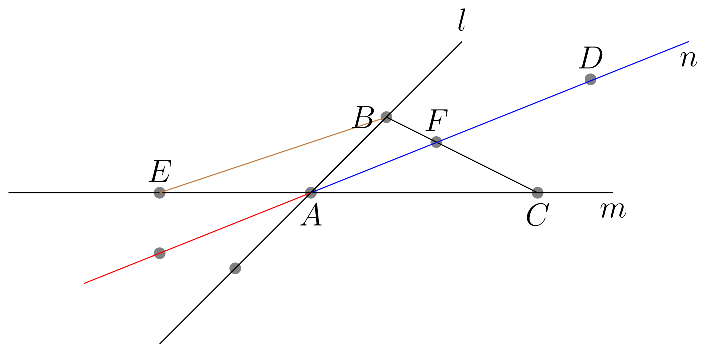


Naj bo l premica skozi A in B, m premica skozi A in C ter n premica skozi A in D (A1). Po (B2) lahko izberemo točko E na m, tako da velja $E * A * C$. Sedaj n seka stranico EC trikotnika BCE v točki A.

B ne leži na n, saj bi v tem primeru n in l imeli dve skupni točki in bi bili po (A1) enaki. Če pokažemo, da n ne seka stranice EB, mora po (B4) sekati stranico BC.

Stranica EB ima s premico l skupno krajišče B, torej vse ostale točke daljice EB ležijo na isti strani premice l. C je po konstrukciji na nasprotni strani premice l kot E. Po trditvi 2.1 vse točke daljice EB, razen B, ležijo na nasprotni strani l kot C.

Ker je D notranja točka kota $\angle BAC$, so vse točke daljice AD (razen A) na isti strani premice l kot C. Torej poltrak $\overrightarrow{AD}$ in stranica EB nimata skupnih točk.



Podobno ima EB s premico m skupno le krajišče E, vse ostale točke pa ležijo na isti strani premice. Na enak način kot prej pokažemo, da daljica EB in poltrak z izhodiščem v A, katerega vse ostale točke ležijo na nasprotni strani premice n kot D glede na A, nimata skupnih točk. Torej premica n ne seka EB in mora po aksiomu (B4) sekati BC. Označimo to presečišče s točko F. Ker B in F ležita na isti strani premice m, pravtako pa tudi točki B in D, sta po trditvi (2.1) tudi D in F obe na isti strani premice m. Ker točka A leži na m, morata biti D in F obe na isti strani premice n glede na A, oziroma F je točka na poltraku $\overrightarrow{AD}$. $\square$

(C) Aksiomi skladnosti

Vpeljemo relacijo R na množici daljic: $AB \cong CD \Leftrightarrow (AB, CD) \in R$ z lastnostmi:

Aksiomi skladnosti za daljice:

(1) Za dano daljico AB in poltrak r z izhodiščem v točki C obstaja točno določena točka D na poltraku r, da velja $CD \cong AB$.
(2) Če je $AB \cong CD$ in $AB \cong EF$, potem je $CD \cong EF$. Vsak odsek je skladen s samim seboj. (Skladnost daljic je ekvivalenčna relacija.)
(3) Če za $A * B * C$ in $A' * B' * C'$ velja $AB \cong A'B'$ in $BC \cong B'C'$, potem velja tudi $AC \cong A'C'$.

Definicija 2.5. Naj bosta AB in CD dani daljici in p premica skozi A in B. Naj bo r poltrak na premici p z izhodiščem v B in vsemi tistimi točkami, ki ležijo na nasprotni strani premice p kot A glede na B. Naj bo E taka točka na r, da velja $CD \cong BE$ (obstaja po (C1)). Pravimo, da je daljica AE *vsota daljic* AB in CD. Pišemo $AE = AB + CD$.

Trditev 2.6. *Naj bosta dana para skladnih daljic $AB \cong A'B'$ in $CD \cong C'D'$. Potem velja: $AB + CD \cong A'B' + C'D'$, torej seštevanje skladnih daljic ohranja skladnost.*

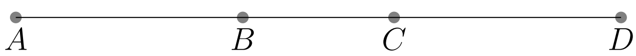
Dokaz. Naj bo E' točka na premici skozi $A'B'$, ki definira vsoto $A'E' = A'B' + C'D'$. Točka E po konstrukciji vsote $AB + CD$ leži na nasprotni strani točke B kot A. Analogno velja za E': $A' * B' * E'$. Po predpostavki je $AB \cong A'B'$ in $CD \cong C'D'$ ter po konstrukciji točk E in E' še $CD \cong BE$ ter $C'D' \cong B'E'$. Ker je skladnost daljic ekvivalenčna relacija, je tudi $BE \cong B'E'$ in po (C3) sledi $AE \cong A'E'$. $\square$

Trditev 2.7. *Naj bodo A, B, C točke na premici p, za katere velja $A * B * C$ in E, F točki na poltraku z izhodiščem v D, ki ne leži na p. Če velja $AB \cong DE$ in $AC \cong DF$, potem E leži med D in F in je $BC \cong EF$. Daljica BC predstavlja razliko odsekov, tj. $BC = AC - AB$.*

Dokaz. Naj bo F' točka na premici skozi D in E in sicer na nasprotni strani kot D glede na E in naj velja $BC \cong EF'$. Potem po (C3) iz $AB \cong DE$ in $BC \cong EF'$ sledi $AC \cong DF'$. Ker točke D, E, F po predpostavki vse ležijo na isti premici in je F' na isti premici kot E in D, sta tudi F in F' na isti premici in $AC \cong DF$. Torej morata biti F in F' enaki (C1 in C2). E res leži med D in F in $BC \cong EF$. $\square$

Definicija 2.8. Naj bosta AB in CD dani daljici. Rečemo, da je AB *krajša* od CD in pišemo $AB < CD$, če obstaja taka točka E med C in D, da velja $AB \cong CE$. Hkrati je daljica CD *daljša* od AB, tj. $CD > AB$.

Lema 2.9. *Naj za točke A, B, C, D, ki ležijo na isti premici, velja $A * C * D$ in $A * B * C$. Potem velja tudi $B * C * D$ in $A * B * D$.*



Dokaz. (1) Iz $A * B * C$ in $A * C * D$ sledi $B * C * D$: Točki A in B sta na isti strani premice glede na C ter A in D sta na nasprotnih straneh glede na C, torej sta B in D na nasprotnih straneh premice glede na C.

(2) Iz $A * B * C$ in $A * C * D$ sledi $A * B * D$: Točki B in D sta na isti strani premice glede na A, torej velja $A * B * D$ ali $A * D * B$. Če velja $A * D * B$ iz $A * B * C$ sledi, da sta točki C in D na nasprotni strani premice glede na B, torej $C * B * D$, kar pa je v prostislovju z $B * C * D$, ki velja po (1) in enoličnostjo v (B3). Torej B leži med A in D.

□

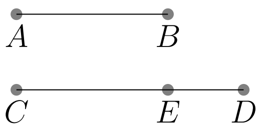
Trditev 2.10. (1) *Za dana para skladnih daljic $AB \cong A'B'$ in $CD \cong C'D'$ je $AB < CD$ natanko tedaj, ko je $A'B' < C'D'$.*

(2) *Relacija $<$ določa urejenost daljic do skladnosti natančno:*

(a) *Če je $AB < CD$ in $CD < EF$, potem je $AB < EF$.*

(b) *Za dani daljici AB, CD velja natanko ena od trditev: $AB < CD, AB \cong CD, AB > CD$.*

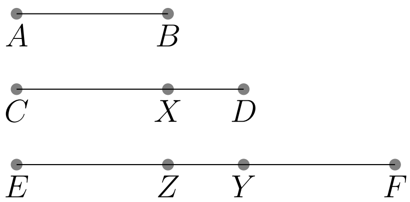
Dokaz. (1) Naj bosta dana para skladnih daljic $AB \cong A'B'$ in $CD \cong C'D'$. Recimo, da velja $AB < CD$. Potem obstaja taka točka E, da je $AB \cong CE$ in $C * E * D$.



Naj bo E' tako izbrana točka na poltraku $\overrightarrow{C'D'}$, da je $CE \cong C'E'$. Po trditvi 2.7 je $C' * E' * D'$. Zaradi tranzitivnosti relacije skladnosti je $A'B' \cong C'E'$, torej je $A'B' < C'D'$.

Dokaz v nasprotno smer poteka enako, le da za začetno predpostavko vzamemo $A'B' < C'D'$.

(2a) Naj bo $AB < CD$ in $CD < EF$. Potem po definiciji obstajata točka X na CD (tj. $C * X * D$), da je $AB \cong CX$ in Y na EF (tj. $E * Y * F$), da je $CD \cong EY$.



Naj bo Z taka točka na poltraku $\overrightarrow{EF}$, da velja $CX \cong EZ$. Po trditvi 2.7 je $E * Z * Y$ in po lemi 2.9 velja tudi $E * Z * F$. Ker je skladnost daljic ekvivalenčna relacija (po C2), velja $AB \cong EZ$. Torej je res $AB < EF$.

(2b) Naj bosta dani daljici AB in CD ter enolično določena točka E na poltraku $\overrightarrow{CD}$, da velja $AB \cong CE$. Potem velja ena od možnosti: $D = E, C * E * D, C * D * E$ ($D * C * E$ ne more biti, ker D in E ležita na isti strani premice glede na C), kar pomeni, da je $AB \cong CD$ ali $AB < CD$ ali pa je $AB > CD$. □

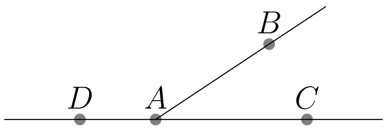
Definicija 2.11. Dva različna *trikotnika sta skladna*, če imata paroma skladne vse stranice in vse kote.

<u>Aksiomi skladnosti za kote:</u>

(4) Za dani kot $\angle BAC$ in poltrak $\overrightarrow{A'C'}$ obstaja točno določen poltrak $\overrightarrow{A'B'}$ na izbrani strani premice $A'C'$, da velja $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
(5) Za poljubne tri kote α, β, γ velja: če je $\alpha \cong \beta$ in $\alpha \cong \gamma$, potem je $\beta \cong \gamma$. Vsak kot je skladen s samim seboj. (Skladnost kotov je ekvivalenčna relacija.)
(6) Če za trikotnika ABC in $A'B'C'$ velja $AB \cong A'B'$ in $AC \cong A'C'$ ter $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, potem velja tudi $\angle ABC \cong \angle A'B'C', \angle ACB \cong \angle A'C'B'$ in $BC \cong B'C'$. Torej sta trikotnika skladna.

