UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Tea Perko

ALOKACIJA SREDSTEV S PARITETO TVEGANJ

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Dejan Velušček

Ljubljana, 2016

Podpisana Tea Perko izjavljam:

– da sem magistrsko delo z naslovom *Alokacija sredstev s pariteto tveganj* izdelala samostojno pod mentorstvom doc. dr. Dejana Veluščka in

– da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 4. 7. 2016 Podpis: ....

Kazalo

Program dela

V magistrskem delu predstavite strategijo paritete tveganj za upravljanje s portfeljem vrednostnih papirjev in njene lastnosti. Primerjajte jo s popularnimi hevrističnimi strategijami, npr. portfelj z enakimi utežmi, portfelj z najnižjim tveganjem idr. Opišite še numerične algoritme za učinkovit izračun uteži pri tej strategiji. Raziščite, kako se obnese strategija paritete tveganj še na parih empiričnih zgledih.

Osnovna literatura:

- S. Maillard, T. Roncalli, J. Teiletche, *On the properties of equally-weighted risk contributions portfolio*, verzija maj 2009, dostopno na `http://thierry-roncalli.com/download/erc.pdf`
- F. Spinu, *An algorithm for computing risk parity weights*, verzija julij 2013, SSRN, dostopno na `http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2297383`
- T. Griveau-Billion, Jean C. Richard, T. Roncalli, *A Fast Algorithm for Computing High-Dimensional Risk Parity Portfolios*, verzija september 2013, dostopno na `http://arxiv.org/pdf/1311.4057.pdf`

Ljubljana, 2016 doc. dr. Dejan Velušček

Alokacija sredstev s pariteto tveganj

Povzetek

Po finančni krizi je velik delež investitorjev za oblikovanje portfeljev pričel uporabljati pristope, ki temeljijo zgolj na diverzifikaciji tveganja in ne vključujejo izračunov pričakovanih donosov. Dva dobro poznana portfelja, ki sta oblikovana na osnovi takšne strategije, sta portfelj z najnižjim tveganjem in portfelj z enakimi utežmi. V zadnjih letih je vse več pozornosti deležna strategija paritete tveganj, ki z izenačitvijo prispevkov tveganj iz vseh sredstev v portfelju poskuša doseči maksimalno diverzifikacijo tveganja v portfelju. Za oblikovanje portfelja s pariteto tveganj se uporabljajo različni numerični algoritmi, med katerimi sta se za najbolj učinkovita izkazala Newton-Nesterov algoritem in algoritem cikličnega koordinatnega spusta. Kljub nekoliko zahtevnejšemu načinu določanja uteži, je portfelj s pariteto tveganj dobra vmesna rešitev med portfeljem z najnižjim tveganjem ter portfeljem z enakimi utežmi.

Risk parity approach to portfolio asset allocation

Abstract

Since the financial crisis, large fraction of investors started using approaches for asset allocation, which based only on risk diversification and did not depend on expected returns. Two well known portfolios that are created with this strategy are the minimum variance and the equally-weighted portfolios. In recent years, the risk parity strategy has received increasing attention. The idea is to equalize risk contributions from the different portfolio components thus maximizing diversification of risk in the portfolio. We can use different numerical algorithms to create a risk parity portfolio. The most efficient ones are the Newton-Nesterov algorithm and the cyclical coordinate descent algorithm. Despite the slightly more demanding method of weights' calculation, the risk parity portfolio represents an intermediate solution between minimum variance and equally-weighted portfolios.

Math. Subj. Class. (2010): 62H20

Ključne besede: upravljanje sredstev, pariteta tveganj, enako uteževanje, minimalna varianca, portfeljska optimizacija

Keywords: asset management, risk parity, equally-weighted, minimum variance, portfolio optimization

1. Uvod

Brez večjih težav lahko naštejemo lepo število negativnih posledic, ki jih je za seboj pustila zadnja finančna kriza. Bistveno več truda moramo vložiti, če želimo v nastalem kaosu opaziti katero od pozitivnih posledic. Negativne posledice so namreč jasno vidne v izgubi donosa na investicijo, pozitivne posledice pa se pokažejo šele čez čas, saj so običajno skrite v razvijajočih se metodah, katere naj bi bile v prihodnje manj občutljive na finančna neravnovesja v času kriz.

Iskanje vzrokov, ki so razburkali finančni svet, je racionalna reakcija na vsako finančno krizo. Med vzroki za zadnjo finančno krizo močno izstopajo slabo diverzificirani portfelji z vidika tveganja, zaradi česar so v času finančne krize utrpeli visoko izgubo donosa. Največje izgube so utrpeli portfelji, katerih premoženje je bilo razpršeno po pravilih povprečje-varianca optimizacije, metodologije, ki je trdno zakoreninjena v portfeljski teoriji. Glavni krivec za te izgube naj bi bila pretirana občutljivost povprečje-varianca optimizacije na vhodne podatke, med katerimi so največ škode povzročile ocene pričakovanih donosov. Investitorji so zato pričeli zavračati pristope, ki za določitev portfelja zahtevajo izračune pričakovanih donosov, njihova nižja toleranca do tveganja pa je povzročila nastanek novega naložbenega sloga, ki je postavil diverzifikacijo tveganja v srce investicijskega procesa.

Izmed vseh strategij, ki temeljijo zgolj na diverzifikaciji tveganja in ne zahtevajo izračunov pričakovanih donosov, je v zadnjem času največ pozornosti deležna strategija paritete tveganj. Po finančni krizi so se na trgu kot gobe po dežju začeli pojavljati upravljavci portfeljev s pariteto tveganj, ideja paritete tveganja pa zaradi svoje popolne diverzifikacije tveganja, privlači vse večje število investitorjev.

Podajanje ocene o tem, koliko boljša/slabša je nova naložbena strategija glede na tradicionalno povprečje-varianca optimizacijo, je zelo nehvaležno delo. Med prebiranjem literature naletimo na zelo raznolike komentarje. Nekateri avtorji strategijo paritete tveganj absolutno preferirajo, medtem ko drugi poskušajo dokazati, da v splošnem ni boljša od tradicionalne optimizacije. Med poplavo člankov na temo paritete tveganj vseeno najdemo tudi takšne, ki izpostavijo tako njene svetle točke kot njene probleme, bralca pa opomnijo, da je izbira strategije odvisna od mnogih dejavnikov in ni enoličnega odgovora na vprašanje, katera je boljša.

V tem magistrskem delu si bomo poskušali sami izoblikovati mnenje glede strategije paritete tveganj. Skozi pet delov magisterija bomo poskušali prikazati njen razvoj, vse od ideje do rezultatov.
Prvi del magisterija bo namenjen spoznavanju procesa upravljanja sredstev. Oblikovanje portfelja je sestavni del tega procesa, zato je dobro poznati vse predhodne korake. Poglavje o upravljanju sredstev bomo zaključili z razlago o razredih sredstev. Sredstva so osnovni gradniki portfeljev, zato je njihovo poznavanje nujno potrebno za izgradnjo dobrega portfelja. V literaturi naletimo na različne opredelitve razredov sredstev, vendar so razlike med avtorji dovolj majhne, da lahko povzamemo skupno rdečo nit.
Drugi del magisterija bomo posvetili samim začetkom portfeljske teorije in njenim pomanjkljivostim. Predstavili bomo znano Markowitzovo portfeljsko teorijo, razkrili idejo, ki se skriva v njenem ozadju in definirali optimizacijski problem. Nadaljevali

bomo z njenimi pomanjkljivostmi in predstavili predloge, ki so jih različni akademiki razvili z namenom odprave teh pomanjkljivosti.
Osrednja tema magisterija, to je portfelj s pariteto tveganj, bo predstavljena v tretjem delu. Začeli bomo z motivacijo za portfelj s pariteto tveganj, katero bomo iskali v njegovi primerjavi z uveljavljenim 60/40 portfeljem. Obrazložili bomo prednosti in pomanjkljivosti portfelja s pariteto tveganj, ob tem pa predlagali možnost za izogib največji pomanjkljivosti tega portfelja. Nadaljevali bomo z matematično definicijo portfelja s pariteto tveganj in prikazali njegove teoretične lastnosti. Pokazali bomo, da portfelj s pariteto tveganj vedno obstaja in je enoličen, pokomentirali bomo tudi njegovo optimalnost. Za konec bomo izpeljali dva numerična algoritma, ki na učinkovit način poračunata uteži za portfelj s pariteto tveganj. Primerjali bomo njuno učinkovitost na majhnem in velikem naboru podatkov, saj je dobro vedeti, kdaj je smiselno uporabiti katerega od njiju.
V četrtem delu magisterija se bomo nekoliko odmaknili od strategije paritete tveganj in si bomo pogledali dve drugi metodi, ki prav tako oblikujeta portfelj brez upoštevanja pričakovanih prihodnjih donosov portfelja. Opisali bomo ugotovitve drugih avtorjev glede portfelja z enakimi utežmi in izpeljali enačbe za izračun uteži v portfelju z najnižjim tveganjem. Na koncu bomo pokazali, da je portfelj s pariteto tveganj lociran med portfeljem z najnižjim tveganjem in portfeljem z enakimi utežmi.
Zadnji, peti del magisterija, bo namenjen empiričnimi zaključkom. Na voljo bomo imeli tri nabore podatkov, ki se med seboj pomembno razlikujejo glede na karakteristike vhodnih podatkov. Za vsak nabor podatkov bomo pogledali, kakšen portfelj oblikuje vsaka od treh obravnavanih strategij in na podlagi različnih meril uspešnosti pokomentirali dobljene rezultate.

2. Upravljanje sredstev

Besedna zveza, okoli katere se vrti celotna tema magistrskega dela, je oblikovanje portfelja. Metode za oblikovanje portfeljev ekonomska teorija uvršča na področje financ. Bistvo financ je uporaba ekonomskih načel za odločanje, kar vključuje tudi alokacijo oziroma razdelitev denarja pod pogoji negotovosti. Besedi, ki povzemata glavni prioriteti financ, sta denar in prihodnost. Finance podajajo okvir za odločanje o tem, kako priti do sredstev in kaj naj naredimo z njimi, ko jih enkrat imamo. Fabozzi in Drake [8] trdita, da so temelji financ sestavljeni iz naslednjih treh, med seboj prepletenih, področij ekonomije: kapitalski trgi in teorija kapitalskih trgov, upravljanje financ ter upravljanje sredstev. Področje kapitalskih trgov in teorije kapitalskih trgov zajema finančni sistem, strukturo obrestnih mer in vrednotenje tveganih sredstev. Področje upravljanja financ vključuje odločitve znotraj določene organizacije, ki so povezane z investiranjem v sredstva in financiranjem le-teh. Več pozornosti bomo namenili tretjemu področju financ, to je upravljanju sredstev, saj je poznavanje tega področja pomembno za nadaljnje razumevanje vsebine magisterija.

2.1. Proces upravljanja sredstev

Upravljanje sredstev (ang. *investment management, asset management, portfolio management*) je proces upravljanja portfelja, to je skupka sredstev, naložb oziroma investicij. Proces upravljanja sredstev je v splošnem sestavljen iz petih korakov ([8], str. 390 - 401).

1. korak: določitev naložbenih ciljev. Upravljanje sredstev pričnemo s temeljito analizo naložbenih ciljev investitorja (bodisi individualnega bodisi institucionalnega[1]), čigar sredstva se bodo upravljala.
Ne glede na tip investitorja, naložbene cilje v splošnem delimo na dve široki kategoriji: (1) cilji, ki morajo biti doseženi zaradi obveznosti in (2) cilji, ki so neodvisni od obveznosti. Obveznosti v tem primeru označujejo denarni izdatek, ki se bo zaradi izpolnitve pogodbeno dogovorjenih obveznosti, zgodil na določen datum v prihodnosti. Upravljanje sredstev z namenom dosega določenega cilja, ki je neodvisen od obveznosti, ni usmerjeno v iskanje denarnega toka, temveč raje v dosego določenih ciljev, povezanih z donosom in tveganjem.
Ne glede na tip naložbenega cilja, moramo za uspešno upravljanje sredstev vzpostaviti izhodišče za primerjavo (ang. *benchmark*). Izhodišče za primerjavo je portfelj ali indeks[2], ki se uporablja v primerjalne namene pri ocenjevanju uspešnosti portfelja. To primerjalno orodje naj bi bilo podobno naložbenim ciljem investitorja. Če je naložbeni cilj povezan z obveznostmi, je tipično sredstvo za primerjavo ciljna obrestna mera, za katero menimo, da bi lahko omogočila pridobitev potrebnega denarnega toka. Če naložbeni cilj ni odvisen od obveznosti, je tipično izhodišče za primerjavo razred sredstev, v katerega spadajo investirana sredstva.

2. korak: vzpostavitev naložbene politike. Postaviti moramo takšno naložbeno politiko, da bomo z njo zagotovili izpolnitev naložbenih ciljev. Oblikovanje politike pričnemo z odločitvami o načrtni razporeditvi oziroma alokaciji sredstev (ang. *asset allocation*), ki podaja odgovor na vprašanje: »Kakšna naj bo mešanica sredstev v portfelju?« ([8], str. 393). Pri tem upoštevamo razmerje med donosnostjo in tveganjem posameznih razredov sredstev, ki je v skladu s pričakovanji in cilji investitorja. Poznamo tri vrste alokacije sredstev.

(1) Alokacija v skladu z naložbeno politiko (ang. *policy asset allocation*) je temelj naložbene strategije in pomeni udejanjanje naložbene politike. Ohlapno jo definiramo kot dolgoročno odločitev o sestavi portfelja, skozi katero investitor išče primerni dolgoročni nabor sredstev. Izbrani nabor sredstev se mora skladno z naložbenimi cilji, čim bolj približati pričakovani donosnosti portfelja glede na zastavljeno tveganje. S tem politika alokacije sredstev uravnava dva nasprotujoča si cilja. Na eni strani so strategije, ki z veliko verjetnostjo ustvarijo visoke dolgoročne donose, a so same po sebi precej tvegane strategije. Na drugi strani so strategije, ki omogočajo visoko varnost, vendar pogosto ustvarijo le skromne donose.
(2) Dinamična alokacija sredstev (ang. *dynamic asset allocation*) označuje avtomatično preoblikovanje sredstev v portfelju, kot odziv na spremenjene razmere na trgu. Ključnega pomena pri tej alokaciji sredstev je takojšne prilaga-

[1]Primeri institucionalnih investitorjev so zavarovalnice, pokojninski skladi, depozitne institucije itd.