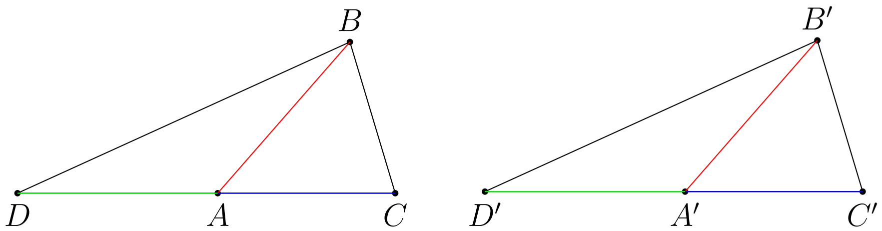
Definicija 2.12. Točke in premice, ki zadoščajo aksiomom prvih treh skupin, tvorijo *Hilbertovo ravnino.*

Definicija 2.13. Naj bo dan kot $\angle BAC$ in D točka na premici skozi A in C, ki leži na nasprotni strani premice glede na A kot C. Potem sta kota $\angle BAC$ in $\angle BAD$ *suplementarna.*



Trditev 2.14. *Naj bosta kota $\angle BAC$ in $\angle BAD$ suplementarna ter pravtako kota $\angle B'A'C'$ in $\angle B'A'D'$. Če je kot $\angle BAC$ skladen z $\angle B'A'C'$, potem je tudi $\angle BAD$ skladen z $\angle B'A'D'$.*

Dokaz. Nadomestimo najprej točke B', C', D' s poljubnimi drugimi točkami na teh poltrakih in ponovno izberimo točke B', C', D' tako, da bo $AB \cong A'B', AC \cong A'C'$ in $AD \cong A'D'$. Dodajmo daljice BC, BD, $B'C'$ in $B'D'$.



Če si najprej ogledamo trikotnika ABC in $A'B'C'$, vidimo, da imata skladni stranici $AB \cong A'B', AC \cong A'C'$ in po predpostavki tudi kot med njima, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Torej sta po (C6) trikotnika skladna. Oglejmo si večja trikotnika BCD in $B'C'D'$: ker je $AC \cong A'C'$ in $AD \cong A'D'$ ter $C * A * D$, $C' * A' * D'$ iz (C3) sledi, da sta tudi stranici CD in $C'D'$ skladni. Zaradi prejšnjega koraka je $BC \cong B'C'$ in $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Ponovno uporabimo (C6), ki nam da skladnost trikotnikov BCD in $B'C'D'$. Če pokažemo še skladnost trikotnikov BDA in $B'D'A'$, s tem dobimo skladnost kotov $\angle BAD, \angle B'A'D'$ in dokaz je končan.

Po pravkar dokazanem je $BD \cong B'D'$ in $\angle BDA \cong \angle B'D'A'$ ter po predpostavki $DA \cong D'A'$. Ponovna uporaba aksioma (C6) nam da željeni rezultat. □

Definicija 2.15. *Notranjost kota* $\angle BAC$ je množica vseh takih točk D, za katere velja: D in C sta na isti strani premice AB ter B in D sta na isti strani premice AC.

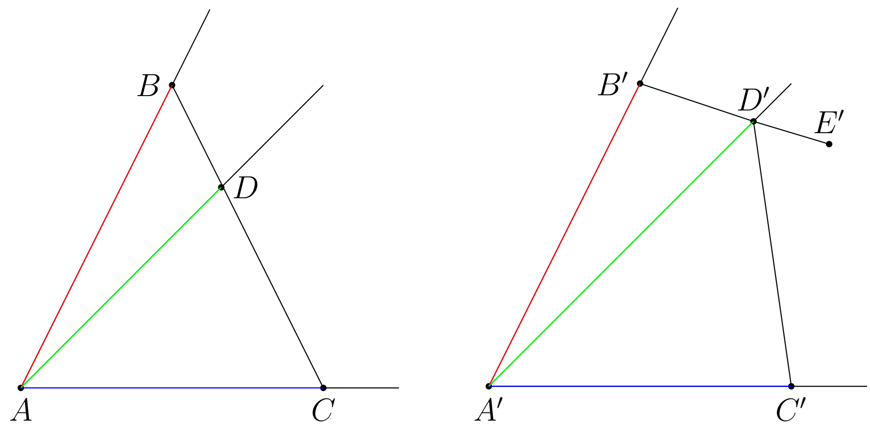
Notranjost trikotnika ABC je množica tistih točk, ki hkrati ležijo v notranjosti kotov $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB$.

Definicija 2.16. Če je točka D v notranjosti kota $\angle BAC$, pravimo, da je *poltrak $\overrightarrow{AD}$ v notranjosti* kota $\angle BAD$.

Če je $\overrightarrow{AD}$ poltrak v notranjosti kota $\angle BAC$, pravimo, da je $\angle BAC$ *vsota kotov* $\angle BAD$ in $\angle DAC$.

Trditev 2.17. *Naj bo $\angle BAC$ dani kot in $\overrightarrow{AD}$ poltrak v njegovi notranjosti. Naj bo $\angle D'A'C' \cong \angle DAC, \angle B'A'D' \cong \angle BAD$ ter naj poltraka $\overrightarrow{A'B'}$ in $\overrightarrow{A'C'}$ ležita na nasprotnih straneh premice $A'D'$. Potem poltraka $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ tvorita kot in velja $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. Poltrak $\overrightarrow{A'D'}$ leži v notranjosti kota $\angle B'A'C'$. Pravimo, da seštevanje skladnih kotov ohranja skladnost.*

Dokaz. Povežimo točki B in C, da dobimo trikotnik BAC. Potem mora po trditvi 2.4 poltrak $\overrightarrow{AD}$ sekati stranico BC. Naj bo točka D od sedaj naprej to presečišče. Torej točke B, D, C ležijo na skupni premici in D leži med B in C. Nadomestimo sedaj točke B', C', D' z novimi na istih poltrakih, da bo veljalo: $AB \cong A'B', AC \cong A'C', AD \cong A'D'$. Ker je po predpostavki $\angle D'A'C' \cong \angle DAC, \angle B'A'D' \cong \angle BAD$ iz (C6) sledi skladnost trikotnikov BAD in $B'A'D'$ (posebej $BD \cong B'D'$) ter DAC in $D'A'C'$ (posebej $DC \cong D'C'$).



Naj bo E' taka točka na premici $B'D'$, da velja $B' * D' * E'$. Torej sta kota $\angle A'D'E'$ in $\angle A'D'B'$ suplementarna. Ker sta kota $\angle A'D'B'$ in $\angle ADB$ skladna in velja trditev 2.14, sta skladna tudi $\angle ADC$ in $\angle A'D'E'$. Skladnost je ekvivalenčna relacija, torej sta zaradi tranzitivnosti skladna tudi kota $\angle A'D'E'$ in $\angle A'D'C'$. Ker pa poltraka $\overrightarrow{D'C'}$ in $\overrightarrow{D'E'}$ ležita na isti strani premice $A'D'$ (ker sta E' in C' na isti strani), morata biti zaradi aksioma (C4) enaka. Torej točke B', D', C' ležijo na isti premici in po aksiomu (C3) je $BC \cong B'C'$. Iz skladnosti trikotnikov BAD, $B'A'D'$ sledi skladnost kotov $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ in ob ponovni uporabi (C6) sta skladna tudi trikotnika ABC in $A'B'C'$, kar nam da željeni rezultat: $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

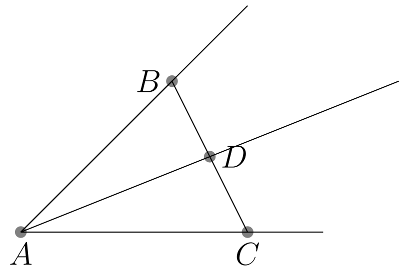
Točke B', D', C' ležijo na isti premici in $\angle D'A'C'$ je kot, torej B', A', C' ne ležijo na isti premici, ampak tudi tvorijo kot. Ker B' in C' ležita na nasprotnih straneh premice $A'D'$, velja namreč $B' * D' * C'$, je D' v notranjosti kota $\angle B'A'C'$ in zato je poltrak $\overrightarrow{A'D'}$ v notranjosti kota $\angle B'A'C'$. $\square$

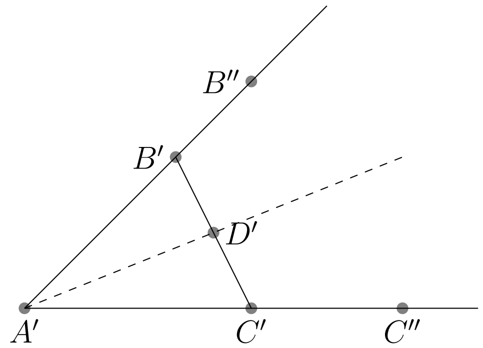
Definicija 2.18. Naj bosta dana kota $\angle BAC$ in $\angle EDF$. Kot $\angle BAC$ je *majši* od kota $\angle EDF$ (pišemo $\angle BAC < \angle EDF$), če obstaja poltrak $\overrightarrow{DG}$ v notranjosti kota $\angle EDF$, da je $\angle BAC \cong \angle GDF$. Hkrati je kot $\angle EDF$ *večji* od kota $\angle BAC$.

Opomba: Za relacijo $<$ na kotih velja analogna trditev kot je trditev 2.10 za daljice.

Trditev 2.19. *Za dana skladna kota $\angle BAC, \angle B'A'C'$ in poltrak $\overrightarrow{AD}$ v notranjosti kota $\angle BAC$, obstaja poltrak $\overrightarrow{A'D'}$ v notranjosti kota $\angle B'A'C'$, da velja: $\angle DAC \cong D'A'C'$ in $\angle BAD \cong B'A'D'$.*

Dokaz. Naj bo dan trikotnik BAC in naj bo kot $\angle B''A'C''$ skladen kotu $\angle BAC$ (obstaja po (C4)). Naj bo $\overrightarrow{AD}$ poltrak v notranjosti kota $\angle BAC$. Po trditvi 2.4 lahko privzamemo, da D leži na stranici BC ($B * D * C$). Po (C1) obstaja točno določena točka B' na poltraku $\overrightarrow{A'B''}$, da velja $AB \cong A'B'$, in obstaja točno določena točka C' na poltraku $\overrightarrow{A'C''}$, da velja $AC \cong A'C'$. Po (C6) sledi, da sta trikotnika BAC in $B'A'C'$ skladna. Pokazati želimo, da obstaja taka točka D' v notranjosti kota $\angle B'A'C'$ (natančneje na stranici $B'C''$), da bo veljalo: $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ in $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$.