[2]Borzni indeksi predstavljajo tehtano povprečje tečajev določenih vrednostnih papirjev in med drugim odgovarjajo na vprašanje: »Kaj se danes dogaja na trgu?«. Indekse praviloma delimo glede na vrsto vrednostnega papirja (delniški indeks, obvezniški indeks, surovinski indeks ...), geografsko pokritost (mednarodni indeks, nacionalni indeks ...) in panogo (indeks, ki predstavlja zavarovalniški sektor ...). Znotraj teh delitev se indeksi naprej razlikujejo glede na metodo, s katero so določene uteži na vrednostne papirje, vključene v indeks (cenovno utežen indeks, indeks utežen s tržno kapitalizacijo in enakomerno utežen indeks) ([1], str. 38 - 46).

janje portfelja, v kolikor se spremeni gospodarsko okolje ali finančna situacija investitorja.

(3) Taktična alokacija sredstev (ang. *tactical asset allocation*) označuje strategijo zavestnega odstopanja od dolgoročno določene mešanice sredstev, oblikovane z naložbeno politiko. Sredstva v portfelju se aktivno prilagajajo glede na kratkoročne spremembe v gospodarstvu in s tem izkoristijo trenutne situacije neučinkovitosti trga, to so podcenjena posamična sredstva, podcenjeni razredi sredstev itd.

Pri oblikovanju naložbene politike moramo dodatno upoštevati še naslednje omejitve: omejitve s strani investitorja (koliko se lahko največ investira v določen razred sredstev, katere vrednostne papirje investitor želi v portfelju itd.), regulatorne omejitve (upoštevanje na tveganju temelječega zahtevanega kapitala, ki je prisoten v portfeljih, ki se upravljajo za bančne in zavarovalniške institucije) in davčne omejitve (nekateri institucionalni investitorji (pokojninski skladi) so izvzeti iz obdavčitve).

3. korak: izbira naložbene strategije. Naložbena strategija mora biti skladna z naložbenimi cilji in smernicami naložbene politike. Naložbena strategija je lahko aktivna ali pasivna, lahko je tudi mešanica obeh.
Aktivna naložbena strategija za iskanje boljše uspešnosti, kot jo ponuja portfelj, ki je le široko diverzificiran oziroma razpršen, uporablja vse dostopne informacije in tehnike napovedovanja. Bistvenega pomena za vse aktivne strategije so pričakovanja o dejavnikih, ki vplivajo na uspešnost razreda sredstev (prihodnji dobiček, dividende, obrestne mere, menjalni tečaji ...).
Pasivna naložbena strategija vključuje le minimalno količino vhodnih podatkov glede pričakovanj in se pri doseganju uspešnosti nekega portfelja raje zanaša na diverzifikacijo. Pasivna strategija predpostavlja, da tržna učinkovitost odraža vse dostopne informacije v ceni, po kateri se prodaja vrednostni papir. Povedano drugače, na trgu ne morejo obstajati vrednostni papirji, ki so podcenjeni ali precenjeni.
Pri investicijah v obveznice poznamo še strukturirano naložbeno strategijo, katera oblikuje portfelj z namenom doseganja uspešnosti nekaterih vnaprej določenih obveznosti, ki bodo morale biti poplačane v prihodnosti. Zato se ta tip strategije imenuje strategija, povzročena s strani obveznosti (ang. *liability-driven strategies*).

4. korak: oblikovanje portfelja in nadzor nad njegovo uspešnostjo. Pri izgradnji portfelja poskušamo oblikovati realistične in razumne pričakovane donose s pomočjo različnih analitičnih orodij. Z njihovo pomočjo poskušamo oblikovati učinkovit portfelj (ang. *efficient portfolio*) oziroma doseči optimalno sestavo portfelja. Učinkovit portfelj je portfelj, ki ponuja največji pričakovani donos za dano stopnjo tveganja, ali ekvivalentno, najnižje tveganje za dani pričakovani donos. Ko je portfelj zgrajen, moramo spremljati in nadzorovati njegovo obnašanje na trgu. Namen tega je ugotoviti, kako se portfeljska izpostavljenost tveganju spreminja glede na trenutne tržne pogoje, in pridobivanje informacij o sredstvih v portfelju. Portfelj s časom mogoče več ne bo učinkovit in bomo morali ponovno vzpostaviti ravnovesje v portfelju.

5. korak: merjenje in ocenjevanje uspešnosti naložb. Merjenje uspešnosti pomeni ustrezno izračunavanje donosov skozi ocenjevalni časovni interval. Ocenjevanje uspešnosti pomeni iskanje odgovora na vprašanje, ali je upravljanje sredstva prineslo dodatno vrednost. To se ugotovi s primerjavo uspešnosti obravnavanega sredstva in vzpostavljenega izhodišča za primerjavo.

Lahko zaključimo, da je proces upravljanja sredstev ciklične oblike, saj ocenjevanje uspešnosti pridobi povratne informacije, ki vplivajo na spremembe ciljev, politike, strategije in sestave portfelja.

2.2. Razredi sredstev

Ključni element v portfeljski teoriji je portfelj. Osnovne sestavine portfelja so razredi sredstev oziroma naložbeni razredi (ang. *asset class*). Ker je dobro poznavanje razredov sredstev bistvenega pomena pri oblikovanju portfelja, bomo v tem razdelku definirali nekatere razrede sredstev in opisali njihove lastnosti.

Sredstvo je vsakršen vir, od katerega se pričakuje, da bo zagotavljal prihodnje koristi in ima zato ekonomsko vrednost. Sredstva delimo na opredmetena in neopredmetena sredstva. Vrednost opredmetenega sredstva je odvisna od določenih fizičnih lastnosti sredstva. V nasprotju s tem, neopredmetena sredstva predstavljajo pravne zahtevke do določenih koristi v prihodnosti in njihova vrednost ni odvisna od oblike, v kateri so terjatve zabeležene. Zato finančna sredstva, katerih primer so delnice in obveznice, štejemo med neopredmetena sredstva. Za finančna sredstva velikokrat uporabimo sorodni izraz finančni instrumenti, nekatere finančne instrumente pa pogosto imenujemo vrednostni papir ([8], str. 14).

Sredstva s skupnimi lastnostmi združimo v razred sredstev. Naložbene lastnosti, ki jih upoštevamo pri vključevanju posameznega sredstva v razred, so naslednje:

(1) Sredstva so podobno občutljiva na glavne ekonomske faktorje, ki vplivajo na vrednost celotnega razreda. To se odraža v visoki korelaciji med donosi posameznih sredstev, vključenih v isti razred sredstev.
(2) Sredstva imajo podobne lastnosti glede tveganja in donosa.
(3) Sredstva imajo skupno pravno in regulatorno strukturo.

Če je razred sredstev definiran na zgoraj opisan način, potem je korelacija med donosi različnih razredov sredstev nizka ([10], str. 15).

Razrede sredstev delimo na tradicionalne in alternativne razrede sredstev. Tradicionalni razredi sredstev so trije:

(1) navadne delnice (ang. *common stocks*),
(2) obveznice (ang. *bonds*),
(3) instrumenti denarnega trga (ang. *money market instruments*).

Skupino alternativnih razredov sredstev med drugimi sestavljajo ([10], str. 16):

- nepremičnine (ang. *real estate*),
- hedge skladi (ang. *hedge funds*),
- zasebni lastniški kapital (ang. *private equity*),
- surovine (ang. *commodities*).

V večini razvitih držav obstajajo štirje glavni razredi sredstev - poleg tradicionalnih razredov sredstev k tej skupini prištevamo še nepremičnine ([10], str. 15).

V nadaljevanju bomo podrobneje predstavili tradicionalne razrede sredstev, saj se najpogosteje uporabljajo pri izgradnji portfelja in zato običajno predstavljajo večino vseh vrednostnih papirjev, vključenih v izbrani portfelj.

2.2.1. **Navadne delnice**

Navadna delnica je lastniški vrednostni papir, s katerim imetnik papirja pridobi pravico do deleža uspeha družbe (dobička), če je družba uspešna in raste. Imetnik papirja dobi dobiček v obliki dividend in/ali donosa na investicijo (ta se odraža v povečani vrednosti njegovih delnic). Višina dividende je odvisna od doseženega dobička družbe in politike razdelitve dobička v družbi. Družba se namreč lahko odloči zadržati večji del dobička za nadaljnji razvoj, zato v tem primeru delničarji dobijo nižje dividende. Prav tako se lahko družba odloči, da dobička v posameznem letu ne bo izplačala.
Navadne delnice lastniku zagotavljajo volilno pravico pri volitvah o članih uprave in drugih pomembnih zadevah. V primeru bankrota družbe lahko navadni delničarji zahtevajo poslovno premoženje, vendar samo premoženje, ki ostane po tem, ko je podjetje poravnalo dolgove ostalim upravičencem (prednostni delničarji itd.). Ker navadne delnice predstavljajo lastništvo v gospodarski družbi in ker življenje gospodarske družbe praviloma ni omejeno, so navadne delnice stalen vrednostni papir oziroma vrednostni papir brez zapadlosti ([11], str. 30).

Iz razreda navadnih delnic lahko naprej oblikujemo nove razrede sredstev. Dva nova razreda sredstev dobimo z delitvijo na razred tujih navadnih delnic in razred domačnih navadnih delnic. Znana je tudi delitev delnic glede na tržno kapitalizacijo družbe (ang. *market capitalization*). Podjetja z večjo tržno kapitalizacijo so pogosto manj tvegana kot tista z manjšo in je zato likvidnost njihove delnice večja. Prav tako lahko oblikujemo razred navadnih delnic iz držav z razvitim trgom in obratno, razred navadnih delnic iz držav s trgom v nastajanju ([10], str. 15).

2.2.2. **Obveznice**

Obveznice spadajo v razred vrednostnih papirjev s fiksnim donosom (ang. *fixed income securities*), vendar se v literaturi izraza obveznice in vrednostni papir s fiksnim donosom pogosto uporabljata sopomensko. Vrednostni papir s fiksnim donosom je dolžniški instrument, s katerim se izdajatelj zaveže k plačilu določene vsote denarja na določen datum v prihodnosti ([10], str. 16). Značilnost investiranja v vrednostne papirje s fiksnim donosom je ta, da investitor od takšnega dolžniškega instrumenta ne more realizirati več od zneska, določenega v pogodbi. Iz tega razloga imajo ti vrednostni papirji v svojem imenu dodatek »fiksni donos«.
V splošnem se vrednostni papirji s fiksnim donosom delijo v dve kategoriji: dolžniški vrednostni papirji in prednostne delnice[3] (ang. *preffered stock*). Dolžniški vrednostni papir je finančni instrument s katerim posojilojemalec obljubi poplačilo

[3]Prednostne delnice so glede na svoje lastnosti tako dolžniški kot lastniški finančni instrument. Investitorji v ta vrednostni papir so upravičeni le do prejetja fiksnega zneska, določena s pogodbo, kar je lastnost dolžniških instrumentov. Vendar investitor prejme plačilo le v primeru, ko so obveznosti do upnikov družbe že izpolnjene, kar je lastnost lastniškega instrumenta ([8], str. 16). Tudi avtorji literature s tega področja si niso enotni. Tako Fabozzi in Drake [8] obravnavata prednostne delnice kot vrednostni papir s fiksnim donosom, Bodie, Kane in Marcus [1] pa jih uvrščajo med lastniške vrednostne papirje.

nominalne vrednosti obveznosti (glavnice) do datuma zapadlosti in, v večini primerov, tudi periodičnih obrestnih plačil lastniku dolžniškega vrednostnega papirja ([11], str. 30). Dolžniške vrednostne papirje sestavljajo

- obveznice,
- s premoženjem kriti vrednostni papirji (ang. *asset-backed securities - ABS*),
- vrednostni papirji zavarovani s hipoteko (ang. *mortgage-backed securities - MBS*) in
- posojila bank ([10], str. 17).

Podrobneje si bomo ogledali razred obveznic, saj skupaj z navadnimi delnicami, predstavljata prevladujoča razreda sredstev v večini individualnih in institucionalnih portfeljih. Ker obveznice spajajo pod dolžniške vrednostne papirje, njihovo definicijo že poznamo. Obveznice izdajajo banke, družbe oziroma podjetja, države ali občine. Klasificiramo jih na različne načine. En način je klasifikacija glede na vrsto izdajatelja. Tako poznamo

- državne obveznice (ang. *government bonds*),
- občinske obveznice (ang. *municipal bonds*),
- podjetniške obveznice (ang. *corporate bonds*) ...

Tudi obveznice lahko delimo glede na izdajatelja in s tem oblikujemo razred obveznic domačih izdajateljev ter razred obveznic tujih izdajatelj. Nadaljnje lahko tuje izdajatelje delimo glede na razvitost finančnih trgov, bodisi v razviti trg bodisi v nastajajoči trg ([8], str. 397).

2.2.3. **Instrumenti denarnega trga**

Tako kot trg dolžniških vrednostnih papirjev je tudi denarni trg (ang. *money market*) podsektor trga vrednostnih papirjev s fiksnim donosom ([1], str. 24). Instrumenti denarnega trga so kratkoročni dolžniški instrumenti, torej vsa kratkoročna posojila in kratkoročni vrednostni papirji, ki jih izdajajo države, banke, podjetja in druge institucije. Medtem ko s kratkoročnimi posojili praviloma ne trgujemo na sekundarnem trgu (borzi), saj so pogodbeno dogovorjena, s kratkoročnimi vrednostnimi papirji trgujemo na sekundarnem trgu vrednostnih papirjev. Kratkoročnost vrednostnega papirja pomeni, da ta zapade v obdobju enega leta ali manj. Poleg kratkoročnosti je vsem tem instrumentom skupna tudi varnost, saj imajo instrumenti takšnega tipa nizko tveganje oziroma nižje od ostalih oblik finančnih instrumentov. Prav tako so ti instrumenti visoko likvidni, saj jih je mogoče prodati pred dospetjem, in sicer za ceno, ki je blizu nakupni. Najbolj pogosti instrumenti denarnega trga so ([10], str. 28):

- zakladne menice (ang. *Treasury bills*),
- komercialni zapisi (ang. *comercial paper*),
- potrdila o vezanih vlogah (ang. *certificates of deposit*),
- bančni akcepti (ang. *bankers acceptances*) in
- reodkupni sporazumi – repo posli (ang. *repurchase agremeent*).

3. Začetki portfeljske teorije

»A good portfolio is more than a long list of goods stocks and bonds.
It is a balanced whole, providing the investor with protections and
opportunities with respect to a wide range of contingencies[4].«
—Harry M. Markowitz ([8], str. 394)

Teoretično znanje o posameznih razredih sredstev investitor nadgrajuje in posodablja s prebiranjem gospodarskih novic. S tem si izoblikuje stališča o tem, kateri trgi, sektorji ali podjetja so uspešnejša in katera ne. Tako se lažje odloči, katere razrede sredstev je smiselno vključiti v portfelj in katere ne. Vendar le pregledi nad trgom niso dovolj za izbiro portfelja. Naložbena miselnost, ki temelji na prepoznavanju in vlaganju v »zmagovalce«, to je delnice, za katere se zdi da so podcenjene ali delnice, ki imajo visoke pričakovane donose, se je spremenila leta 1952, ko je Harry Markowitz objavil svoj članek *Portfolio Selection* v Journal of Finance. S tem se je zgodil prvi preboj v razvoju oblikovanja sodobnih finančnih odločitev, v katerem sta imela pomembno vlogo koncepta upravljanje tveganja portfelja in diverzifikacija portfelja ([10], str. 245).

Markowitz pravi, da morajo investitorji pri odločitvah glede investicij upoštevati dva dejavnika, pričakovani donos investicije in tveganje, ki izhaja iz investicije. Prvotno je ta naložbena filozofija pritegnila le malo zanimanja, vendar jo je sčasoma finančna skupnost sprejela. Skozi leta se je teorija portfeljske izbere, oblikovane s strani Markowitza razširila, preoblikovale se so tudi predpostavke, narejene v originalnem modelu. Za Markowitzovo naložbeno teorijo se v literaturi uporabljajo številni izrazi, med drugim povprečje-varianca analiza (ang. *mean-variance analysis*), povprečje-varianca portfeljska optimizacija (ang. *mean-variance portfolio optimization*) in moderna portfeljska teorija - MPT (ang. *Modern Portfolio Theory*) ([10], str. 245).

Markowitz je tveganje portfelja definiral z varianco prihodnjih donosov

$$\sigma^2 = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij} = x^T \Sigma x,$$

kjer je

- x_i utež, pripisana sredstvu i,
- $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$ varianca sredstva i in
- σ_{ij} kovarianca med sredstvoma i in j.

Zapis v matrični obliki vsebuje oznaki $x = (x_1, ..., x_n)$, ki je stolpični vektor uteži in Σ, ki je kovariančna matrika donosov

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pomembna lastnost, kateri mora zadoščati kovariančna matrika, je pozitivna definitnost. V nasprotnem primeru ni mogoče določiti optimalnih uteži za sredstva v

[4]»Dober portfelj je več kot le dolg seznam delnic in obveznic. Je uravnotežena celota, ki investitorju zagotavlja varnost in priložnosti skupaj z širokim spektrom naključij.«

portfelju. Hkrati je s tem izpolnjena zahteva o obrnljivosti kovariančne matrike, kar je nujno potrebno v procesu določanja optimalnih uteži sredstvom v portfelju ([17], str. 18).
S tem, ko je Markowitz za definicijo tveganja izbral varianco prihodnjih donosov, je opomnil tudi na pomembnost diverzifikacije v portfelju. Matematično je varianca portfelja vsota izrazov, ki vključujejo tako variance donosov posameznih sredstev kot kovariance med temi donosi. Zato investiranje celotnega premoženja v sredstva, ki so med seboj močno korelirana, ni ravno preudarna strategija, tudi če se za vsako posamezno sredstvo zdi, da je »zmagovalec«. Če je katerokoli posamezno sredstvo manj uspešno od pričakovanj, je zaradi visoke korelacije z ostalimi sredstvi zelo verjetno, da bodo tudi ostala sredstva nastopila slabo. S tem bi se bistveno zmanjšala vrednost celotnega portfelja ([10], str. 246).

Klasični Markowitzov okvir predpostavlja, da investitor naredi odločitev o svoji investiciji za eno časovno obdobje, ki je vnaprej določene dolžine. Investitorja zanima, kakšen bo donos njegovega portfelja na koncu tega časovnega obdobja ([10], str. 250).
Oblikovanje portfelja je dvostopenjski proces. Prva stopnja je namenjena oceni pričakovane donosnosti sredstev na podlagi opazovanja in izkušenj. Na drugi stopnji izračunavamo uteži sredstvom, ki sestavljajo portfelj. Klasični alokacijski problem povprečje-varianca je formuliran sledeče:

$$\min_x x^T \Sigma x \qquad p.p. \begin{cases} x^T \mu = r_{cilj} \\ x^T \mathbb{1} = 1 \end{cases}, \tag{3.1}$$

kjer je

- $\mathbb{1}$ vektor enic,
- $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)^T$ vektor pričakovanih donosov n sredstev,
- $r_{cilj} = x^T \mu \in \mathbb{R}$ vektor želenih donosov n sredstev.

Ciljna funkcija optimizacijskega problema je kvadratična za spremenljivko x. Minimizacijski problem (3.1) je konveksen, saj je ciljna funkcija konveksna, vse omejitve pa so linearne funkcije iskane spremenljivke. Optimalno rešitev za klasično povprečje-varianca portfeljsko alokacijo lahko z uporabo Lagrangevih multiplikatorjev zapišemo v zaključeni obliki (za izpeljavo in rezultat glej [10], str. 253).
Tipično je klasična povprečje-varianca optimizacija modificirana tako, da vključuje dodatne omejitve ali da je ciljna funkcija izražena na drugačen način. V takih primerih rešitev v zaključeni obliki redko obstaja, zato je za izračun optimalnih uteži potrebno uporabiti numerične metode.

4. Pomanjkljivosti Markowitzove teorije

Medtem ko se zdi Markowitzova rešitev močna in elegantna, naletimo na precej resnih pomanjkljivostih pri njenem praktičnem izvajanju. Zato je brezbrižnost številnih investicijskih praktikov do povprečje-varianca optimizacijskih tehnologij, kljub njihovi teoretični privlačnosti, razumljiva v mnogih primerih. Glavne probleme lahko strnemo v tri skupine.

(1) Model ustvari skoncentrirane portfelje: povprečje-varianca optimizacija običajno zgradi portfelje z velikimi dolgimi (nakupnimi) in kratkimi (prodajnimi) pozicijami v samo nekaj sredstev, kar nasprotuje pojmu diverzifikacije. Če bi bili parametri, ki se uporabljajo v optimizaciji (vektor pričakovanih donosov in kovariančna matrika), znani z gotovostjo, bi bilo razumno investirati v takšen skoncentriran portfelj. A pričakovani donosi so le napovedi, zato je takšna naložbena izbira zelo tvegana ([17], str. 27). Drugi razlog, ki vodi v »optimalne« portfelje, ki so pretirano skoncentrirani na neko omejeno podskupino celotnega nabora sredstev, so subjektivne ocene prihodnjih donosov in tveganj, ki so velikokrat pod vplivom vedenjske pristranskosti investitorja. Primer takšne pristranskosti so investitorjeve previsoke ocene pričakovanih donosov za določeni razred sredstev, zaradi trenutne močne uspešnosti tega razreda ([4], str. 108). Povprečje-varianca analiza potrebuje specifično oceno pričakovanega donosa posameznega sredstva in ne bi smela omogočati investitorju, da svoja prepričanja izrazi v relativnem smislu in jim hkrati pripiše različne stopnje zaupanja, ki odražajo njegovo negotovost v posamezno pričakovanje.
(2) Model zahteva veliko vhodnih podatkov: model zahteva vhodne podatke o pričakovanih donosih, variancah in kovariancah vsakega sredstva, ki je vključen v portfelj. Pri veliki količini sredstev je zelo zapletena naloga podati ocene za vse vhodne parametre. Kot rešitev tega problema lahko za podajo ocene pričakovanih donosov uporabimo zgodovinske podatke, vendar so zgodovinske ocene pogosto slabi napovedovalci obnašanja v prihodnosti, saj vsebujejo daleč preveč šuma, da bi bile uporabne, še posebej če premija za tveganje[5] (ang. *risk premia*) in korelacije za razrede sredstev časovno variirajo. Poleg tega, možnost premika paradigme na kapitalskem trgu naredi zgodovinske podatke veliko manj relevantne za napovedovanje prihodnjega razvoja donosov sredstev ([4], str. 108).
(3) Model ni robusten, saj je pretirano občutljiv na vhodne parametre: majhne spremembe v vrednostih vhodnih podatkov lahko povzročijo velike spremembe v sestavi portfelja. Povprečje-varianca model predpostavlja, da so vhodni podatki pravilni, brez kakršne koli napake ocenjevanja. Ker to seveda ne drži, model s tem maksimizira učinke napak v vhodnih podatkih, zato pogosto zasledimo, da se za Markowitzov optimizacijski problem uporablja izraz maksimizator ocenitvene napake ([17], str. 27). Eden od krivcev za ne robustno obnašanje naj bi bila kovariančna matrika, saj je pogosto ocenjena iz podatkov, pri čemer lahko postopek ocenjevanja proizvede matrike, ki so blizu singularnosti ali pa so povsem singularne. To povzroča probleme pri izračunu obrnljive matrike med postopkom optimizacije.
Avtorji članka [13] so pokazali, da še večjo krivdo za ne robustnost modela nosijo ocene pričakovanih donosov. Prikazali so, da se natančnost (izračunana s pomočjo variance ocenjenih parametrov) pri ocenjevanju pričakovanih donosov in natančnost pri ocenjevanju standardnega odklona močno razlikujeta.

[5] Premija za tveganje je razlika med pričakovanim donosom portfelja in zagotovljenim donosom na netvegan vrednostni papir. Ekvivalentno poimenovanje je pričakovani preseženi donos (ang. *expected excess return*) portfelja.

V ta namen so definirali natančnosti kazalnik

$$\frac{var(\hat{\mu_i})}{var(\hat{\sigma_i})} \approx 2n,$$

pri čemer je n število enako dolgih podobdobij znotraj enega leta ($n = 12$, če uporabljamo mesečne podatke ali $n = 250$, če uporabljamo dnevne podatke). Vidimo, da se tipično natančnostni kazalnik giblje v rangu med 24 in 500, kar dokazuje, da je kovariančna matrika lahko ocenjena z bistveno višjo natančnostjo kot vektor pričakovanih donosov. Investitor lahko natančnost ocene zviša z uporabo daljše časovne vrste. Če bi bila dolžina časovne vrste neskončna, bi bili obe oceni, tako pričakovanih donosov kot kovariančne matrike, točni. Torej tveganja, ki izhaja iz ocenjevanja ne bi bilo. Kakorkoli, realne časovne vrste niso tako dolge in zato parametri ne morejo biti ocenjeni točno.

Za soočenje z omenjenimi problemi klasičnega Markowitzovega optimizacijskega problema, so akademiki predlagali številne alternativne metode. Te metode vključujejo tehniko zankanja (ang. *bootstrapping*), regularizacijo kovariančne matrike z najrazličnejšimi metodami, regularizacijo specifikacije programa z uvedbo določenih omejitev na uteži in robustno alokacijo sredstev. A tudi te alternative imajo svoje slabosti. Njihova najbolj izpostavljena pomanjkljivost je dodatna računska obremenitev, s katero se mora soočiti investitor, če želi poračunati rešitev v primeru velikega števila scenarijev. Poleg tega se je večkrat izkazalo, da uspešnost teh pristopov ni nujno boljša od tradicionalne.
Kritike, ki s strani investitorjev letijo na optimizacijski pristop povprečje-varianca, so se še dodatno okrepile po finančni krizi leta 2008. Ta je povzročila, da se je investitorjeva toleranca do tveganja znižala, zato se je na trgu začel pojavljati vedno večji delež investitorjev, ki preferirajo bolj hevristične rešitve. Te so računsko enostavne za implementacijo in robustne, saj niso odvisne od pričakovanih donosov, poleg tega pa ne potrebujejo dodatnih omejitev za pridobitev zadovoljivih rešitev. Poleg tega se je v mnogih primerih izkazalo, da klasična povprečje-varianca optimizacija lahko prinese rezultate, ki so slabši od shem hevrističnih metod ([14], str. 2).

Dva dobro poznana primera takšne tehnike sta portfelj z najnižjim tveganjem (ang. *minimum variance portfolio*) in portfelj z enakimi utežmi (ang. *equally-weighted portfolio*). Prvi je poseben portfelj na paraboli, ki je rezultat optimizacijskega problema povprečje-varianca (ang. *mean-variance efficient frontier*) in je sestavljena iz parov (r_{cilj}, σ_p) za vse možne r_{cilj}[6]. Portfelj z najnižjim tveganjem je edini povprečje-varianca učinkovit portfelj, ki za svojo izgradnjo ne potrebuje informacije o pričakovanih donosih in ga lahko obravnavamo kot robusten portfelj. Portfelj z najnižjim tveganjem v splošnem trpi zaradi pomanjkljivosti v portfeljski koncentraciji. Preprost in naraven način za razrešitev tega problema je pripis enakih uteži vsem sredstvom, ki so vključeni v portfelj. Portfelji z enakimi utežmi ali »1/n« portfelji so pogosto uporabljeni v praksi in so se izkazali za učinkovite pri

[6]Meja učinkovitosti (ang. *efficient frontier*) predstavlja zgornji del te parabole, spodnji del parabole se imenuje meja neučinkovitosti (ang. *inefficient frontier*). Portfelji na meji učinkovitosti imajo ob danem tveganju največjo pričakovano donosnost oziroma ob dani pričakovani donosnosti najnižje tveganje. Imenujejo se učinkoviti portfelji.

testiranju te strategije izven vzorca, torej kako se naj bi ta strategija na trgu obnašala v prihodnje. Poleg tega, če imajo vsa sredstva enak korelacijski koeficient in tudi identično povprečje ter varianco, je portfelj z enakimi utežmi enoličen portfelj na meji učinkovitosti. Njegova pomanjkljivost je ta, da lahko vodi v zelo omejeno diverzifikacijo tveganj, še posebej če se posamezna tveganja bistveno razlikujejo med seboj ([14], str. 2).