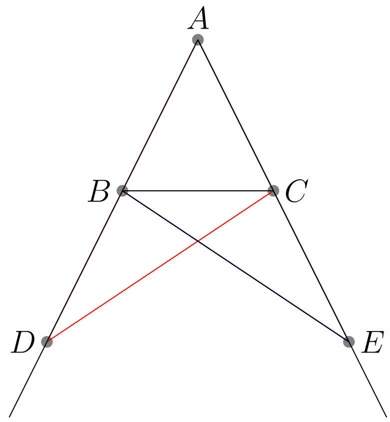




Po aksiomu (C1) obstaja točka D' na daljici $B'C'$ ($B' * D' * C'$), da velja $C'D' \cong CD$. Ker je tudi $AC \cong A'C'$ in $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$, sta po (C6) trikotnika ACD in $A'C'D'$ skladna. Torej tudi $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$. Enako (ker je po trditvi 2.7 tudi $BD \cong B'D'$) sledi $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$. $\square$

Trditev 2.20. *Če je trikotnik enakokrak, sta kota ob osnovnici skladna.*

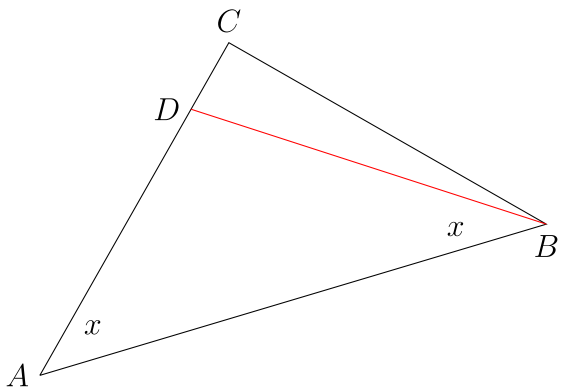
Dokaz. Naj bo trikotnik ABC enakokrak, s skladnima stranicama AC in AB. Pokazati želimo, da sta tudi kota $\angle ABC$ in $\angle ACB$ skladna. Na premici skozi A in B lahko po (B2) izberemo točko D, da velja $A * B * D$. Po aksiomu (C1) obstaja na premici skozi A in C točka E, da je $AD \cong AE$. Ker je $AC \cong AB$ in $AD \cong AE$ in stranice oklepajo isti kot $\angle BAC$, sta trikotnika ADC in AEB skladna po (C6). Torej sta skladni tudi stranici DC in EB ter koti $\angle ADC \cong \angle AEB, \angle ACD \cong \angle ABE$. Ker po trditvi 2.7 odštevanje skladnih daljic ohranja skladnost, sta daljici BD in CE skladni. Iz (C6) sledi tudi skladnost trikotnikov DBC in ECB. Sedaj pa upoštevamo da, če od dveh skladnih kotov odštejemo enak kot, spet dobimo skladna kota (trditev 2.19). Torej $\angle EBA - \angle EBC = \angle ABC, \angle DCA - \angle DCB = \angle ACB$ in $\angle ABC \cong \angle ACB$.



□

Trditev 2.21. *Če sta kota ob osnovnici trikotnika skladna, je trikotnik enakokrak.*

Dokaz. Dokaz bo potekal z uporabo protislovja. Vzemimo poljuben trikotnik ABC, katerega kota ob osnovnici sta skladna. Brez škode za splošnost lahko za osnovnico izberemo stranico AB.



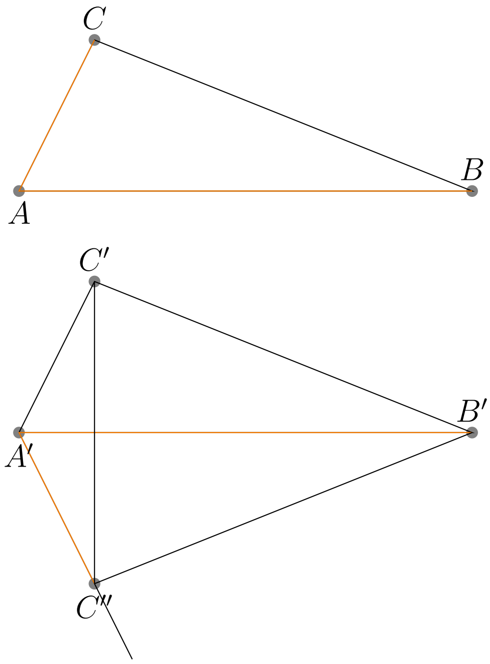
Če stranici AC in BC nista skladni, je ena krajša od druge. Brez škode za splošnost naj bo $BC < AC$. Po aksiomu (C1) obstaja taka točka D, da je $AD \cong BC$ in po (B2) velja $A * D * C$. Ker je $AD \cong BC, \angle CAB \cong \angle CBA$ in $AB = AB$, sta po aksiomu (C6) trikotnika ABD in ABC skladna. Torej je kot $\angle ABD$ skladen kotu $\angle BAC$, kar pa je v nasprotju z enoličnostjo v (C4). □

Trditev 2.22. *Za dano daljico AB obstaja enakokrak trikotnik, katerega osnovnica je daljica AB.*

Dokaz. Naj bo dana daljica AB. Po aksiomu (A3) obstaja točka C, ki ne leži na AB. Točke A, B, C tvorijo trikotnik. Če sta kota pri ogliščih A in B skladna, je trikotnik enakokrak. Če nista, je eden od kotov večji od drugega. Naj bo $\angle CAB < \angle CBA$. Potem po (C4) obstaja tak poltrak $\overrightarrow{BE}$ v notranjosti kota $\angle CBA$, da sta kota $\angle CAB$ in $\angle EBA$ skladna. Potem po trditvi 2.4 poltrak $\overrightarrow{BE}$ seka stranico AC v točki D. Sedaj sta kota ob osnovnici trikotnika DAB skladna, torej je trikotnik DAB enakokrak. □

Trditev 2.23. *Če imata trikotnika $ABC, A'B'C'$ paroma skladne stranice, tj. $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, potem sta skladna.*

Dokaz. Naj bosta $ABC, A'B'C'$ trikotnika s paroma skladnimi stranicami. Uporabimo aksiom (C4) in prenesemo kot $\angle CAB$ na nasprotno stran poltraka $\overrightarrow{A'B'}$ od C'. Po (C1) obstaja točka C'' na kraku tega kota, da velja $AC \cong A'C''$. Ker je po predpostavki $AB \cong A'B'$, sta po aksiomu (C6) trikotnika ABC in $A'B'C''$ skladna. Oglejmo si sedaj trikotnik $A'C'C''$. Ker je $A'C' \cong AC \cong A'C''$ in je skladnost ekvivalenčna relacija, je zaradi tranzitivnosti $A'C' \cong A'C''$ in trikotnik je enakokrak. Po trditvi 2.20 sta kota $\angle A'C'C''$ in $\angle A'C''C'$ skladna. Podobno je tudi $B'C' \cong B'C''$ in kota $\angle B'C'C'', \angle B'C''C'$ sta skladna. Ker seštevanje skladnih kotov ohranja skladnost (trditev 2.17), sledi $\angle A'C'B' \cong \angle A'C''B'$. Zaradi skladnosti trikotnikov je pravtako $\angle A'C''B' \cong \angle ACB$ in po tranzitivnosti sledi $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Aksiom (C6) nam da željeni rezultat, trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta skladna.



□

Trditev 2.24. *Trikotnika sta skladna, če imata skladna dva kota in stranico med njima.*

Dokaz. Naj bosta ABC in $A'B'C'$ taka trikotnika, da velja: $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ in $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Po aksiomu (C1) obstaja točka D na poltraku $\overrightarrow{AC}$, da je $AD \cong A'C'$. Torej sta po aksiomu (C6) trikotnika ABD, $A'B'C'$ skladna in velja $\angle ABD \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$, kar pomeni, da je $D = C$ (enoličnost v (C4)). Sedaj je $AC \cong A'C'$ in po (C6) sta trikotnika $ABC, A'B'C'$ skladna. □

3. Evklidova ravnina

Ker med aksiomi Hilbertove ravnine ni aksioma o vzporednici, ta predstavlja model nevtralne geometrije, ki tvori bazo tako za evklidsko kot tudi neevklidsko geometrijo.

V tem razdelku bom predstavila nekaj trditev iz Evklidove geometrije, ki so mi osebno bolj zanimive, dokazi pa ne bodo tako strogi kot do sedaj (nekatere bom tudi izpustila).

Definicija 3.1. Dve različni premici sta *vzporedni*, če nimata skupnih točk.

(P) Aksiom o vzporednici

Skozi poljubno točko, ki ne leži na dani premici, obstaja natanko ena vzporednica k tej premici.

Opomba: V dani obliki ga je pred Hilbertom zapisal že škotski matematik John Playfair.

Eden od „osnovnih“ objektov v geometriji, ki ga do sedaj še nismo omenili, je tudi krožnica.

Definicija 3.2. Naj bosta O in A dani različni točki. *Krožnica* Γ s središčem O in radijem OA je množica vseh točk B, za katere velja: $OA \cong OB$.

Definicija 3.3. Naj bo Γ krožnica s središčem O in radijem OA. Točka B leži *znotraj krožnice*, če je $OB < OA$ in *zunaj krožnice*, če je $OA < OB$.

Premica ali druga krožnica sta *tangentni* na dano krožnico, če imata z njo natanko eno skupno točko.

Hilbertov aksiom: Naj bosta K_1 in K_2 krožnici. Če K_2 vsebuje točke, ki ležijo v notranjosti K_1 in tudi točke, ki ležijo zunaj K_1, imata K_1 in K_2 neprazen presek.

Definicija 3.4. *Evklidova ravnina* je Hilbertova ravnina, ki zadošča Hilbertovemu aksiomu in aksiomu o vzporednici.

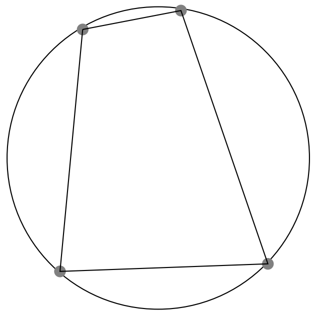
Smo torej sedaj že dobili vsem najbolj poznano kartezično ravnino $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$? Ne še. Aksiomi, ki smo jih obravnavali do sedaj, nam zagotavljajo zgolj števno neskončno točk na premici, $\mathbf{R}$ pa jih ima neštevno neskončno. Potrebujemo torej močnejši pogoj kontinuuma, ki nam ga da

Dedekindov aksiom: naj bo p premica katere vse točke so razdeljene v dve neprazni podmnožici S in T, tako da nobena točka iz ene podmnožice ne leži med dvema točkama iz druge podmnožice. Potem obstaja natanko ena taka točka P, za katero velja: za poljubni $A \in S, B \in T$ je bodisi $A = P$ bodisi $B = P$ bodisi P leži med A in B.

Izkaže se [1, Corollary 21.3] , da velja:

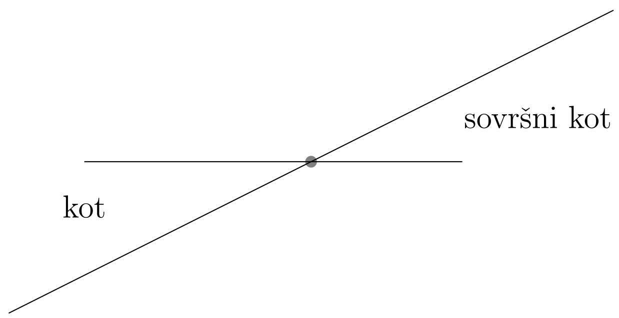
Izrek 3.5. *Hilbertova ravnina skupaj z aksiomom o vzporednici in Dedekindovim aksiomom je izomorfna realni kartezični ravnini* $\mathbf{R}^2$.