V nadaljevanju bomo predstavili še en hevristični pristop, ki predstavlja vmesno rešitev med portfeljem z najnižjim tveganjem in portfeljem z enakimi utežmi. Gre za pristop s pariteto tveganj, katerega ideja je izenačitev prispevkov tveganja (ang. *risk contribution*) iz vseh sredstev portfelja. Prispevek tveganja komponente i je delež celotnega tveganja portfelja, pripisanega tej komponenti. Ukvarjanje s prispevki tveganja je postala standardna praksa za institucionalne vlagatelje, znana pod etiketo *»risk budgeting«*. V nekaterih primerih investitor ne želi upravljati izpostavljenosti tveganju na enoten način. V tem primeru zneski tveganja (ang. *risk budget*), pripisani posameznim sredstvom v portfelju, niso enaki. Zanimiv je tudi primer raziskave, ki je predstavila metodo za upravljanje portfelja državnih obveznic, pri kateri so zneski tveganja za vsako državo proporcionalni BDPju te države ([3], str. 2).

5. Motivacija za portfelj s pariteto tveganj

Upravljavci portfeljev se pogosto sklicujejo na rek, ki pravi, da je diverzifikacija edino »zastonj kosilo« pri investiranju. Na videz jasna trditev v ozadju skriva vprašanja kot so, kaj mislimo z diverzifikacijo in kaj je zastonj kosilo pri investiranju. Je zastonj kosilo nižje tveganje, višji donos ali mogoče oboje? Iskanje odgovora na to vprašanje nas pripelje do še enega, precej dobro poznanega in na videz tudi dobro upoštevanega načela investiranja. Ta se glasi: »Ne nosi vseh jajc v isti košari.«. Iz tega precej jasno sledi, da položiti več kot 90% jajc v eno košaro ni ravno primerna diverzifikacija. A očitno veliko investitorjev, ki vlagajo v uravnotežen 60/40 portfelj[7], počne ravno to. Kaj bi potemtakem bila primerna diverzifikacija ([20], str. 1)?

Obstajajo različni pogledi na pomen diverzifikacije portfelja in odgovor na prejšnje vprašanje se skriva v diverzifikaciji tveganja in ne kapitalski diverzifikaciji. Če je sredstvo A veliko bolj tvegano od sredstva B, moramo z namenom diverzifikacije naložbenega tveganja, manj investirati v sredstvo A in več v sredstvo B. In če se vrnemo na primer delnic in obveznic - v splošnem imajo delnice višjo volatilnost in višji pričakovani donos, medtem ko imajo obveznice nižjo volatilnost in nižji pričakovani donos. Qian [20] je za 60/40 portfelj izračunal[8], da preko 90% tveganja portfelja prispevajo delnice. Torej je v takšnem portfelju diverzifikacijski učinek obveznic za-

[7]Ker je povprečje-varianca pristop zahteven za izvedbo v praksi (težave z natančnim ocenjevanjem pričakovanih donosov), se investitorji v praksi pogosto držijo 60/40 pravila, ki pravi, da je dober portfelj sestavljen iz 60 odstotkov delniških sredstev in 40 odstotkov obvezniških sredstev, brez kakršnekoli zahteve po povprečje-varianca optimalnosti. Motivacija za takšno portfeljsko strukturo je 8% do 9% pričakovani donos portfelja, ki se lahko pripiše takšni mešanici sredstev ([5], str. 1).

[8]Na podlagi delniškega indeksa Russel 1000 Index in obvezniškega indeksa Lehman Aggregate Bond Index.

nemarljiv. Portfelj 60/40 dodeli višji procent bolj tveganim sredstvom (delnice) in nižji procent manj tveganim sredstvom (obveznice), zato je premalo diverzificiran v svoji izpostavljenosti tveganju. Portfelj 60/40 je primer uravnoteženega portfelja v smislu alokacije kapitala, a zelo skoncentriranega z vidika alokacije tveganja, saj zasluži večino svojega donosa iz izpostavljenosti delniškemu tveganju in le malo iz drugih virov tveganja.

Dramatični dogodki, ki so se zgodili v svetu finančnih trgov v času finančne krize, so potrdili pomembnost enakomerne porazdelitve tveganja med razrede sredstev, ki sestavljajo portfelj. Zato je potrebno nameniti pozornost deležem tveganj, ki jih prispevajo posamezna sredstva v portfelju. Za razlago o tem, zakaj bi morali investitorji skrbeti glede prispevkov tveganja, moramo namesto matematične definicije tveganja, pogledati ekonomsko interpretacijo prispevka tveganja. Prispevek tveganja je zelo natančni indikator prispevka izgube (ang. *loss contribution*). Na tveganje lahko gledamo kot na abstraktni koncept, dokler ne pride do izgube. Ko do nje pride, tako upravljavci portfeljev kot investitorji vedno želijo izvedeti, kaj je pripevalo k izgubi. Qian [20] je na primeru 60/40 portfelja pokazal, da pri izgubah nad 2%, v povprečju delnice prispevajo 96% izgube. Pri višjih izgubah so prispevkih iz delnic še višji, tudi nad 100%. Ta primer ponuja empirične dokaze za ekonomsko interpretacijo prispevkov tveganja: prispevek tveganja aproksimira pričakovan prispevek izgube iz sestavin portfelja. To drži, če za izračun prispevka tveganja uporabimo variance in kovariance donosov.

Torej, 60/40 portfelj ni dobro diverzificiran, saj je ob pojavu izgube dostojne velikosti, čez 90% le-te mogoče pripisati delnicam. Torej se vsaka velika izguba v delnicah odraža v izgubi podobne velikosti celotnega portfelja ([20], str. 2). Zato je potrebno oblikovati portfelj, ki omeji vpliv velikih izgub iz posameznih komponent. Za dosego takšnega portfelja moramo zagotoviti, da je prispevek tveganja vsakega sredstva enak želenemu znesku tveganja. Koncept prispevkov tveganj in njihova ekonomska interpretacija nas vodi k razvoju portfeljev z razporejenim tveganjem in njegovemu posebnemu primeru, to je portfelju s pariteto tveganj. V portfelju s pariteto tveganj vsak razred sredstev prispeva enak delež tveganja k celotnemu tveganju portfelja. Torej sta v portfelju s pariteto tveganj prispevka tveganj s strani delnic in obveznic enaka[9] ([4], str. 109). Qian [20] je na istih podatkih kot za 60/40 portfelj izračunal, da je portfelj s pariteto tveganj dosežen z alokacijo 23% v delnice in 77% v obveznice[10]. Drastično se spremenijo tudi rezultati o prispevkih izgub za portfelj s pariteto tveganj. Pri izgubah nad 2%, delnice prispevajo 48% in obveznice 52%, pri višjih izgubah se procenti za delnice še nekoliko znižajo in procenti za obveznice nekoliko zvišajo ([20], str. 3).

Qian je uspešnost obeh portfeljev primerjal na osnovi Sharpe kazalnika[11]. Njegovi rezultati so vidni v tabeli 1.

[9] V portfelj s pariteto tveganj lahko vključimo številne razrede sredstev, vendar bomo za ilustracijo prikazali njegovo potencialno korist na primeru dveh razredov. Kljub temu opomnimo, da je strategija paritete tveganj na večjem številu razredov sredstev bolj učinkovita in robustna kot ta preprosti primer.

[10] Tudi v portfelju z več kot dvemi sredstvi v splošnem velja, da je portfelj s pariteto tveganj utežen s sredstvi s fiksnim donosom, kar se odraža v nižji portfeljski volatilnosti in donosih.

[11] Več o Sharpe kazalniku je zapisano v 9. poglavju.

	Russell 1000	Lehman Agg	60/40	Pariteta tveganj
Povprečni donos	8,3%	3,7%	6,4%	4,7%
Standardni odklon	15,1%	4,6%	9,6%	5,4%
Sharpe kazalnik	0,55	0,80	0,67	0,87

TABELA 1. Karakteristike indeksov in portfelja ([20], str. 2)

Opazimo, da ima portfelj 60/40 tako povprečni donos kot standardni odklon med tistima za delnice in obveznice. Njegov Sharpe kazalnik znaša $0,67$, kar je nižje od Sharpe kazalnika obveznic, katere so indikator slabe diverzifikacije. Medtem ko je Sharpe kazalnik za 60/40 portfelj nižji od ene od njegovih komponent, je Sharpe kazalnik za portfelj s pariteto tveganj višji od obeh. En način za interpretacijo Sharpe kazalnika je donos v procentnih točkah za vsak 1% sprejetega tveganja. Torej za vsak 1% vzetega tveganja, je donos 60/40 portfelja $0,67\%$, medtem ko je donos portfelja s pariteto tveganj $0,87\%$.

Poleg boljšega Sharpe kazalnika je glavna prednost določevanja uteži s pariteto tveganj glede na povprečje-varianca optimizacijo ta, da investitorjem pri oblikovanju portfeljev ni treba oblikovati predpostavk o pričakovanih donosih. Edini potrebni vhodni podatek je kovarianca razreda sredstev, ki se lahko z uporabo zgodovinskih podatkov, kot smo videli v prejšnjem poglavju, oceni veliko bolj natančno kot pričakovani donosi.
V primerjavi z alokacijo sredstev, ki je pretežno osredotočena na kapitalsko tržne donose, se hevristični portfelj s pariteto tveganj šteje tudi za bolj transparentnega in mehaničnega, saj zniža tveganje vedenjske pristranskosti, ki vpliva na odločitve o alokaciji sredstev ([4], str. 109).
Investitorji s portfelji s pariteto tveganj žanjejo še druge koristi prave diverzifikacije ([20], str. 3):

(1) Vsak razred sredstev ima garantirano neničelno utež v portfelju.
(2) Uteži so pod vplivom korelacij donosov sredstev na želen način, to je: sredstva, ki izkazujejo višjo korelacijo z ostalimi razredi sredstev, imajo nižjo utež in tista, ki izkazujejo nižjo korelacijo z ostalimi razredi sredstev, imajo višjo utež.
(3) Donosi takšnega portfelja so bolj stabilni skozi čas.
(4) Portfelj je robusten do različnih gospodarskih režimov.
(5) Njegova ideja predstavlja pomembno zaščito pred padci med finančno krizo.

Do sedaj smo izpostavili le prednosti portfelja s pariteto tveganj pred 60/40 portfeljem. A vendar mora obstajati razlog za investiranje na podlagi kapitalske divezifikacije, saj se 60/40 pravilo, kljub novim raziskavam, še vedno zelo veliko uporablja med investitorji. Če pogledamo tabelo 1, bomo ta razlog hitro odkrili. Iz nje lahko razberemo, da je donos 60/40 portfelja enak $6,4\%$, donos portfelja s pariteto tveganj pa $4,7\%$. Torej ima bolj diverzificiran portfelj (v smislu tveganja) nižji donos od manj diverzificiranega portfelja, kljub temu da je njegov za tveganje popravljen donos (Shape kazalnik) boljši. Vendar višji za tveganje popravljen donos ni ravno »zastonj kosilo« - investitorji želijo visoke donose, saj diverzifikacija sama po sebi ne plačuje računov ([22], str. 1).

Ker je nizek donos portfelja edina pomanjkljivost, ki smo jo odkrili pri portfelju s pariteto tveganj, se vprašamo, ali bi lahko dosegli oboje, vrhunsko diverzifikacijo in višji skupni donos? Ena rešitev za dosego višjih stopenj donosa je uporaba vzvoda. Veliko investitorjev sprejme dejstvo, da je nekaj stopnje vzvoda potrebno in koristno pri investiranju. Medtem ko uporaba vzvoda potegne s seboj nekatera kratkoročna tveganja, je še vedno primerno in razumno varno uporabiti vzvod v portfeljih s pariteto tveganj na dolgi rok. Ker imajo obveznice veliko nižje tveganje od delnic, portfelj s pariteto tveganj vzvodi obveznice tako, da imajo enak prispevek tveganja kot delnice. Z uporabo vzvoda, lahko portfelj s pariteto tveganj ustvari enak ali višji donos kot 60/40 portfelj, ob tem pa ohranja višji Sharpe kazalnik ([20], str. 4).

6. Portfelj s pariteto tveganj

6.1. Definicija

Naj bo portfelj sestavljen iz n sredstev. Označimo z x_i utež i-tega sredstva in z $R(x_1,...,x_n)$ mero tveganja za portfelj $x=(x_1,...,x_n)$. Če je mera tveganja koherentna[12] in konveksna, potem zadošča Eulerjevemu izreku o homogeni funkciji[13]

$$R(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{\partial R(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}.$$

Torej je mera tveganja za portfelj vsota produktov uteži in marginalnih prispevkov tveganja po posameznih sredstvih, ki sestavljajo portfelj. Zato je smiselno definirati celotni prispevek tveganja i-tega sredstva z

$$TRC_i(x_1,...,x_n)=x_i\cdot\frac{\partial R(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}.$$

Predpostavimo, da imamo nabor zneskov tveganja $b_1,...,b_n$. Potem je portfelj z razporejenim tveganjem (ang. *risk budgeting portfolio*) definiran z naborom omejitev

$$\begin{cases} TRC_1(x_1,...,x_n)=b_1R(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ TRC_i(x_1,...,x_n)=b_iR(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ TRC_n(x_1,...,x_n)=b_nR(x_1,...,x_n) \end{cases}. \tag{6.1}$$

Za določitev portfelja z razporejenim tveganjem, to je določitev uteži posameznim sredstvom, ki so vključeni v ta portfelj, je potrebno rešiti sistem nelinearnih enačb (6.1) ([3], str. 3).

[12]Koherentna mera tveganja je mera, ki je subaditivna, monotona, pozitivno homogena in translacijsko invariantna ([9], str. 250).

[13]Eulerjev izrek o homogeni funkciji ([2], str. 1):
Naj bo funkcija $f:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na $\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$. Potem je f homogena stopnje k, če in samo če za vse $x\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ velja

$$kf(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Portfelj s pariteto tveganj (ang. *risk parity portfolio*, *equally-weighted risk contributions portfolio*) je portfelj z razporejenim tveganjem, pri katerem so celotni prispevki tveganj iz vseh sredstev enaki, to je $TRC_i = TRC_j$ za vse i,j. Iz tega sledi, da so zneski tveganj, ki jih pripišemo vsakemu od n sredstev, med seboj enaki, to je $b_i = b_j = \frac{1}{n}$ za vse i,j.
V nadaljevanju se bomo osredotočili na portfelj s pariteto tveganj. Veliko lastnosti, ki veljajo za portfelj s pariteto tveganj, lahko posplošimo na portfelj z razporejenim tveganjem. V tem primeru so rezultati bolj kompleksni in še redkeje v zaključeni obliki.

Markowitz je v svojem optimizacijskem problemu tveganje definiral z varianco, mi pa bomo za mero tveganja uporabili volatilnost ali standardni odklon $\sigma(x)$. Naj ob tem opomnimo, da se večina rezultatov lahko posploši tudi na druge mere tveganja. Naj bo σ_i^2 varianca sredstva i, σ_{ij} kovarianca med sredstvoma i in j ter Σ kovariančna matrika, ki je definirana v 3. poglavju. Potem je tveganje portfelja definirano z

$$R(x) = \sigma(x) = \sqrt{\sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij}} = \sqrt{x^T \Sigma x}.$$

Marginalni prispevek tveganja in celotni prispevek tveganja i-tega sredstva, glede na izbrano mero tveganja, sta zaporedoma definirana sledeče[14]:

$$MRC_i(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(x)} = \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}},$$

$$TRC_i(x) = x_i \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = x_i \cdot \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = x_i \cdot \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}}.$$

Pridevnik »marginalni« v izrazu za marginalni prispevek tveganja kvalificira dejstvo, da ta količina meri spremembo v volatilnosti portfelja, ki je povzročena z infinitezimalnim povečanjem uteži ene od komponent portfelja ([14], str. 4).

Izbrana mera tveganja mora izpolnjevati Eulerjev izrek o homogeni funkciji. Upoštevajmo, da je volatilnost $\sigma(x)$ homogena funkcija stopnje 1 in preverimo

$$\sum_{i=1}^{n} TRC_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}} = x^T \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} = \sqrt{x^T \Sigma x} = \sigma(x).$$

Volatilnost dokazano izpolnjuje Eulerjev izrek o homogeni funkciji in je zato ustrezna mera tveganja za portfelj s pariteto tveganj.

Sistem (6.1) (skupaj s predpostavko $b_i = b_j = \frac{1}{n}$ za vsak i,j) je prevelik za definicijo portfelja s pariteto tveganj, zato ga bomo zožili z dodatnimi omejitvami. Naš cilj je izgradnja uravnoteženega portfelja glede na tveganje, kar bomo dosegli z izenačitvijo celotnih prispevkov tveganja vseh sredstev v portfelju. Negativen ali ničelni celotni prispevek tveganja iz nekaterih sredstev bi pomenil, da je tveganje zelo skoncentrirano v ostalih sredstvih portfelja. Zato se omejimo na celotne prispevke tveganja, ki so strogo pozitivni. Prav tako se bomo osredotočili na pridobitev portfelja, ki je sestavljen le iz dolgih pozicij, kar pomeni, da so vse uteži sredstev v portfelju nenegativne. Dodamo še omejitev, da se morajo tako celotni prispevki tveganja kot tudi uteži sredstev znotraj portfelja sešteti v ena ([3], str.

[14]Privzeli bomo, da sta varianca σ_i^2 in kovarianca σ_{ij} neodvisni od x.

4). Če povzamemo, portfelj s pariteto tveganj je rešitev naslednjega matematičnega problema[15]

$$x^* = \{x \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \cdot (\Sigma x)_i = x_j \cdot (\Sigma x)_j\}, \tag{6.2}$$

kjer $(\Sigma x)_i$ označuje i-to vrstico vektorja, ki ga dobimo kot produkt Σ z x. Opomnimo, da ima proračunska omejitev $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ vlogo normalizacije. Torej, če je portfelj y takšen, da velja $y_i \cdot \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y_i} = y_j \cdot \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y_j}$ za $y_i \geq 0$, vendar $\sum y_i \neq 1$, potem je portfelj x, definiran z $x_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, portfelj s pariteto tveganj ([14], str. 5).

6.2. Lastnosti

Najprej bomo analizirali portfelj s pariteto tveganj na primeru dveh sredstev, nato bomo analizo prenesli na splošni primer. Pokazali bomo, da portfelj s pariteto tveganj obstaja in je enoličen. Pokomentirali bomo tudi optimalnost takšnega portfelja.

6.2.1. Primer dveh sredstev (n=2)

Naj bo ρ korelacija med dvema sredstvoma in $x = (w, 1-w)$ vektor nujnih uteži. Vektor celotnih prispevkov tveganja je

$$\begin{pmatrix} TRC_1 \\ TRC_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma(x)} \begin{pmatrix} w^2\sigma_1^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \\ (1-w)^2\sigma_2^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

V tem primeru iskanje portfelja s pariteto tveganj pomeni iskanje takšne uteži w, da bosta obe vrstici vektorja v sistemu (6.3) enaki

$$w^2\sigma_1^2 = (1-w)^2\sigma_2^2.$$

Z preprostim računom in skupaj s pogojem $0 \leq w \leq 1$ pridemo do enolične rešitve

$$x^* = \Big(\frac{\sigma_1^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}}, \frac{\sigma_2^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}}\Big).$$

Opazimo, da rešitev ni odvisna od korelacije ρ ([14], str. 5).

6.2.2. Splošen primer (n>2)

V splošnih primerih število parametrov hitro narašča, saj varianca portfelja vključuje n^2 možnih izrazov, to je: n varianc in $n(n-1)$ kovarianc med različnimi sredstvi ([9], str. 263). Ko imamo opravka s portfeljem, ki ima v svojem naboru večje število razredov sredstev, se portfeljska konstrukcija med posameznimi nabori zelo razlikuje, saj lahko korelacijske predpostavke med sredstvi igrajo ključno vlogo ([4], str. 109). Zato je nemogoče najti eksplicitno rešitev za portfelj s pariteto tveganj v splošnem primeru. Kljub temu obstaja primer, ki pod določenimi predpostavkami pripelje do rešitve v zaključeni obliki.

Posebni primer, ki pripelje do preproste analitične rešitve za portfelj s pariteto tveganj, vključuje predpostavko o enakih korelacijah za vsak par spremenljivk. Če

[15] Upoštevamo, da je $\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} \propto (\Sigma x)_i$.

upoštevamo, da je $\rho_{i,j} = \rho$ za vse i, j, potem je celotni prispevek tveganja sredstva i dan z

$$TRC_i(x) = \frac{x_i^2\sigma_i^2 + \rho \sum_{j\neq i} x_i x_j \sigma_i \sigma_j}{\sigma(x)} = \frac{x_i\sigma_i((1-\rho)x_i\sigma_i + \rho\sum_j x_j\sigma_j)}{\sigma(x)}.$$

Ker je portfelj s pariteto tveganj definiran z $TRC_i(x) = TRC_j(x)$ za vse i, j, lahko pokažemo, da je ta lastnost ekvivalentna $x_i\sigma_i = x_j\sigma_j$.

Iz lastnosti $TRC_i(x) = TRC_j(x)$ sledi

$$x_i\sigma_i((1-\rho)x_i\sigma_i + \rho\sum_j x_j\sigma_j) = x_k\sigma_k((1-\rho)x_k\sigma_k + \rho\sum_j x_j\sigma_j). \tag{6.4}$$

Za bolj pregledno analizo vpeljemo oznake

- $y = x_i\sigma_i$,
- $z = x_k\sigma_k$ in
- $C(y, z) = \rho\sum_j x_j\sigma_j$.

Z uporabo pravkar vpeljanih oznak lahko enačbo (6.4) zapišemo v obliki

$$(1-\rho)y^2 + C(y,z)y = (1-\rho)z^2 + C(y,z)z.$$

Enačbo nekoliko preoblikujemo:

$$(1-\rho)(y^2 - z^2) + C(y,z)(y-z) = 0,$$

$$(y-z)((1-\rho)(y+z) + C(y,z)) = 0. \tag{6.5}$$

Iz enačbe (6.5) lahko razberemo dve rešitvi:

(1) $y = z$,
(2) $(1-\rho)(y+z) + C(y,z) = 0$.

Prva rešitev nam je všeč, saj iz nje sledi, da je $x_i\sigma_i = x_j\sigma_j$. Zato je potrebno pokazati, da bodisi druga rešitev ne drži bodisi drži hkrati, ko drži prva rešitev.

Za potrebe analize rešitve (2) razpišemo funkcijo C na način

$$C(y,z) = \rho\sum_j x_j\sigma_j = \rho(y + z + \sum_{j\neq i,k} x_j\sigma_j).$$

Sedaj lahko rešitev (2) poenostavimo

$$(1-\rho)(y+z) + \rho(y+z) + \rho\sum_{j\neq i,k} x_j\sigma_j = 0$$

$$y + z = -\rho\sum_{j\neq i,k} x_j\sigma_j. \tag{6.6}$$

Obravnavajmo enačbo (6.6) glede na predznak korelacijskega koeficienta ρ:

(2a) Naj bo $\rho > 0$. V tem primeru takoj pridemo v protislovje, saj so uteži po definiciji nenegativne. Zato bosta leva in desna stran enačbe (6.6) vedno nasprotno predznačeni. Tudi če se zgodi, da bo ena stran enačbe enaka nič, bo druga stran bodisi pozitivna bodisi negativna, saj se morajo uteži sešteti v ena.

(2b) Naj bo $\rho = 0$. Ta primer je zelo enostaven, saj že iz enačbe (6.4) sledi

$$x_i^2\sigma_i^2 = x_k^2\sigma_k^2.$$

Ker so vse uteži nenegativne, lahko izraza na obeh straneh korenimo in pridemo do rešitve

$$x_i\sigma_i = x_k\sigma_k,$$

kar je enako rešitvi (1) enačbe (6.5).

(2c) Naj bo $\rho < 0$. Najprej rešitev (2) zapišemo v še nekoliko drugačni obliki. Če izraz (6.6) vstavimo v rešitev (2), dobimo le-to v novi obliki:

$$C(y, z) = \rho(1-\rho)\sum_{j\neq i,k} x_j\sigma_j. \tag{6.7}$$

Sedaj bomo poskusili s protislovjem dokazati, da rešitev (2) ne drži, če hkrati ne drži 1 rešitev. Torej naj bodisi velja

$$x_i\sigma_i \neq x_l\sigma_l \text{ in } x_i\sigma_i \neq x_k\sigma_k$$

bodisi

$$\rho(1-\rho)\textstyle\sum_{j\neq i,l} x_j\sigma_j = \rho(1-\rho)\sum_{j\neq i,k} x_j\sigma_j.$$

Vendar iz zadnjega enačaja sledi

$$x_l\sigma_l = x_k\sigma_k.$$

Zato množica $\{x_j\sigma_j,\ j = 1, ..., n\}$ razpade na maksimalno dva dela: $\{x_i\sigma_i\} \cup \{x_k\sigma_k\}$. Naj bo $0 < m < 1$. Potem lahko funkcijo $C(y, z)$ zapišemo v obliki

$$C(y, z) = \rho\sum_j x_j\sigma_j = \rho m(x_i\sigma_i) + \rho(n-m)(x_k\sigma_k).$$

Novo definicijo funkcije $C(y, z)$ vstavimo v rešitev (2) in poračunamo

$$(1-\rho)(x_i\sigma_i + x_k\sigma_k) + \rho\sum_j x_j\sigma_j = 0,$$

$$(1-\rho)x_i\sigma_i + (1-\rho)x_k\sigma_k + \rho m x_i\sigma_i + \rho(n-m)(x_k\sigma_k) = 0,$$

$$(1-\rho(1-m))x_i\sigma_i + (1-\rho(1-(n-m)))x_k\sigma_k = 0. \tag{6.8}$$

Ker velja
- $m \leq n-1$,
- $n - m \leq n-1$ in
- $\rho \in [-\frac{1}{n-1}, 0)$[16],

[16]Avtorji članka [14] so predpostavili, da je konstantna korelacija $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$. Oglejmo si, kako lahko pridemo do te omejitve. Korelacijska matrika je ob predpostavki, da so vse korelacije enake, enaka kovariančni matriki le, če predpostavimo, da so vse variance $\sigma^2 = 1$. Za n slučajnih spremenljivk $X_1, ..., X_n$ potem velja

$$Var(X_1 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n Cov(X_i, X_j) = n + n(n-1)\rho \geq 0.$$

Z nekaj obračanja pridemo do rešitve

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1}.$$

sta oba seštevanca v enačbi (6.8) strogo večja od nič. Zato vsota ni enaka nič. Tako pridemo v protislovje s trditvijo, da lahko množica $\{x_j\sigma_j,\ j = 1, ..., n\}$ razpade na dva dela.
Ostane nam le še možnost, da je druga rešitev izpolnjena v primeru, ko drži prva rešitev. Ob tej predpostavki se rešitev (2) preoblikuje v

$$2(1-\rho)x_i\sigma_i + \rho n x_i \sigma_i = 0.$$

Z malo obračanja pridemo do rešitve

$$\rho = -\frac{2}{n-2}.$$

Ker smo za spodnjo mejo konstantne korelacije predpostavili, da je $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$, dobljena rešitev ne drži. Torej rešitev (2) nikoli ni izpolnjena.