Definicija 3.6. *Tetivni štirikotnik* je množica štirih izbranih točk na krožnici in daljic, ki zaporedoma povezujejo te točke.



Definicija 3.7. Točka $D \in AB$ je *razpolovišče* dane daljice, če je $AD \cong DB$.

Definicija 3.8. *Sovršna kota* sta kota, ki ju določata nasprotno usmerjena poltraka na dveh premicah.



Trditev 3.9. *Sovršna kota sta skladna.*

Dokaz. Naj bosta α, α' sovršna kota, ki sta oba suplementarna istemu kotu β. Kot β je skladen s samim seboj, torej sta skladna tudi α in α'. $\square$

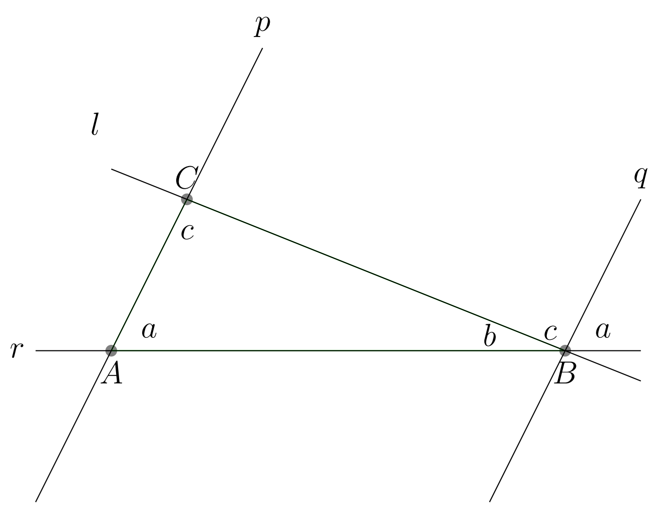
Definicija 3.10. *Pravi kot* je kot, ki je skladen s svojim suplementarnim kotom.

Trditev 3.11 (Evklid)**.** *Če dve vzporedni premici sekamo s tretjo (presečnico), sta notranja kota, ki ležita vsak v svoji polravnini glede na prečnico, skladna.*

Dokaz. Naj bosta p in q dani vzporednici, ki ju seka premica r. Pa recimo, da notranja kota, ki ležita vsak v svoji polravnini glede na presečnico, nista enaka. Torej mora biti eden večji od drugega in je zato vsota notranjih kotov na eni strani presečnice manjša od dveh pravih kotov. Potem pa se po petem Evklidovem postulatu premici p in q sekata, kar je protislovje. $\square$

Trditev 3.12. *Vsota notranjih kotov poljubnega trikotnika je enaka dvema pravima kotoma.*

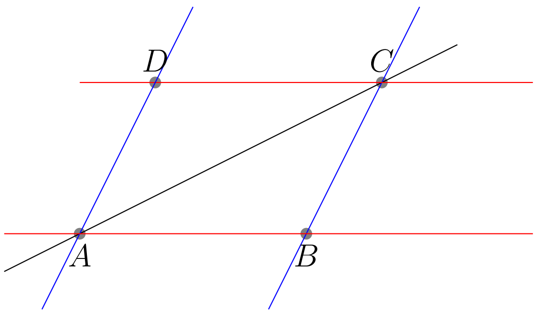
Dokaz. Naj bodo A, B, C tri nekolinearne točke, ki tvorijo trikotnik. Naj bo p premica skozi A in C (aksiom A1). Zaradi aksioma o vzporednici lahko skozi točko B konstruiramo vzporednico q k premici p. Sedaj dvakrat uporabimo trditev 3.11: ker premica skozi B in C seka p in q, lahko skladno prenesemo kot c in podobno kot a.



$\square$

Definicija 3.13. *Paralelogram* je podmnožica ravnine, ki ga omejujeta dva para vzporednih premic.

Trditev 3.14. *Nasprotni stranici paralelograma sta skladni.*

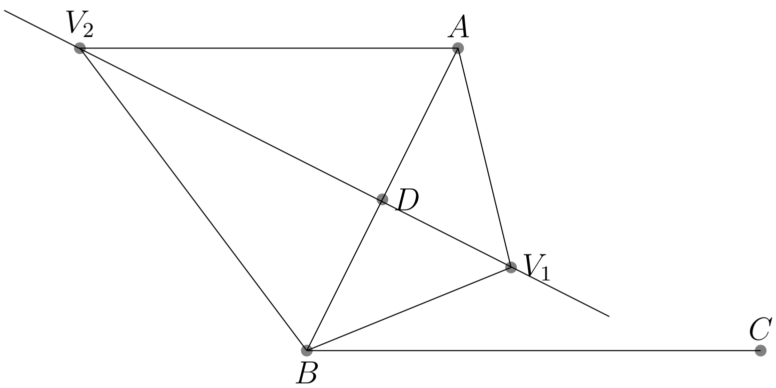


Dokaz.

Naj bosta premici AB in CD vzporedni ter pravtako premici AD in BC. $ABCD$ je paralelogram, ki ga premica skozi A in C razdeli na dva trikotnika ACD in ACB. Po trditvi 3.11 je kot $\angle DAC$ skladen kotu $\angle ACB$ in pravtako je kot $\angle CAB$ skladen kotu $\angle ACD$. Torej sta po trditvi 2.24 skladna tudi trikotnika ACD in CAB, posebej $AB \cong CD$ in $AD \cong BC$. $\square$

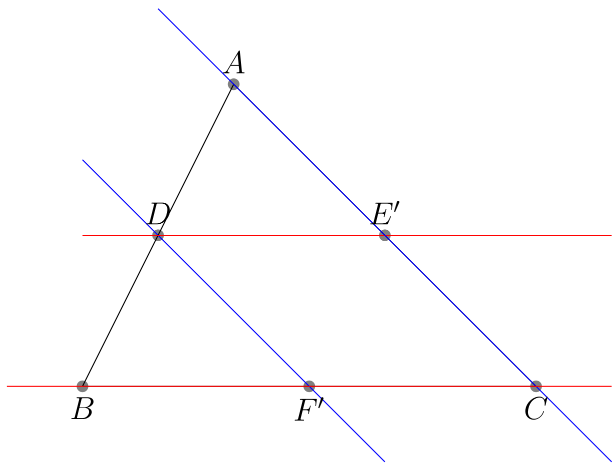
Trditev 3.15. *Naj bo ABC poljuben trikotnik. Točka D naj označuje razpolovišče stranice AB in E razpolovišče stranice AC. Potem je daljica DE vzporedna z osnovnico BC in dolga polovico njene dolžine (kar pomeni, da je $DE + DE = BC$).*

Dokaz. Označimo z D razpolovišče stranice AB in poglejmo, zakaj ta sploh obstaja: Po trditvi 2.22 lahko na vsaki strani daljice AB konstruiramo enakokrak trikotnik. Po (A1) lahko skozi vrhova obeh trikotnikov V_1, V_2 potegnemo premico, ki seka daljico AB v točki D. Trikotnika V_2AV_1 in V_2BV_1 imata paroma skladne stranice in sta zato po trditvi 2.23 skladna. Torej sta kota $\angle AV_2V_1$ in $\angle BV_2V_1$ skladna. Oglejmo si sedaj trikotnika ADV_2 in BDV_2. Ker imata skladni dve stranici in kot med njima, sta po (C6) skladni tudi tretji stranici, torej je $DA \cong DB$ in točka D je res razpolovišče daljice AB.



Opomba: Kota $\angle ADV_2$ in $\angle BDV_2$ sta suplementarna in hkrati skladna, torej sta prava kota. Torej obstaja pravokotnica skozi izbrano točko na dani premici.

Skozi D potegnemo vzporednici na stranici AC in BC ter dobljeni presečišči označimo z E' in F'.



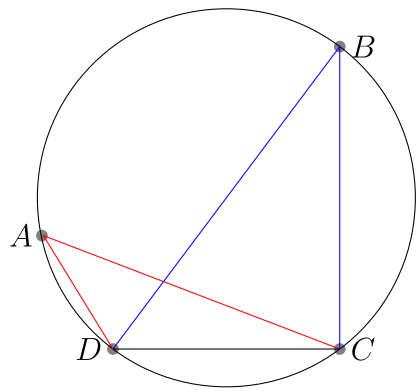
Ker sta premici skozi DE' in BC vzporedni, sta po trditvah 3.11 in 3.9 kota $\angle ADE'$ in $\angle DBF'$ skladna. Podobno sta premici skozi AC in DF' vzporedni in zato kota $\angle DAE'$ in $\angle BDF'$ skladna. Ker je daljica AD skladna z DB, sta po trditvi 2.24 skladna tudi trikotnika ADE' in DBF'. Torej je $AE' \cong DF'$ in $DE' \cong BF'$.

Oglejmo si sedaj paralelogram $DE'CF'$. Ker morata biti nasprotni stranici skladni, je $DF' \cong E'C$ in po tranzitivnosti $AE' \cong E'C$, torej je E' razpolovišče stranice AC oziroma $E = E'$. Podobno za F'. Ker je $DE' \cong BF'$ in je F' razpolovišče BC, je dolžina DE res enaka polovici dolžine BC. □

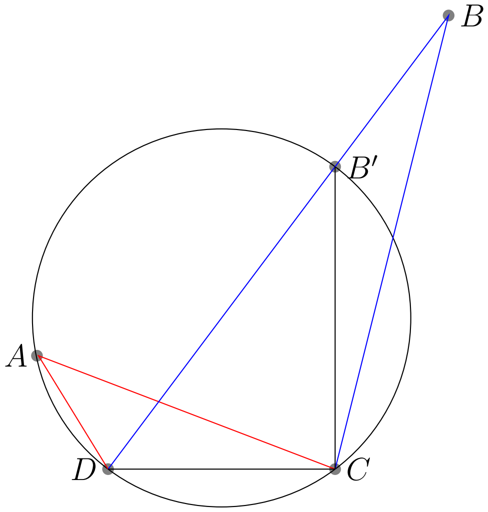
Opomba: Naslednji trditvi uporabim v nadaljevanju dela, zato ju bom navedla, dokaza pa sta zgolj nakazana [1, Proposition 5.8, Theorem 5.9].

Trditev 3.16. *Naj bodo A, B, C, D take štiri točke v ravnini, da A in B ležita na isti strani premice CD. Te točke ležijo na isti krožnici natanko tedaj, ko sta kota $\angle DAC$ in $\angle DBC$ skladna.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Če vse točke ležijo na isti krožnici, sta kota skladna, ker pripadata istemu loku DC (brez dokaza).