S tem smo pokazali, da je lastnost $TRC_i(x) = TRC_j(x)$ za vse i, j ekvivalentna lastnosti $x_i\sigma_i = x_j\sigma_j$. Skupaj z (normalizacijsko) proračunsko omejitvijo $\sum_i x_i = 1$ dobimo rezultat

$$x_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1}}.$$ [17]

Utež posamezne komponente i v portfelju s pariteto tveganj je določena z razmerjem med inverzom njene volatilnosti in harmoničnim povprečjem volatilnosti. Višja (nižja) kot je volatilnost komponente, nižja (višja) bo utež v portfelju s pariteto tveganj ([14], str. 6).

V ostalih primerih ni mogoče najti eksplicitne rešitve za portfelj s pariteto tveganj. Tudi če namesto konstantne korelacije predpostavimo, da so volatilnosti vseh sredstev enake, to je $\sigma_i = \sigma$ za vse i, dobimo endogeno rešitev v kateri je utež x_i neposredno funkcija same sebe.
Enako vprašanje o endogenosti se pojavi v splošnem primeru, ko so tako volatilnosti kot korelacije med sredstvi različne. V takem primeru ni mogoče najti eksplicitne rešitve za portfelj s pariteto tveganj, lahko pa najdemo finančno interpretacijo takšnega portfelja. V ta namen definiramo količino β_i, katera meri občutljivost sredstva i na sistematično (tržno) tveganje, katerega v tem primeru predstavlja portfelj x

$$\beta_i = \frac{\sigma_{ix}}{\sigma^2(x)} = \rho_{ix}\frac{\sigma_i}{\sigma(x)}.$$

V definiciji za β_i nastopa kovarianca σ_{ix} med donosom komponente i in donosom portfelja x, ki je definirana kot

$$\sigma_{ix} = cov(r_i, r_x) = cov(r_i, \sum_j x_j r_j) = \sum_j x_j \cdot cov(r_i, r_j) = \sum_j x_j \sigma_{ij} = (\Sigma x)_i.$$

Izraz za β_i vstavimo v že poznano definicijo celotnega prispevka tveganja in dobimo

$$TRC_i = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}} = x_i \beta_i \sigma(x).$$

[17] Lahko dokažemo, da je portfelj s pariteto tveganj v resnici portfelj z razporejenim tveganjem, ko konstantna korelacija doseže svojo spodnjo mejo $-\frac{1}{n-1}$.

Ker je portfelj s pariteto tveganj definiran z $TRC_i = TRC_j = \frac{\sigma(x)}{n}$ za vse i, j, lahko skupaj z lastnostjo $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ izračunamo uteži portfelja s formulo

$$x_i = \frac{\beta_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{-1}} = \frac{\beta_i^{-1}}{n}. \tag{6.9}$$

Torej je utež, ki jo pripišemo komponenti i, inverzno proporcionalna njeni beti. Višja (nižja) kot je beta, nižja (višja) je utež. Torej bodo komponente z višjo volatilnostjo ali višjo korelacijo z ostalimi sredstvi »kaznovane« z nižjimi utežmi. Opomnimo, da je ta rešitev endogena, saj je x_i funkcija komponente β_i, katera je po definiciji odvisna od portfelja x ([14], str. 6).

6.2.3. **Obstoj in enoličnost rešitve**

V splošnem ni mogoče poračunati uteži za portfelj s pariteto tveganj s formulo v zaključeni obliki. Iskanje rešitve zato zahteva uporabo numeričnega algoritma. Več o numeričnih rešitvah bomo zapisali v naslednjem poglavju, na tem mestu bomo poskusili le oblikovati optimizacijski problem. Glede na definicijo portfelja s pariteto tveganj se funkcija, ki jo je potrebno optimizirati, ponuja kar sama od sebe

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i(\Sigma x)_i - x_j(\Sigma x)_j)^2.$$

Optimizacijski problem se potem glasi

$$x^* = \arg\min f(x), \tag{6.10}$$
$$\text{p.p. } \mathbf{1}^T x = 1 \text{ in } 0 \leq x \leq 1.$$

Obstoj portfelja s pariteto tveganj je zagotovljen le, če je izpolnjen pogoj $f(x^*) = 0$. Torej mora za vse i, j veljati $x_i(\Sigma x)_i = x_j(\Sigma x)_j$, kar je definicija portfelja s pariteto tveganj. Program (6.10) minimizira varianco prispevkov tveganja z nekoliko spremenjenimi utežmi. Ker ima optimizacijski problem linearne omejitve, je načeloma lažji za numerično reševanje, kot če bi omejitve nastopale v nelinearni obliki. Kljub temu se še vedno najdejo primeri, za katere je numerična optimizacija težavna. Če numerične rešitve za optimizacijski problem (6.10) ne najdemo, lahko problem nekoliko spremenimo:

$$y^* = \arg\min f(y),$$
$$\text{p.p. } y \geq 0 \text{ in } \mathbf{1}^T y \geq c,$$

kjer je c nek poljuben pozitivni skalar. Portfelj s pariteto tveganj je v tem primeru določen z

$$x_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^n y_i^*}$$

za $f(x^*) = 0$. Spremenjeni optimizacijski problem je lažji za numerično reševanje kot (6.10), saj je neenakostna omejitev $\mathbf{1}^T y \geq c$ manj omejevalna od enakostne omejitve $\mathbf{1}^T x = 1$.

Maillard, Roncalli in Teiletche [14] so predlagali alternativo algoritmu (6.10) v obliki:

$$y^* = \arg\min \sqrt{y^T \Sigma y}, \tag{6.11}$$

$$p.p. \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln y_i \geq c \\ y \geq 0 \end{cases},$$

kjer je c neka poljubna konstanta. V tem primeru je program podoben problemu z minimalno varianco, vendar z omejitvami, ki naj bi zadovoljile diverzifikacijo uteži (to izraža prva omejitev). Portfelj s pariteto tveganj je nato določen z

$$x_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^n y_i^*}.$$

Da je alternativni algoritem ustrezen, se lahko prepričamo z izpeljavo optimizacijskega problema (6.11) preko Lagrangeve funkcije

$$L(y; \lambda; \lambda_c) = \sqrt{y^T \Sigma y} - \lambda^T y - \lambda_c (\sum_{i=1}^n \ln y_i - c). \tag{6.12}$$

Rešitev y^* zadošča naslednjemu pogoju prvega reda

$$\frac{\partial L(y; \lambda; \lambda_c)}{\partial y_i} = \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y_i} - \lambda_i - \lambda_c y_i^{-1} = 0.$$

Zapišemo Kuhn-Tuckerjeve pogoje

$$\begin{cases} \min(\lambda_i, y_i) = 0 \\ \min(\lambda_c, \sum_{i=1}^n \ln y_i - c) = 0 \end{cases}.$$

Ker $\ln y_i$ ni definiran za $y_i = 0$, očitno sledi, da je $y_i > 0$ in $\lambda_i = 0$. Opazimo, da mora biti omejitev $\sum_{i=1}^n \ln y_i = c$ nujno izpolnjena, saj rešitev ne more biti $y^* = 0$. Iz tega sledi, da je $\lambda_c \geq 0$. Če vse te ugotovitve vstavimo nazaj v pogoj prvega reda, dobimo enačbo

$$y_i \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y_i} = \lambda_c.$$

Iz nje vidimo, da so celotni prispevki tveganja enaki za vsa sredstva. Soočamo se z dobro znanim optimizacijskim problemom, saj je formulacija (6.11) pravzaprav definicija minimizacijskega programa kvadratne funkcije (konveksne funkcije) s spodnjo mejo, ki je konveksna funkcija. Rešitev takšnega problema vedno obstaja. Portfelj s pariteto tveganj izpeljemo z normalizacijo rešitve y^*, tako da je vsota uteži enaka ena ([14], str. 22).

Iz formulacije (6.11) vidimo, da portfelj s pariteto tveganj, določen z matematičnim problemom (6.2), obstaja in je enoličen[18] vse dokler je kovariančna matrika Σ pozitivno definitna. Naj le še opomnimo, da v kolikor sprostimo omejitev glede dolgih pozicij, pridobimo številne rešitve, ki zadovoljijo pogoje portfelja s pariteto tveganj ([14], str. 7).

[18] Do te rešitve pridemo tudi z vsako drugo mero tveganja, ki je konveksna in izpolnjuje Eulerjev izrek o homogeni funkciji.

6.2.4. **Optimalnost**

Optimalna alokacija tveganih sredstev, ki izhaja iz klasične povprečje-varianca optimizacije, je bila omenjena že v 3. poglavju. Učinkovit nabor portfeljev dostopen investitorjem, ki dodatno investirajo v netvegano sredstvo, je boljši (širši) od učinkovitega nabora portfeljev, ki je na voljo investitorjem, kateri investirajo le v tvegana sredstva ([10], str. 257). Nova meja učinkovitosti postane linearna premica (ang. *security (or capital) market line*), ki prikazuje različne kombinacije med netveganim sredstvom in portfeljem, sestavljenim iz tveganih sredstev. Tam kjer je nova meja učinkovitosti tangentna na staro mejo učinkovitosti, je edina racionalna kombinacija tveganih vrednostnih papirjev. Portfelj, ki je sestavljen iz te kombinacije sredstev, se imenuje tangentni portfelj. To je tudi portfelj, ki ima najvišji Sharpe kazalnik. Sestava portfelja z najvišjim Sharpe kazalnikom je podana v zaključeni obliki in je enaka

$$x = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r)}{\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mu - r)},$$

kjer je μ vektor pričakovanih donosov in r netvegani donos oziroma netvegana obrestna mera.

V nasprotju z naložbenimi pristopi tradicionalnih portfeljev za alokacijo sredstev, kateri tipično vključujejo napovedi dolgoročnih donosov sredstev in uporabljajo povprečje-varianca optimizacijo, portfelji s pariteto tveganj temeljijo zgolj na diverzifikaciji tveganja. Zato se pojavi vprašanje, ali diverzifikacija tveganja, zlasti paritetni prispevki tveganj, vodi do učinkovitih portfeljev?

Poskušajmo ugotoviti okoliščine, pod katerimi portfelj s pariteto tveganj ustreza portfelju z največjim Sharpe kazalnikom. V portfelju z največjim Sharpe kazalnikom je kazalnik marginalnega preseženega donosa proti marginalnemu tveganju enak za vsa sredstva, ki tvorijo portfelj. Prav tako je enak Sharpe kazalniku portfelja. Matematično lahko to zahtevo zapišemo v obliki ([14], str. 9)

$$\frac{\mu(x) - r}{\sigma(x)} = \frac{\partial_x \mu(x) - r}{\partial_x \sigma(x)}. \tag{6.13}$$

V enačbi (6.13) nastopajo naslednje oznake

- $\mu(x) = x^T\mu$,
- $\sigma(x) = \sqrt{x^T\Sigma x}$,
- $\partial_x \mu(x) = \mu$ in
- $\partial_x \sigma(x) = \Sigma x/\sigma(x)$.

Portfelj x je portfelj z najvišjim Sharpe kazalnikom, če izpolnjuje povezavo (6.13), ki jo bomo na tem mestu zapisali z drugimi oznakami

$$\mu - r = \Big(\frac{\mu(x) - r}{\sigma(x)}\Big)\frac{\Sigma x}{\sigma(x)}.$$

Lahko pokažemo, da je portfelj s pariteto tveganj znotraj Markowitzovega okvirja optimalen, če predpostavimo konstantno korelacijsko matriko, to je enake korelacije med vsemi sredstvi, in to podpremo z zahtevo, da imajo vsi razredi sredstev enak Sharpe kazalnik. Enaki Sharpe kazalniki pomenijo, da so pričakovani donosi proporcionalni tveganju za vsak razred sredstev. To je teoretično privlačno, saj to pomeni, da se sredstvom določi cena glede na njihovo tveganje.

Preverimo, da omenjene predpostavke veljajo za portfelj s pariteto tveganj. Ob predpostavki konstantnega korelacijskega koeficienta, je prispevek tveganja komponente i enak $(\Sigma x)_i/\sigma(x)$. Po definiciji bo ta prispevek tveganja enak za vsa sredstva. Z namenom preverjanja prejšnjega pogoja je zato dovolj, da vsako sredstvo prispeva enak individualni Sharpe kazalnik $s_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}$.
Za konec vseeno opomnimo, da brez konstantne korelacije ali enakih Sharpe kazalnikov, portfelj s pariteto tveganj več ne bo enak portfelju z najvišjim Sharpe kazalnikom ([14], str. 9).

7. Učinkovit algoritem za portfelj s pariteto tveganj

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da se moramo pri izračunu uteži za portfelj s pariteto tveganj, nasloniti na numerične algoritme. Vedno večja priljubljenost portfeljev, ki so oblikovani na osnovi tveganja, je spodbudila razvoj vedno boljših algoritmov, ki so namenjeni reševanju problema paritete tveganj.

Leta 2010 so Maillard, Roncalli in Teiletche [14] za reševanje optimizacijskega problema (6.10) in (6.11) predlagali uporabo zaporednega kvadratičnega programiranja (ang. *Sequential quadratic programming - SQP*). Problem tega algoritma je njegova časovna potratnost in morebitna izguba konvergence v primeru portfeljev, ki so sestavljeni iz več kot 200 sredstev.

Formulacijo (6.11) so leta 2012 uporabili Chaves, Hsu, Li in Shakernia [5] ter na njej izvedli klasični Newtonov algoritem. Dobro poznana težava Newtonovega algoritma je možna izguba konvergence, v kolikor začetni približek ni dovolj dober. Konvergenco Newtonovega algoritma je leta 2013 izboljšal Spinu [18], saj je opazil, da je ciljna funkcija sebi-konkordantna (ang. *self-concordant*). Za takšen tip funkcij se lahko uporabi orodje, ki ga je razvil Nesterov [15]. Do leta 2012 je bil Newton-Nesterov algoritem najboljši za reševanje visoko-dimenzionalnih portfeljev s pariteto tveganj.

Konec leta 2013 so Griveau-Billion, Richard in Roncalli [12] predstavili še en konkurenčen algoritem, saj so opazili, da je problem (6.11) zelo standarden. Ker gre za minimizacijo kvadratne funkcije z logaritmično omejitvijo, se lahko problem reši z metodo cikličnega koordinatnega spusta (ang. *cyclical coordinate descent algorithm*). Izkazalo se je, da je ta metoda zelo preprosta za implementacijo in zelo učinkovita za reševanje visoko-dimenzionalnih portfeljev s pariteto tveganj ($n > 250$).

V nadaljevanju bomo predstavili zadnja dva omenjena algoritma, ki sta se izkazala za najučinkovitejša v primeru portfelja s pariteto tveganj. Oba bomo izpeljali na osnovi portfelja z razporejenim tveganjem, katerega matematična definicija je naslednja

$$x^* = \{x \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \cdot (\Sigma x)_i = b_i \cdot (x^T \Sigma x)\},$$

kjer je $b \in [0,1]^n$ in $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$.

Optimizacijski program (6.11) se spremeni v

$$y^* = \arg\min \sqrt{y^T \Sigma y}, \tag{7.1}$$

$$p.p. \begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i \ln y_i \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Algoritem izpeljan na osnovi portfelja z razporejenim tveganjem bomo nato uporabili za portfelj s pariteto tveganj. To bomo storili tako, da bomo za vsako sredstvo i, njegov znesek tveganja b_i postavili na vrednost $\frac{1}{n}$, kjer je n število sredstev v portfelju.

7.1. Newton-Nesterov algoritem

Prvi učinkovit algoritem za izračun uteži portfelja s pariteto tveganj je Newtonov algoritem, ki je nadgrajen z Nesterovimi izsledki. V dimenziji 1000 podatkov tipično konvergira že po manj kot šestih iteracijah. Celotni razdelek je povzet po [18].

Definirajmo $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n)^T, x_i > 0\}$. Označimo z $x^{-1} = (1/x_1, ..., 1/x_n)^T$ in $xy = (x_1y_1, ..., x_ny_n)^T$. Z uvedbo nove spremenljivke $\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}$ lahko enačbo

$$x_i \cdot (\Sigma x)_i = b_i \cdot (x^T \Sigma x), \tag{7.2}$$

ekvivalentno preoblikujemo v obliko

$$\Sigma \tilde{x} = b \tilde{x}^{-1}. \tag{7.3}$$

Trditev 7.1. *Če je Σ nesingularna, pozitivno definitna matrika, ima enačba (7.3) enolično rešitev $x^* \in \mathbb{R}^n_+$.*

Dokaz. Začeli bomo s Lagrangevo funkcijo za optimizacijski problem (7.1), s tem da bomo minimizacijo volatilnosti nadomestili z minimizacijo variance, saj je slednja bolj prijazna za reševanje. Ta sprememba ne povzroči razlik v rezultatu, saj obe meri tveganja podajata isto informacijo. Velja namreč, da je portfelj A je bolj tvegan od portfelja B v smislu variance σ^2, če in samo če je bolj tveganj tudi v smislu standardnega odklona oziroma volatilnosti σ.
Podobno Lagrangevo funkcijo smo že videli v razdelku 6.2.3, zato jo bomo na tem mestu brez škode za splošnost nekoliko preoblikovali

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x - \sum_{i=1}^n b_i \ln(x_i). \tag{7.4}$$

Gradient in Hessejeva matrika funkcije F sta dana z

$$F'(x) = \Sigma x - bx^{-1}, \quad F''(x) = \Sigma + diag(bx^{-1}), \tag{7.5}$$

kjer je diag(d) diagonalna matrika z d na diagonali. Rešitve enačbe (7.3) so kritične točke funkcije F. Ker je funkcija F strogo konveksna na $\mathbb{R}^n$ ($F''(x)$ je pozitivno definitna), ima največ eno kritično točko. To dokazuje enoličnostni del trditve 7.1. Če želimo dokazati, da ima funkcija F vsaj eno kritično točko, je dovolj dokazati, da ima funkcija F globalni minimum $x^* \in \mathbb{R}^n_+$. To je posledica naslednje leme.

Lema 7.2. *Funkcija $F(x) \to \infty$, ko se x približuje robu $\mathbb{R}^n_+$: $\lim_{x \to \partial \mathbb{R}^n_+} F(x) = \infty$.*

Dokaz. Naj bo λ_1 najnižja lastna vrednost kovariančne matrike Σ. Predpostavimo, da je $\lambda_1 > 0$. Torej velja

$$x^T \Sigma x \geq \lambda_1 \sum_i x_i^2.$$

Zato lahko Lagrangevo funkcijo omejimo z

$$F(x) \geq \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2}\lambda_1 x_i^2 - b_i \log(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \tag{7.6}$$

kjer je $g_i(t) = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 - b_i \log(t)$. Funkcija g_i je konveksna za $t > 0$, ima globalni minimum v $t_i^* = \sqrt{b_i/\lambda_1}$ in zadošča lastnosti

$$\lim_{t\to+\infty} g_i(t) = \lim_{t\to 0+} g_i(t) = +\infty. \tag{7.7}$$

Torej je funkcija $F(x) \geq g_i(x_i) + \sum_{k\neq i} g_k(t_k^*)$ za vsak i. Zato velja

$$F(x) \geq g_i(x_i) + \mu,$$

pri čemer je $\mu = \min_i \sum_{k\neq i} g_k(t_k^*)$. Naj bo $B > 0$ neka poljubna meja. Glede na enačbo (7.7) potem obstajata $0 < \alpha < \beta$ (odvisni od B), takšni da za vsak $t \notin [\alpha, \beta]$ velja

$$g_i(t) > B - \mu.$$

Torej za vsak $x \notin \Pi_{i=1}^n [\alpha, \beta]$ velja $F(x) > B$. □

S pomočjo leme 7.2 smo prišli do ugotovitve, da ima funkcija F globalni minimum $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ in s tem je trditev 7.1 dokazana. □

Opomba 7.3. Enačba (7.3) (privzemimo $x = \tilde{x}$) ima enolično rešitev znotraj območja $sign(x_i) = e_i$, pri čemer je $e_i = \pm 1$ izbira predznaka za vsako komponento i. Torej ima enačba (7.3) natančno 2^n možnih rešitev v prostoru $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq 0, \forall i\}$.

Posledica 7.4. *Enačba (7.2) ima enolično rešitev na* $\mathbb{R}_+^n$*, in sicer* $x^*/(\sum_i x_i^*)$.

Dokaz. Če ima enačba (7.3) enolično rešitev, potem jo ima tudi enačba (7.2), saj sta ekvivalentni enačbi. Če x^* zadošča enačbi (7.3), potem $\frac{x^*}{\sum_i x_i^*}$ zadošča enačbi (7.2), saj je potrebno rešitev enačbe (7.3) le normirati, da izpolnjuje pogoj $\sum x_i = 1$. Obratno, če x zadošča enačbi (7.2), potem $\lambda^{-1}x$ zadošča enačbi (7.3), kjer je $\lambda = (x^T \Sigma x)^{1/2}$. To pomeni, da je $\lambda^{-1}x = x^*$ enolična rešitev enačbe (7.3). Poleg tega omejitev $\sum_i x_i = 1$ implicira, da je $\lambda = \frac{1}{\sum_i x_i^*}$, kar določa x enolično. □

Naj bo S_+^n nabor pozitivno definitnih matrik velikosti $n \times n$. Naj bo D diagonala kovariančne matrike Σ in $R = D^{-1/2}\Sigma D^{-1/2}$ z njo povezana korelacijska matrika. R je pozitivno definitna matrika z enicami na diagonali. Če je x^* rešitev (7.3), potem je $y^* = D^{1/2}x^*$ enolična rešitev enačbe

$$Ry = by^{-1}, \ y \in \mathbb{R}_+^n. \tag{7.8}$$

Od zdaj naprej predpostavimo, da je Σ korelacijska matrika

$$\Sigma \in S_+^n, \ \Sigma_{ii} = 1, \ 1 \leq i \leq n, \tag{7.9}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zaradi Cauchy-Schwartzove neenakosti, za vsak i, j velja $|\Sigma_{ij}| \leq 1$.

Opazimo: če x^* zadošča enačbi (7.3), potem $t^{1/2}x^*$ zadošča isti enačbi, s tem da vektor b nadomestimo z vektorjem tb. Torej lahko spremenimo velikost vektorja b, tako da velja

$$\min_{1\leq i\leq n} b_i = 1. \tag{7.10}$$

To lastnost bomo izkoristili v nadaljevanju.

Ugotovili smo že, da je rešitev enačbe (7.3) globalni minimum funkcije F, definirane z enačbo (7.4). To nam dovoljuje, da prevedemo enačbo (7.3) na konveksni optimizacijski problem

$$x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n_+} F(x). \tag{7.11}$$

Z dano začetno točko $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ je zaporedje, generirano z Newtonovim algoritmom, definirano kot:

$$x_{k+1} = x_k - \Delta x_k,\ k \geq 0, \tag{7.12}$$

kjer je iteracijski korak dan z

$$\Delta x_k = [F''(x_k)]^{-1}F'(x_k). \tag{7.13}$$

Če je x_0 dovolj blizu x^*, zaporedje konvergira k x^*. Težava nastane, ko takšen x_0 ni na voljo. S to dilemo se spopada Nesterova teorija o sebi-konkordantnih funkcijah, katero bomo v nadaljevanju predstavili le toliko, kolikor je to potrebno za razumevanje algoritma. Več informacij o tem tipu funkcij lahko preberemo v [15].

7.1.1. Sebi-konkordantne funkcije

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ poljubna odprta množica. Za konveksno funkcijo $f \in C^3(\Omega)$ definiramo normo

$$\| u \|_x = \langle f''(x)u, u\rangle^{1/2}.$$

Norma $\| u \|_x$ se imenuje lokalna norma točke u glede na x.

Definicija 7.5. Konveksna funkcija $f \in C^3(\Omega)$ je sebi-konkordantna, če je trilinerana oblika $f'''(x)$ omejena v normi $\| \cdot \|_x$ na način

$$|f'''(x)[u, u, u]| \leq 2 \| u \|_x^3,\ \forall x \in \Omega, u \in \mathbb{R}^n. \tag{7.14}$$

Nabor sebi-konkordantnih funkcij je zaprt za aditivnost in množenje s skalarjem večjim od ena. Vsebuje vse linearne in kvadratne funkcije ter tudi funkcijo $-\log(x_i)$. Ob predpostavkah (7.9) in (7.10) je funkcija $F(x)$ sebi-konkordantna.

Označimo:

$$\| v \|_x^* = \langle [F''(x)]^{-1}v, v\rangle^{1/2},$$

$$\lambda_F(x) = \| F'(x) \|_x^* .$$

Lokalna norma gradienta $F'(x)$ je potem enaka

$$\lambda_F(x) = \langle [F''(x)]^{-1}F'(x), F'(x)\rangle^{1/2}. \tag{7.15}$$

Vrednost λ_F včasih poimenujemo Newtonov dekrament funkcije F v x.

Trditev 7.6. *Naj bo $\lambda_F(x) > 1$ za nekatere x iz definicijskega območja funkcije F. Potem x^*, rešitev problema (7.11), obstaja in je enolična.*

Dokaz. Dokaz presega vsebino magistrskega dela, zato ga bomo izpustili. Najdemo ga v [15], stran 170. $\square$

Nesterova modifikacija Newtonovega algoritma je sestavljena iz dveh korakov:

(1) najprej dušena iteracija (ang. *damped iteration*) nadomesti iteracijo (7.12) in s tem zagotovi, da je dosežena dovolj majhna okolica x^* in da hkrati ostanemo v definicijskem območju funkcije F,
(2) ko je pogoj v točki (1) izpolnjen, se uporabi iteracija (7.12).

Shema dušene Newtonove metode ima obliko:

(1) izberemo x_0, ki je znotraj definicijskega območja funkcije F,
(2) za vsak $k \geq 0$, je ustrezna iteracija $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{1+\lambda_F(x_k)}\Delta x_k$.

Ključna ocena, ki ureja fazo dušene iteracije, je podana v naslednji trditvi.

Trditev 7.7. *Za vsak $k \geq 0$ velja*

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k) - \omega(\lambda_F(x_k)),$$

kjer je $\omega(t) = t - \ln(1+t)$.