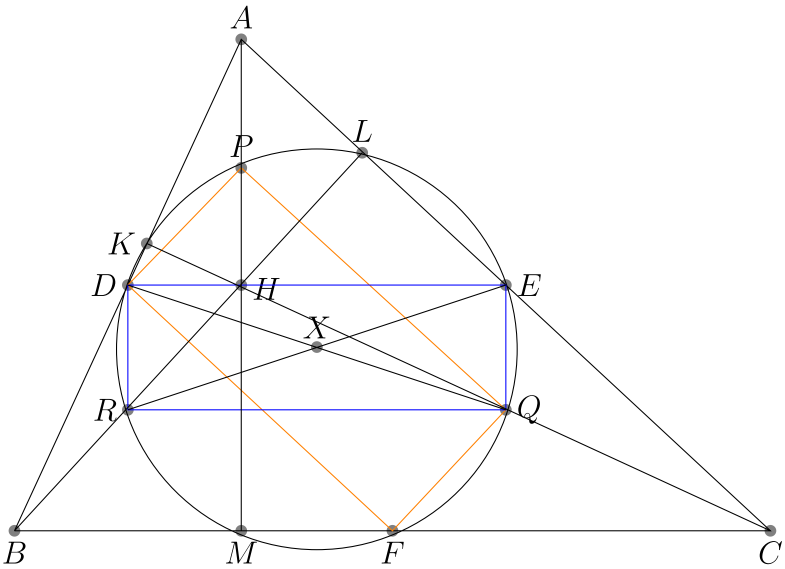
$\Leftarrow$ Naj bosta kota $\angle DAC$ in $\angle DBC$ skladna. Ker točke A, D in C ne ležijo na skupni premici, tvorijo trikotnik, ki mu lahko očrtamo krožnico [5, Očrtana krožnica], ki naj seka daljico BD v točki B'. Kot prej sta kota $\angle DAC$ in $\angle DB'C$ kota nad istim lokom in zato skladna. Torej mora biti $B = B'$.



∎

Trditev 3.17. *V vsakem trikotniku obstaja devet točno določenih točk, ki vse ležijo na isti krožnici. Te točke so:*

- *razpolovišča stranic trikotnika,*
- *nožišča trikotnikovih višin,*
- *središča daljic, ki povezujejo oglišča trikotnika z višinsko točko.*



Dokaz. Po trditvi 3.15 je daljica DE vzporedna z osnovnico trikotnika ABC. Podobno je v trikotniku BCH, daljica RQ vzporedna z BC. Torej je zaradi tranzitivnosti DE vzporedna z RQ. Če uporabimo trditev še na trikotniku ACH, vidimo, da je EQ vzporedna z AH in v trikotniku ABH je DR vzporedna z AH. Sledi: EQ je vzporedna z DR. Ker je daljica AH del višine na osnovnico trikotnika ABC, sta EQ in DR pravokotni na DE in RQ. Torej točke $DEQR$ tvorijo pravokotnik. Naj bo točka X središče očrtane krožnice Γ tega pravokotnika. Torej točke D, E, Q, R ležijo na krožnici Γ. Pokazati želimo, da vse ostale točke tudi ležijo na tej krožnici. Kota $\angle RDE$ in $\angle RLE$ sta oba prava kota, zato je po trditvi 3.16, $DLER$ tetivni štirikotnik. Ker tri točke točno določajo krožnico, je krožnica tega tetivnega štirikotnika kar enaka Γ. Torej tudi L leži na Γ. Podobno za točko K ($DKEQ$ je tetivni štirikotnik). Če sedaj vzamemo stranico AC za osnovnico trikotnika in ponovimo korake dokaza, dobimo: $DPQF$ je pravokotnik z istim središčem X in tudi točki P in F ležita na Γ. Štirikotnik $MDPF$ je tetivni štirikotnik in M je zadnja iskana točka, ki leži na Γ. □

Definicija 3.18. Trikotnika ABC, $A'B'C'$ sta *podobna*, če imata paroma skladne vse notranje kote (to je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$) in se ujemata v razmerju stranic: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

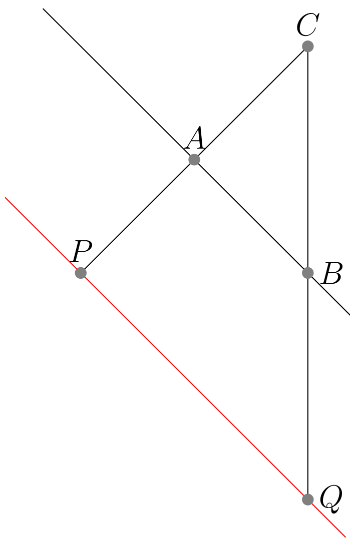
Trditev 3.19. *Trikotnika, ki imata skladne vse notranje kote, sta podobna* [1, Proposition 20.1].

3.1. **Geometrijske konstrukcije.** Ko se danes učenci v osnovnih šolah prvič srečajo s pojmoma vzporedne premice in pravokotnice, ju zelo enostavno konstruirajo s pomočjo geotrikotnika. Kaj pa včasih, ko tega ni bilo? Vseeno so znali narediti pravilne konstrukcije samo z uporabo neoznačenih ravnil in prenašalcev daljic, saj so upoštevali trditve aksiomov. Pa si poglejmo kako.

Opomba: Kot pri trditvah o krogih, bi tudi pri konstrukcijah za korekten dokaz potrebovali veliko dodatnih trditev. Med dokazovanjem se tako pojavi nekaj „srednješolskih" trditev, ki niso dokazane. [2, The Foundations of Geometry]

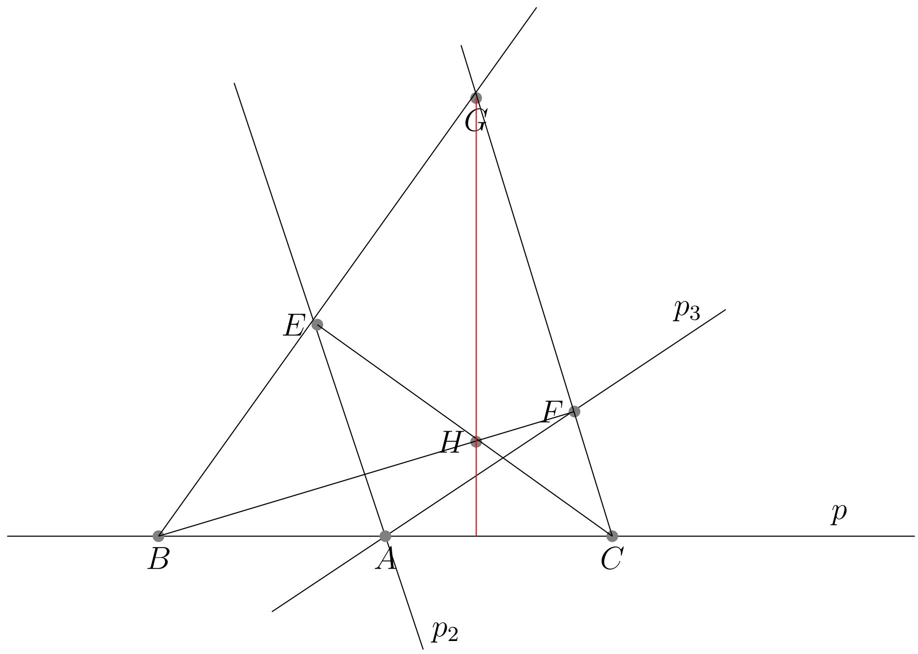
Konstrukcija vzporednice skozi točko P k dani premici p

Na premici p izberemo poljubno točko A in z ravnilom načrtamo premico PA. Na njej obstaja, zaradi prvega aksioma skladnosti, točka C, na nasprotni strani od A kot P, da sta daljici PA in AC skladni. Izberemo si še točko $B \in p$ ($B \neq A$): spet obstaja točka Q na drugi strani premice p kot C, da je $CB \cong BQ$. Točke ACB in PCQ tvorijo dva trikotnika, ki se ujemata v razmerju dveh stranic in kotu med njima. Trikotnika sta si torej podobna in premica skozi P in Q je zato vzporedna dani premici p.



Konstrukcija pravokotnice k dani premici p

Izberemo poljubno točko $A \in p$ ter točki B, C tako, da velja $AB \cong AC$. Skozi A potegnemo poljubni različni premici p_2 in p_3. Zaradi obstoja skladnih daljic lahko na vsaki od teh dveh premic poiščemo točki E in F, da bo veljalo: $AE \cong AF \cong AB$. Skozi točki B in E ter C in F potegnemo premici, ki nista vzporedni, torej imata presečišče, ki ga označimo s točko G. Točke B, C, E so nekolinearne, torej tvorijo trikotnik. Daljice AB, AE, AF in AC so skladne in imajo skupno eno od krajišč, ležijo torej na krožnici s središčem v točki A. Natančneje, kota $\angle BEC$ in $\angle BFC$ sta kota v polkrogu s premerom BC in zato oba prava kota. Daljica EC je torej pravokotna na stranico trikotnika in poteka skozi nasprotno oglišče - je ena od višin trikotnika. Enako velja za daljico FB. Presečišče višin označimo s točko H. Ker pa se vse tri višine v trikotniku sekajo v isti točki je premica skozi G in H nosilka tretje višine, torej iskana pravokotnica na dano premico p.



4. Ploščina

4.1. **Evklidovo pojmovanje ploščine.** Smo v Hilbertovi ravnini. Trikotnik ABC naj bo podmnožica ravnine, ki vsebuje daljice AB, AC in BC (ki jim rečemo stranice trikotnika) in vse njegove notranje točke (od tu naprej trikotnik ABC pomeni lik, ne zgolj krivuljo).

Definicija 4.1. Dva različna *trikotnika se ne prekrivata*, če imata skupna kvečjemu oglišča ali dele stranic, vendar nobene notranje točke.

Lik je podmnožica ravnine, sestavljena iz končne unije neprekrivajočih se trikotnikov.

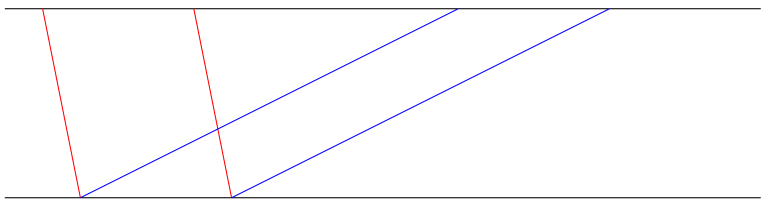
Točka T *leži v notranjosti* lika P, če obstaja trikotnik, ki je v celoti vsebovan v P in je T notranja točka tega trikotnika.

Dva lika se ne prekrivata, če nimata skupnih notranjih točk (če je $x \in P \cap P'$, potem x ni notranja za P in ni notranja za P').

Definicija 4.2. *Triangulacija* lika z oglišči $A_1A_2 \ldots A_n$ je taka delitev lika na trikotnike z oglišči v točkah $A_1, A_2, \ldots, A_n$, da poljubna dva trikotnika bodisi nimata nobene skupne točke bodisi imata skupno le oglišče ali celotno stranico.

Naj bo P lik s triangulacijo $P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$ in P' lik s triangulacijo $P' = T_1' \cup T_2' \cup \ldots \cup T_n'$. Triangulaciji sta ekvivalentni, če je trikotnik T_i skladen s trikotnikom T_i' za vsak i.

Evklid: „Poljubna paralelograma med dvema vzporednicama, ki imata skupno osnovnico, sta enaka."



Če pogledamo sliko, je očitno, da taka dva paralelograma v splošnem nista skladna. Torej je moral imeti Evklid v mislih neko drugo merilo. In to je ploščina.

Danes ploščino lika v realni kartezični ravnini definiramo s pomočjo mere, vendar pa v Hilbertovi ravnini ni realnih števil in poiskati želimo veliko bolj elementarno definicijo.

Evklid je torej preučeval ploščino območja, vendar ni podal njene eksaktne definicije, pač pa je definiral ploščino s tem, da je določil njene „geometrijske" lastnosti:

(1) Skladni liki so „enaki" (ploščinsko enaki).
(2) Združevanje likov brez prekrivanja ohranja ploščino (ki je neodvisna od načina združevanja).
(3) Razdruževanje likov brez prekrivanja ohranja ploščino (ki je neodvisna od načina razdruževanja).
(4) Polovice „enakih" likov so „enake".
(5) Celota je večja kot njen del: če je prvi lik vsebovan v drugem, potem je ploščina prvega lika nujno manjša od ploščine drugega.
(6) „Enaka" kvadrata imata skladne stranice (glej (1)).

Evklid je na ta način definiral neko novo relacijo med objekti ravnine (ploščino), pravkar navedene lastnosti pa privzel kot aksiome, ki jo določajo. S pomočjo tako vpeljane relacije enakih ploščin je dokazal Pitagorov izrek.

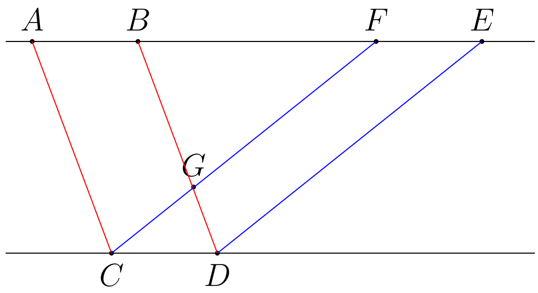
Opomba: Precizno formulacijo pete Evklidove lastnosti nam podaja
Zoltov aksiom (Z) : Naj bosta P in Q lika in naj bo Q vsebovan v P. Če ima $P - Q$ neprazno notranjost, potem P in Q nimata enake ploščine.

Naslednja definicija opredeljuje ploščino, kot jo je razumel Evklid, kasneje pa bomo definirali ploščino kot funkcijo.

Definicija 4.3. Dva lika P in P' imata *enako ploščino*, če obstajata taka lika Q in Q', da velja:

(1) P in Q se ne prekrivata.
(2) P' in Q' se ne prekrivata.
(3) Q in Q' imata ekvivalentni triangulaciji.
(4) $P \cup Q$ in $P' \cup Q'$ imata ekvivalentni triangulaciji.

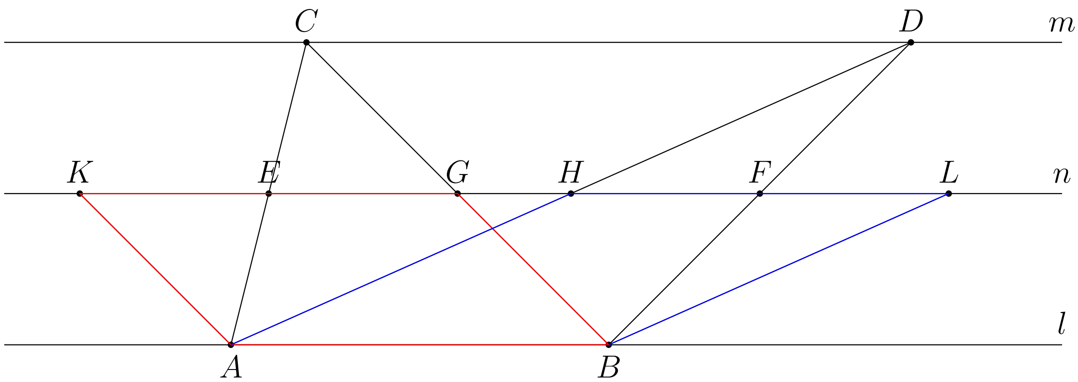
Trditev 4.4. *Paralelograma s skupno osnovnico med dvema vzporednicama imata enako ploščino.*



Dokaz. Naj bosta $ABCD$ in $CDEF$ paralelograma s skupno osnovnico. Definirajmo: $P := ABCD = \{CDG, CGB, CBA\}$, $P' := CDEF = \{CDG, DFG, DEF\}$ in $Q := \{BGF\} =: Q'$. S tem je zadoščeno prvim trem zahtevam definicije 4.3. Naj bo še $P \cup Q = \{CGB, CBA, BGF, CDG\}$ in $P' \cup Q' = \{BGF, FGD, FDE, CDG\}$. Ker imata trikotnika ACF in BDE po trditvi 3.14 skladne stranice, sta po trditvi 2.23 skladna. Torej sta triangulaciji likov $P \cup Q$ in $P' \cup Q'$ ekvivalentni in paralelograma $ABCD$ in $CDEF$ imata enako ploščino. □

Trditev 4.5. *Trikotnika s skupno osnovnico med dvema vzporednicama imata enako ploščino.*

Dokaz. Naj bosta ABC in ABD trikotnika s skupno osnovnico na premici l in vrhovoma na njeni vzporednici m. Naj bo točka E razpolovišče stranice AC, skozi katero potegnemo premico n vzporedno z l. Naj premica n seka daljico BD v točki F. Potem po trditvi 3.15 sledi, da je F razpolovišče daljice BD. Sedaj skozi A konstruiramo vzporednico z BC, ki naj seka premico n v točki K in skozi B vzporednico z AD, ki seka n v točki L.

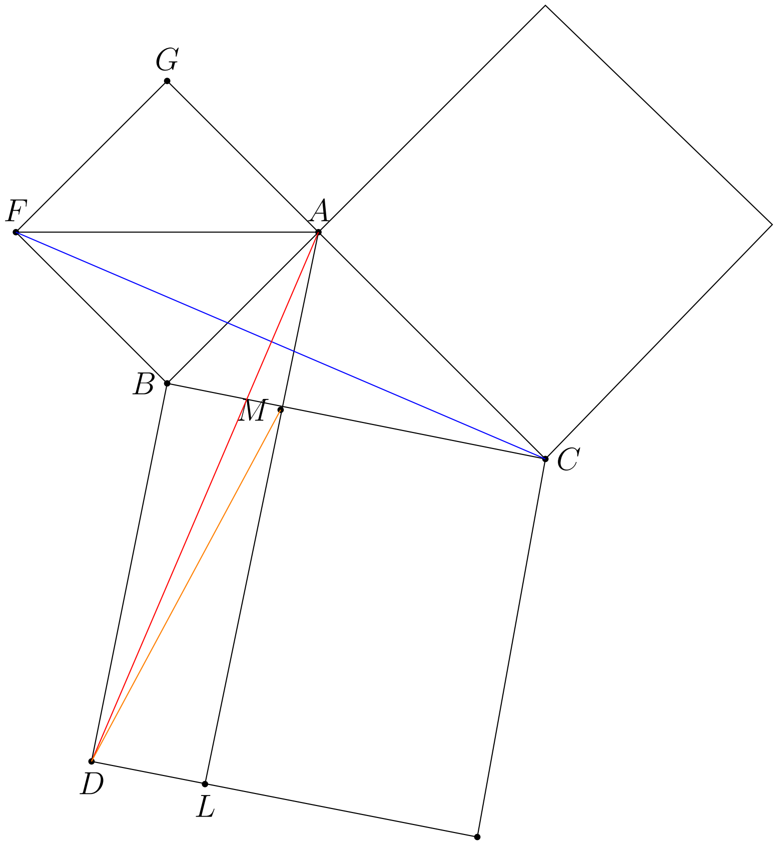


Ker sta premici skozi BC in AK vzporedni, sta po trditvi 3.11 kota $\angle EAK$ in $\angle ECG$ skladna, kota $\angle GEC$ in $\angle AEK$ pa sta sovršna in zato pravtako skladna (trditev 3.9). Torej sta skladna tudi trikotnika CEG in AEK (trditev 2.24). Naj bo $P := ABC = \{AGB, AEG, EGC\}$, $P' := ABGK = \{AGB, AEG, AEK\}$, $Q := AEK$ in $Q' := EGC$. Torej imata Q in Q' ekvivalentni triangulaciji, $P \cup Q$ in $P' \cup Q'$ imata isti triangulaciji in po trditvi 4.3 ima trikotnik ABC enako ploščino kot paralelogram $ABGK$.

Podobno je $DFH \cong BFL$ in trikotnik ABD ima enako ploščino kot paralelogram $ABHL$.

Dobljena paralelograma imata skupno osnovnico AB in po prejšnji trditvi enako ploščino. Zaradi tranzitivnosti sta torej ploščinsko enaka tudi trikotnika ABC in ABD. $\square$

Izrek 4.6. *V pravokotnem trikotniku je vsota ploščin kvadratov, katerih stranici ustrezata katetama trikotnika, enaka ploščini kvadrata s stranico, ki ustreza hipotenuzi trikotnika.*



Dokaz. Trikotnik FBA je polovica kvadrata $FBAG$ in ima po trditvi 4.5 enako ploščino kot trikotnik FBC. Trikotnika FBC in ABD imata dve skladni stranici in kot med njima (kot pri oglišču B), torej sta po aksiomu (C6) skladna ter imata po definiciji 4.3 enako ploščino. ABD in MBD sta ponovno trikotnika z isto osnovnico (stranica BD) med dvema vzporednicama, zato imata enako ploščino. MBD je polovica pravokotnika $MBDL$. Torej imata kvadrat $FBAG$ in pravokotnik $MBDL$ enako ploščino.

Enako konstrukcijo naredimo na kvadratu s stranico AC in dokaz je končan. $\square$

Opomba: Stari Grki so sicer poznali enačbo $c^2 = a^2 + b^2$, vendar so jo znali rešiti le za posebna cela števila, tako imenovane pitagorejske trojice, Evklidov dokaz pa velja za poljuben pravokotni trikotnik.

4.2. **Ploščina kot funkcija.** Evklidova definicija ploščine je geometrijska, ko pa se kot osnovnošolci prvič srečamo s pojmom ploščine lika, nam je ta predstavljena s formulo. Poiščimo torej funkcijo, ki bo neki podmnožici ravnine (danemu liku) priredila realno število (njegovo ploščino).

Definicija 4.7. *Urejena Abelova grupa* je Abelova grupa G skupaj s podmnožico P, katere elementi zadoščajo pogojema:

(1) Če sta $a, b \in P$, potem je tudi $a + b \in P$
(2) Za vsak $a \in G$ velja natanko ena od trditev:
$a \in P, a = 0, -a \in P$ (aksiom trihotomije)

$a > b$, če $a - b \in P$. Množica P je množica *pozitivnih elementov*.

Definicija 4.8. *Ploščinska mera* na Hilbertovi ravnini je taka funkcija α, definirana na množici vseh likov, z vrednostmi v urejeni Abelovi grupi G, da zanjo velja:

(1) Za vsak trikotnik T je $\alpha(T) > 0$.
(2) Če sta T in T' skladna trikotnika, potem je $\alpha(T) = \alpha(T')$.
(3) Za lika P in Q, ki se med seboj ne prekrivata, velja $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$.

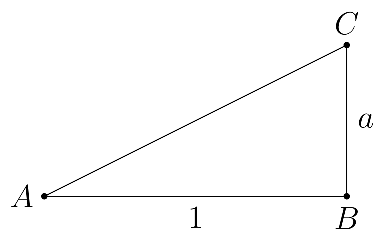
$\alpha(P)$ imenujemo *ploščina* lika P.

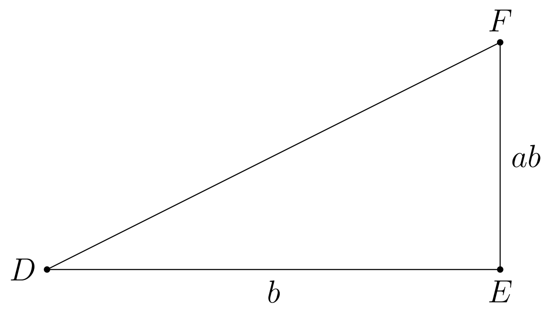
Lastnosti funkcije α [1, Proposition 23.1]:

(1) Če je P lik z neprazno notranjostjo, je $\alpha(P) > 0$.
(2) Če sta P in P' lika z ekvivalentnima triangulacijama, je $\alpha(P) = \alpha(P')$.
(3) Če sta P in P' lika z enako ploščino po definiciji (4.3), je $\alpha(P) = \alpha(P')$.
(4) Če je lik Q vsebovan v liku P in ima $P - Q$ neprazno notranjost, je $\alpha(Q) < \alpha(P)$.

Izberemo različni točki 0 in $\mathbf{1}$ ter označimo: $|0\mathbf{1}| = 1$, kjer simbol $|\cdot|$ pomeni velikost dane daljice oziroma kota.

Definicija 4.9. Naj bosta a in b dani daljici. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom v oglišču B in lastnostmi: $|AB| = 1, |BC| = a, |\angle BAC| = \alpha$. Naj bo DEF pravokotni trikotnik s pravim kotom v oglišču E, kotom α v oglišču D in $|DE| = b$. Tako dobljena stranica EF drugega trikotnika predstavlja *produkt daljic* a in b, $|EF| = ab$.





Trditev 4.10. *V Hilbertovi ravnini s privzetim aksiomom o vzporednici ima množenje daljic, definirano na množici vseh daljic, naslednje lastnosti:*

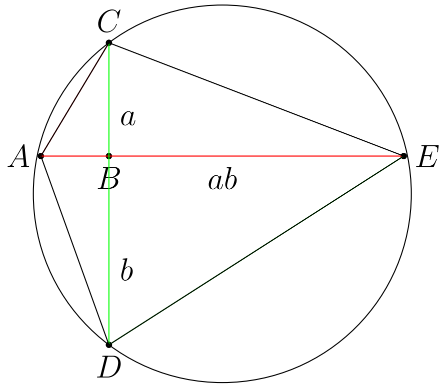
(1) *Produkt ab je dobro definiran.*
(2) *$a \cdot 1 = a$ za vsak a.*
(3) *$ab = ba$ za vsaka a,b.*
(4) *$a(bc) = (ab)c$ za vsake a,b,c.*

(5) *Za vsak* a *obstaja natanko en* b*, da velja* $ab = 1$.
(6) $a(b + c) = ab + ac$ *za vsake* a*,*b*,*c.

Dokaz. (1) Naj bosta ABC, DEF pravokotna trikotnika kot v definiciji in naj bo $A'B'C'$ nov pravokotni trikotnik s katetama dolžine 1 in a. Po aksiomu (C6) je $A'B'C'$ skladen z ABC. Torej je $\angle B'A'C' = \alpha$. Če je $D'E'F'$ pravokotni trikotnik s kotom α in kateto b je po trditvi 2.24 skladen z DEF, zato je $E'F' \cong EF = ab$.

(2) Naj bo DEF trikotnik s kotom α in kateto b dolžine 1. Po trditvi 2.24 je $DEF \cong ABC$ in $a \cdot 1 = a$.

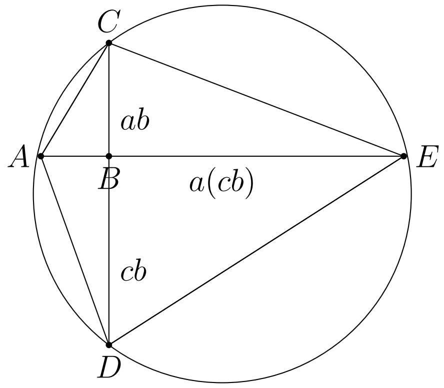
(3) Naj bosta dani daljici dolžine a in b. Konstruirajmo pravokotni trikotnik ABC s katetama 1 in a. S tem je določen kot $\angle BAC = \alpha$. Skozi A in B ter C in B potegnemo premici. Na poltraku z izhodiščem v B in na nasprotni strani od C obstaja točka D, da je $|BD| = b$. Sedaj prenesemo kot α v točko D na nasprotno stran premice CD od A. Krak kota α in premica skozi AB se sekata v točki E. Trikotnik DBE je pravokotni trikotnik s stranico b in kotom α, zato je po definiciji $|BE| = ab$.



Točki A in D ležita na isti strani premice CE in kot $\alpha = \angle CAE = \angle CDE$, zato po trditvi 3.16 vse štiri točke A, D, E, C ležijo na isti krožnici. Oglejmo si te iste točke še v drugačnem vrstnem redu. Ker točki A in C ležita na isti strani premice DE morata biti kota $\angle DAE$ in $\angle DCE$ skladna, $\angle DAE = \angle DCE = \beta$. Če najprej vzamemo trikotnik ABD s kotom β in stranico b, mora biti v trikotniku CBE stranica BE dolžine ba. Torej je $ab = ba$.

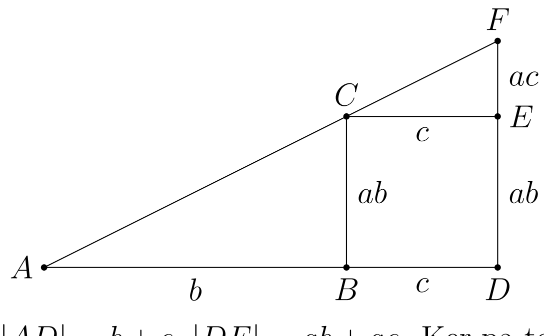
(4) Za dokaz asociativnosti najprej konstruiramo pravokotna trikotnika s katetama 1, a in tako definiramo kot α ter drugega s katetama 1, c in definiramo kot γ. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s kateto b in kotom α. Druga kateta ima torej dolžino ab. Na nasprotni strani daljice AB od C, v oglišču A, konstruiramo kot γ, ki naj seka premico skozi CB v točki D. Daljica BD predstavlja dolžino cb. Podobno na nasprotni strani daljice BD od A, v oglišču D, konstruiramo kot α, ki naj seka premico skozi AB v točki E. Daljica BE predstavlja dolžino $a(cb)$.
Enako kot v dokazu prejšnje točke iz skladnosti kotov α v A in D sledi, da točke $ACDE$ ležijo na isti krožnici in $\angle BCE = \gamma$. Sledi, da daljica BE

predstavlja tudi dolžino $c(ab)$. Torej je $a(cb) = c(ab)$ in ker komutativnost velja, dobimo željeni rezultat: $a(bc) = (ab)c$.



(5) Naj bo ABC pravokotni trikotnik s katetama dolžine 1 in a ter kotom α v oglišču A in drugim kotom β. Konstruiramo nov pravokotni trikotnik s kateto dolžine 1 in kotom β ob njej, da dobimo daljico dolžine b. Ker je drugi kot tega trikotnika po trditvi 3.12 enak α, je $ab = 1$.

(6) Dane so daljice a, b, c. Naj pravokotni trikotnik s katetama 1 in a določa kot α. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s kateto b in kotom α, torej drugo kateto ab. Na premici skozi AB izberemo točko D, da je $|BD| = c$. Dobljeno daljico vzporedno premaknemo skozi točko C. Naj bo to daljica CE. Skozi DE potegnemo premico, ki je pravokotna na AB. Če kot α prenesemo v oglišče C dobimo pravokotni trikotnik z drugo kateto dolžine ac. Oglejmo si sliko:



$|AD| = b + c$, $|DF| = ab + ac$. Ker pa točke ADF spet tvorijo pravokotni trikotnik s kotom α ob kateti $b + c$, mora biti druga kateta dolga $a(b + c)$, torej $|DF| = a(b + c) = ab + ac$.

$\square$

Posledica 4.11. *Naj bo P množica ekvivalenčnih razredov daljic glede na skladnost. V Hilbertovi ravnini s privzetim aksiomom o vzporednici in izbrano daljico dolžine 1 obstaja do izomorfizma natančno enolično določen obseg F, ki ima P za množico pozitivnih elementov, z operacijama seštevanja in množenja definiranima kot zgoraj.*

Opomba: K P moramo „*dodati*" negativne elemente za seštevanje, ki so definirani na naslednji način: $(-x) + x = 0$. Inverz negativnih elementov za množenje je negativna vrednost pozitivnih inverzov, to je: če velja $ab = 1$, potem je $(-a)(-b) = 1$. $F = \{x | x \in P\} \cup \{0\} \cup \{-x | x \in P\}$.

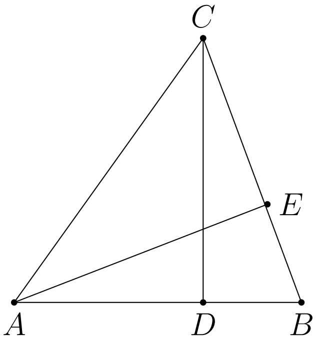
Trditev 4.12. *V Hilbertovi ravnini s privzetim aksiomom o vzporednici obstaja ploščinska mera α z vrednostmi v obsegu F iz posledice 4.11, za katero velja: ploščina poljubnega trikotnika ABC, ne glede na izbiro osnovnice, je $\alpha(ABC) = \frac{bh}{2}$, kjer je b izbrana osnovnica in h višina na to osnovnico. Funkcija α je s tem enolično določena.*

Dokaz. Enoličnost: je očitna, saj je funkcijska vrednost $\alpha(ABC) = \frac{bh}{2}$ točno določena za vsak trikotnik, poljuben drug lik pa je disjunktna unija trikotnikov.
Obstoj: Naj bo P poljuben lik. Torej ga lahko zapišemo kot končno disjunktno unijo trikotnikov T_i: $P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$. Za vsak T_i izberemo osnovnico b_i in njej pripadajočo višino h_i, ter definiramo $\alpha(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i h_i}{2}$.

Pokazati je treba, da je taka definicija res dobra, torej, da je α res neodvisna od izbire osnovnice b_i in izbire triangulacije ter preveriti, da res zadošča vsem trem zahtevam ploščinske mere. To bomo napravili v naslednjih lemah.

Lema 4.13. *V Hilbertovi ravnini s privzetim aksiomom o vzporednici izberimo poljuben trikotnik. Potem je njegova ploščina $\alpha(ABC)$ neodvisna od izbire osnovnice. To je:*

$$\alpha(ABC) = \frac{cv_c}{2} = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} \tag{1}$$



Dokaz. Naj bo ABC poljuben trikotnik v katerem za osnovnico najprej izberemo stranico $AB = c$ s pripadajočo višino $CD = v_c$, druga izbira osnovnice pa naj bo stranica $BC = a$ s pripadajočo višino $AE = v_a$.

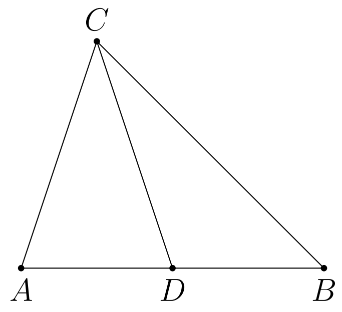
Pravokotna trikotnika AEB in CDB imata skupen kot pri oglišču B, torej enake vse tri kote, zato sta si trikotnika podobna. Iz podobnosti pa sledi: $\frac{v_a}{c} = \frac{v_c}{a}$, torej $av_a = bv_b$. □

Definicija je torej za trikotnike res dobra. Oglejmo si, kaj se zgodi, če trikotnik razdelimo na več manjših.

Lema 4.14. *Če dani trikotnik T razdelimo na končno število manjših trikotnikov T_i na poljuben način, potem je $\alpha(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i)$.*

Dokaz. Dokaz bo potekal v več korakih.

1) Najprej razdelimo trikotnik T samo z eno prečnico (daljico z enim krajiščem v oglišču trikotnika in drugim krajiščem na nasprotni stranici trikotnika) na dva trikotnika.

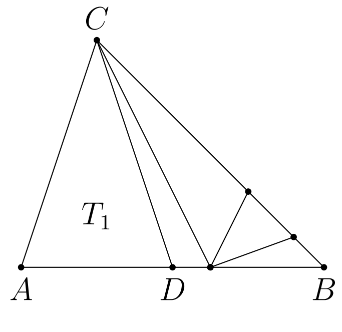


Naj bo stranica AB izbrana osnovnica trikotnika ABC in AD ter DB osnovnici manjših trikotnikov. Ker imajo vsi trije trikotniki enako višino in je $|AD| + |DB| = |AB|$, dobimo:

$$\alpha(ABC) = \frac{1}{2}|AB|h = \frac{1}{2}(|AD + DB|)h = \frac{1}{2}|AD|h + \frac{1}{2}|DB|h = \alpha(ACD) + \alpha(BCD)$$

2) Razdelimo sedaj trikotnik T na več manjših trikotnikov T_i, tako da nobeno novo oglišče ne leži v notranjosti trikotnika T in je vsaj ena stranica od T brez novih oglišč. Potem je $\alpha(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i)$.
To bomo dokazali z indukcijo na število novih trikotnikov T_i.

- $n = 1$:
  Če trikotnik T razdelimo samo enkrat, smo v situaciji, enaki prvemu koraku in trditev velja.
  Indukcijska predpostavka: Če je T razdeljen na n manjših trikotnikov, kot je opisano zgoraj, trditev velja.
- $n \mapsto n + 1$:
  Prosta stranica (AC) mora pripadati enemu od manjših trikotnikov in njegovo tretje oglišče (D) mora ležati na AB ali BC. Recimo, da je na AB. Potem zaradi prvega koraka velja $\alpha(ABC) = \alpha(T_1) + \alpha(BCD)$. Trikotnik BCD ima en trikotnik manj kot ABC in prav tako zadošča predpostavkam drugega koraka, saj nima notranjih oglišč (ker jih ABC nima) in ker stranica CD leži v notranjosti trikotnika ABC, ni na njej nobenega oglišča. Torej po indukcijski predpostavki velja $\alpha(BCD) = \sum_{i=2}^{n} \alpha(T_i)$ in dokaz drugega koraka je končan.



3) Oglejmo si še splošen primer. Naj bo trikotnik ABC poljubno razdeljen na manjše trikotnike T_i. Izberemo si enega od oglišč trikotnika ABC in skozenj potegnemo prečnice čez vsa oglišča trikotnikov T_i. Dobimo triangulacijo trikotnika ABC na trikotnike S_j, ki zadošča predpostavkam drugega koraka, zato je $\alpha(ABC) = \sum_j \alpha(S_j)$.

Presek obeh triangulacij T_i in S_j nam da novo razdelitev trikotnika ABC: $\Delta ABC = \bigcup_{i,j} T_i \cap S_j$, vendar pa so dobljeni liki lahko tudi štirikotniki. Kjer se to zgodi, dodamo štirikotniku še eno od diagonal in tako dobimo nadaljnjo triangulacijo $\Delta ABC = \bigcup_{i,j,k} U_{ijk}$.

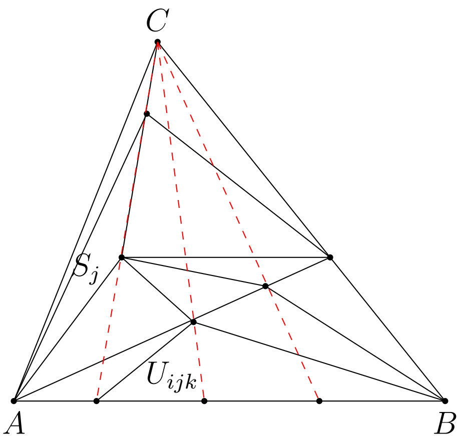
Vrnimo se k triangulaciji S_j. Vsak trikotnik S_j je disjunktna unija trikotnikov U_{ijk} (za različne i in k). In sicer taka, ki ponovno zadošča predpostavkam drugega koraka, saj nima notranjih oglišč, ker so vse prečnice potekale skozi oglišča trikotnikov T_i, iz istega razloga pa je brez oglišč stranica, ki leži na AB. Torej je $\alpha(S_j) = \sum_{i,k} \alpha(U_{ijk})$ in zato $\alpha(ABC) = \sum_{i,j,k} \alpha(U_{ijk})$.

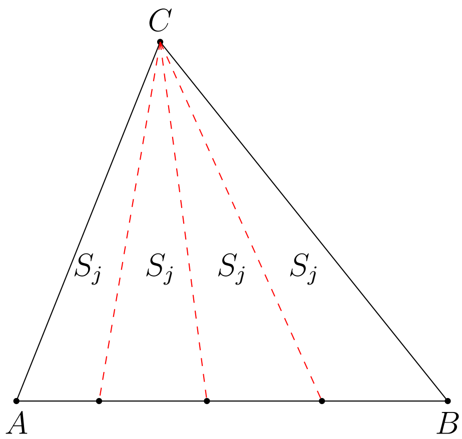
Vrnimo se k razdelitvi trikotnikov T_i na trikotnike U_{ijk} (za različne j in k). Imamo dve možnosti:

(1) Prečnica skozi oglišče C razdeli trikotnik T_i na dva trikotnika T_i' in T_i''. V tem primeru po prvem koraku velja $\alpha(T_i) = \alpha(T_i') + \alpha(T_i'')$. Obe polovici sta naprej razdeljeni s prečnicami in diagonalami na manjše trikotnike. Pri tem pa nobeno od oglišč ne leži v notranjosti T_i' in prečnica, ki razdeli T_i na dva dela, je stranica brez oglišč. Triangulacija torej zadošča predpostavkam drugega koraka in velja $\alpha(T_i) = \sum_{j,k} \alpha(U_{ijk})$.

(2) Prečnica skozi oglišče C je ena od stranic trikotnikov T_i, ta stranica torej ne vsebuje nobenega oglišča in spet zadostimo predpostavkam drugega koraka.

Dobili smo željeni rezultat: $\alpha(ABC) = \sum_i \alpha(T_i)$.





□

Lema 4.15. *Ploščinska mera α poljubnega lika P je neodvisna od izbire triangulacije tega lika.*

Dokaz. Naj ima lik P dve triangulaciji: $P = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ in $P = T_1' \cup \ldots \cup T_m'$. Presek poljubnih dveh trikotnikov $T_i \cap T_j'$ lahko na enak način kot prej v dokazu trditve razdelimo na manjše trikotnike U_{ijk}. Če na vsakem od trikotnikov triangulacije $T_i = \bigcup_{j,k} U_{ijk}$ in $T_j' = \bigcup_{i,k} U_{ijk}$ uporabimo zadnjo lemo, dobimo: $\alpha(P) = \sum_i \alpha(T_i) = \sum_{i,j,k} \alpha(U_{ijk}) = \sum_j \alpha(T_j') = \alpha(P)$. □

Funkcija α je zaradi zadnjih treh lem dobro definirana. Preveriti moramo še, da zadošča vsem trem pogojem v definiciji funkcijske mere:

(1) Res je $\alpha(T) > 0$ za vsak pravi trikotnik T (njegova oglišča so tri nekolinearne točke).

(2) Skladni trikotniki imajo skladne stranice in višine, zato je $\alpha(T) = \alpha(T')$, če je $\Delta T \cong \Delta T'$.

(3) Če sta P in Q poljubna lika, ki se med seboj ne prekrivata (nimata nobene skupne notranje točke), $P = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ in $Q = T_1' \cup \ldots \cup T_m'$, lahko z vsemi trikotniki obeh triangulacij T_i, T_j' konstruiramo lik $P \cup Q$. Torej velja tudi $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$.

$\square$

Literatura

[1] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics **191**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 2000.

[2] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, EBook 17384/2005, [ogled 12. 9. 2013], dostopno na `http://www.gutenberg.org/ebooks/search/?query=The+Foundations+of+Geometry`.

[3] B. Jahren, *Hilbert's Axiom System for Plane Geometry*, [ogled 12. 9. 2013], dostopno na `http://folk.uio.no/bjoernj/kurs/4510/hilberteng.pdf`.

[4] *David Hilbert*, [ogled 12. 9. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert`.

[5] *Očrtana krožnica*, [ogled 12. 9. 2013], dostopno na `http://sl.wikipedia.org/wiki/O%C4%8Drtana_kro%C5%BEnica`.