Dokaz. Označimo $\lambda = \lambda_F(x_k)$. Definirajmo $\omega_*(t) = -t - \ln(1-t)$. Če je x_k znotraj definicijskega območja funkcije F in je $\| x_{k+1} - x_k \|_{x_k} < 1$, potem lahko uporabimo trditev 4.1.8 iz [15][19] in dobimo

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k) + \langle F'(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle + \omega_*(\| x_{k+1} - x_k \|_{x_k}).$$

Poračunajmo izraza $\langle F'(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle$ in $\| x_{k+1} - x_k \|_{x_k}$ ter ob tem preverimo, ali držijo predpostavke trditve 4.1.8.
Drugi korak dušene Newtonove iteracije vsebuje zvezo $x_{k+1} - x_k = -\frac{1}{1+\lambda}\Delta x_k$. Uporabimo to zvezo v nadaljnjem računanju.

$$\langle F'(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle = \langle F'(x_k), -\frac{1}{1+\lambda}\Delta x_k\rangle = -\frac{1}{1+\lambda}\langle F'(x_k), \Delta x_k\rangle =$$
$$= -\frac{1}{1+\lambda}\langle F'(x_k), [F''(x_k)]^{-1}F'(x_k)\rangle$$

Ker smo v vektorskem prostoru z običajnim skalarnim produktom, zanj velja simetrija. Zato lahko člena v skalarnem produktu zamenjamo in pridemo do izraza λ^2. Torej velja

$$\langle F'(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle = -\frac{\lambda^2}{1+\lambda}.$$

Podobno poračunamo drugi iskani izraz.

$$\| x_{k+1} - x_k \|_{x_k} = \| -\frac{1}{1+\lambda}\Delta x_k \|_{x_k} = \frac{1}{1+\lambda} \| \Delta x_k \|_{x_k} =$$

[19]Trditev 4.1.8 iz [15], str. 168: Naj bo x v definicijskem območju funkcije f in $\| y - x \|_x < 1$. Potem velja

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x\rangle \leq \frac{\| y - x \|_x^2}{1 - \| y - x \|_x},$$
$$f(y) \leq f(x) - \langle f'(x), y - x\rangle + \omega_*(\| y - x \|_x).$$

$$= \frac{1}{1+\lambda} \parallel [F''(x_k)]^{-1}F'(x_k) \parallel_{x_k} =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda}\langle F''(x_k)[F''(x_k)]^{-1}F'(x_k), [F''(x_k)]^{-1}F'(x_k)\rangle^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda}\langle [F''(x_k)]^{-1}F'(x_k), F'(x_k)\rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{1+\lambda} = \omega'(\lambda)$$

Ker je x_k znotraj definicijskega območja funkcije F in je $\parallel x_{k+1} - x_k \parallel_{x_k} < 1$, trditev 4.1.8 drži. Uporabimo izračunane komponente in dobimo rezultat

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k) + \langle F'(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle + \omega_*(\parallel x_{k+1} - x_k \parallel_{x_k}) =$$

$$= F(x_k) - \frac{\lambda^2}{1+\lambda} + \omega_*(\omega'(\lambda)) =$$

$$= F(x_k) - \lambda\omega'(\lambda) + \omega_*(\omega'(\lambda)) = F(x_k) - \omega(\lambda).$$

V zadnjem koraku smo uporabili Lemo 4.1.4. iz [15], str. 169, ki pravi, da za vsak $t \geq 0$ velja $\omega(t) = t\omega'(t) - \omega_*(\omega'(t))$. □

Zato lahko za vse x znotraj definicijskega območja funkcije F, za katere velja, da je $\lambda_F(x) \geq \beta > 0$, z uporabo enega koraka dušene Newtonove metode, zmanjšamo vrednost $F(x)$ najmanj za konstantno $\omega(\beta) > 0$. Opomnimo, da je rezultat trditve 7.7 globalen. Zato ga je mogoče uporabiti za pridobitev ocene globalne učinkovitosti procesa.

Za oceno lokalne konvergence standardne Newtonove metode v smislu lokalne norme gradienta $\lambda_F(x)$ velja

$$\lambda_F(x_{k+1}) \leq \Big(\frac{\lambda_F(x_k)}{1-\lambda_F(x_k)}\Big)^2.$$

Ta ocena nam zagotavlja naslednji opis območja kvadratične konvergence

$$\lambda_F(x) < \bar{\lambda},$$

kjer je $\bar{\lambda} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ki jo dobimo kot ničlo enačbe $\frac{\lambda}{1-\lambda} = 1$. V tem primeru lahko garantiramo, da je

$$\lambda_F(x_{k+1}) < \lambda_F(x_k).$$

Naj bo $\lambda_* = 0,95 \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (λ_* je poljubno pozitivno število manjše od $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$). Dušena iteracija traja tako dolgo, dokler je $\lambda_F(x_k) > \lambda_*$. Po trditvi 7.7 vrednost ciljne funkcije pada s hitrostjo najmanj $\omega(\lambda_*)$ na iteracijo. Dušena faza se konča po največ

$$N_{DP} = \frac{F(x_0) - F(x^*)}{\omega(\lambda_*)}$$

iteracijah. Spinu [18] je ta generični recept še izboljšal, tako da je izkoristil eksplicitno obliko funkcije F.

Trditev 7.8. *Za $x \in \mathbb{R}^n_+$ naj bo $\delta = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|(\Delta x)_i|}{x_i}$ in $h_* = \frac{1}{1+\delta}$. Potem velja*

$$F(x + h_*\Delta x) \leq F(x) - (\lambda_F^2(x)/\delta^2)\omega(\delta).$$

Dokaz. Glej [18], stran 5. □

Posledično lahko iteracijski korak v dušeni iteraciji nadomestimo z

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{1+\delta_k}\Delta x_k, \tag{7.16}$$

pri čemer je

$$\delta_k = \| \frac{\Delta x_k}{x_k} \|_\infty .$$

Ta iteracijski korak je večji od originalnega iteracijskega koraka dušene metode, če je $\delta_k < \lambda_k$, medtem ko je zmanjševanje ciljne funkcije najmanj tako dobro kot v trditvi 7.7. Ker je funkcija $\frac{\omega(x)}{x^2}$ padajoča na intervalu $(0, \infty)$ velja

$$\frac{\lambda_k^2}{\delta_k^2}\omega(\delta_k) \geq \omega(\lambda_k).$$

Učinek spremenjenega iteracijskega koraka je viden v občutnem zmanjšanju števila dušenih iteracij.
Če strnemo vso zapisano teorijo, je Newton-Nesterov algoritem sestavljen iz dveh faz:

(1) *Dušena faza.*
Dokler je $\lambda_F(x_k) > \lambda_*$, uporabljamo iteracijo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{1+\delta_k}\Delta x_k.$$

(2) *Kvadratična faza.*
Ko je $\lambda_F(x_k) \leq \lambda_*$, uporabljamo iteracijo

$$x_{k+1} = x_k - \Delta x_k.$$

Ker je algoritem izpeljan na osnovi korelacijske matrike Σ, moramo na koncu rešitev utežiti z volatilnostmi

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{\sigma_i^{-1} x_i^*}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} x_j^*}.$$

7.1.2. Koda Newton-Nesterovega algoritma

Newton-Nesterov algoritem bomo sprogramirali v programskem jeziku Matlab, pri tem pa bomo uporabili naslednje oznake:

- `K` je korelacijska matrika za izbrani portfelj,
- `v` je vrstični vektor volatilnosti posameznih sredstev v portfelju,
- `S` je ustrezna variančno-kovariančna matrika za izbrani portfelj,
- `b` je stolpični vektor zneskov tveganja,
- `c` je stolpični vektor normaliziranih prispevkov tveganja, to je $c_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sigma(x)}$, in je za portfelj s pariteto tveganj enak vektorju zneskov tveganja,
- `x0` je stolpični vektor začetnih uteži in je enak $\frac{\sqrt{\sum_i b_i}}{\sqrt{\mathbb{1}^T K \mathbb{1}}} \cdot \mathbb{1}$,
- `lambda` ima vrednost $0,95 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Za zaustavitveni pogoj bomo uporabili omejitev

$$\max(|c - b|) \leq 10^{-8}.$$

Newtonov iteracijski korak ne bomo računali preko sistema z inverzom, temveč bomo uporabili razcep Cholesky. Končne uteži za izbrani portfelj se bodo shranjevale v vektor `x_zvezda`, ki je že utežen z volatilnostmi.

```
while max(abs(c - b)) > 0.00000001;
    u0 = K * x0 - b .* (1 ./ x0);
    H0 = K + diag(b .* (1 ./ (x0 .^ 2)));
    V = chol(H0); %Razcep Cholesky
    Y = (V') \ u0;
    delta_x0 = V \ Y;
    sigma0 = norm(delta_x0 ./ x0, inf);
    lambda0 = sqrt(u0' * delta_x0);
    if lambda0 > lambda;
        x1 = x0 - (1 / (1 + sigma0)) * delta_x0;
    elseif lambda0 > 0.00000001;
        x1 = x0 - delta_x0;
    end
    x0 = x1;
    x_zvezda = ((1 ./ v') .* x0) / sum((1 ./ v') .* x0);
    RC = ((S * x_zvezda) / sqrt(x_zvezda' * S * x_zvezda)) .* x_zvezda;
    c = RC / sum(RC);
end
```

7.2. Algoritem cikličnega koordinatnega spusta

Glavna ideja algoritma cikličnega koordinatnega spusta je minimizacija funkcije $f(x_1, ..., x_n)$ na način, ki minimizira le eno smer na enem koraku. Algoritem cikličnega koordinatnega spusta se od klasičnega algoritma spusta razlikuje v tem, da slednji obravnava vse smeri na enkrat. Pri algoritmu cikličnega koordinatnega spusta iščemo vrednost x_i, ki minimizira ciljno funkcijo ob predpostavki, da so vrednosti x_j za $j \neq i$ fiksne. Postopek se ponovi za vsako smer, dokler ni dosežen globalni minimum. Ta metoda uporablja enaka načela kot Gauss-Seidelov ali Jacobijev algoritem za reševanje linearnih sistemov ([12], str. 2).

Algoritem cikličnega koordinatnega spusta ima nekaj lastnosti, ki ga naredijo zelo privlačnega za uporabo ([12], str. 3):

(1) je zelo preprost za razumevanje in implementacijo,
(2) je učinkovit za reševanje problemov velikega obsega,
(3) ne potrebuje nastavitve glede spuščanja po korakih, kar je v nasprotju z metodami, ki temeljijo na gradientu (metode najhitrejšega spusta).

Konvergenca metode cikličnega koordinatnega spusta zahteva, da je funkcija $f(x)$ strogo konveksna in odvedljiva. Tseng [19] je razširil konvergenčne lastnosti na neodvedljivi razred funkcij oblike

$$f(x_1, ..., x_n) = f_0(x_1, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} f_k(x_1, ..., x_n),$$

pri čemer je funkcija f_0 strogo konveksna in odvedljiva, medtem ko funkcije f_k niso nujno odvedljive. Konvergenco takšnega razreda funkcij zagotavlja naslednji izrek.

Trditev 7.9. *Naj funkcije $f, f_0, f_1, ..., f_n$ izpolnjujejo predpostavke:*

(1) *funkcija f_0 je zvezna na svojem definicijskem območju,*
(2) *za vsak $k \in \{1, ..., n\}$ in $(x_j)_{j \neq k}$ je funkcija $x_k \mapsto f(x_1, ..., x_n)$ kvazikonveksna*[20] *in hemivariatna*[21]*,*
(3) *funkcije $f_0, f_1, ..., f_n$ so navzdol polzvezne (ang. lower semicontinuous)*[22]

in naj funkcija f_0 zadošča eni od naslednjih dveh predpostavk:

(1) *definicijsko območje funkcije f_0 je odprta množica in funkcija f_0 gre proti ∞ v vsaki robni točki definicijskega območja funkcije f_0,*
(2) *definicijsko območje funkcije $f_0 = Y_1 \times ... \times Y_n$, za nekatere $Y_k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, ..., n$.*

Naj bo prostor $\{x : f(x) \leq f(x^0)\}$ omejen. Potem je zaporedje $\{x^k\}$, ki ga generira metoda cikličnega koordinatnega spusta, dobro definirano, omejeno in je vsako stekališče tega zaporedja minimum funkcije f po koordinatah.

Dokaz. Komentar glede dokaza najdemo v [19], stran 488. □

Tako kot v primeru Newton-Nesterovega algoritma, tudi algoritem cikličnega koordinatnega spusta izpeljemo s pomočjo Lagrangeove funkcije optimizacijskega problema (7.1)

$$L(x; \lambda) = \sqrt{x^T \Sigma x} - \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i \ln x_i. \tag{7.17}$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $\lambda = 1$. Iz pogoja prvega reda dobimo

$$\frac{\partial L(x; \lambda)}{\partial x_i} = \frac{(\Sigma x)_i}{\sigma(x)} - \frac{b_i}{x_i}.$$

Zgornji odvod enačimo z nič in dobimo

$$x_i (\Sigma x)_i - b_i \sigma(x) = 0$$

oziroma

$$x_i^2 \sigma_i^2 + x_i \sigma_i \sum_{j \neq i} x_j \rho_{i,j} \sigma_j - b_i \sigma(x) = 0.$$

Po definiciji portfeljev z razporejenim tveganjem (in tudi portfeljev s pariteto tveganj) mora za vse uteži sredstev v portfelju veljati $x_i \geq 0$. Zgornja polinomska funkcija je konveksna, saj velja $\sigma_i^2 > 0$. Zato dobimo dve rešitvi, vendar izberemo le tisto, ki je nenegativna

$$x_i^* = \frac{-\sigma_i \sum_{j \neq i} x_j \rho_{i,j} \sigma_j + \sqrt{\sigma_i^2 (\sum_{j \neq i} x_j \rho_{i,j} \sigma_j)^2 + 4 b_i \sigma_i^2 \sigma(x)}}{2 \sigma_i^2}. \tag{7.18}$$

---

[20] Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je kvazikonveksna, če za vsak x iz definicijskega območja funkcije f in za vsak $d \in \mathbb{R}^n$ velja

$$f(x + \lambda d) \leq \max\{f(x), f(x + d)\},$$

pri čemer je $\lambda \in [0, 1]$ ([19], str. 477).

[21] Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je hemivariatna, če f ni konstantna na nobeni daljici, ki pripada definicijskemu območju funkcije f ([19], str. 477).

[22] Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je navzdol polzvezna na svojem definicijskem območju, če za vsak x iz definicijskega območja funkcije f velja $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ ([16], str. 16).

Če so vrednosti $(x_1, ..., x_n)$ strogo pozitivne, sledi da je x_i^* strogo pozitiven. Pozitivnost rešitve je zato dosežena po vsaki iteraciji, v kolikor so začetne vrednosti pozitivne.

Opomba 7.10. Opazimo, da algoritem ni dobro definiran, če so določeni zneski tveganja b_i enaki nič. To še dodatno podkrepi našo odločitev o specifikaciji problema, ki zahteva strogo pozitivne vrednosti b_i.

Algoritem ponavlja iteracije enačbe (7.18) dokler ne skonvergira do končne rešitve. Konvergenca algoritma cikličnega koordinatnega spusta obstaja, saj enačba (7.17) izpolnjuje vse tehnične predpostavke iz trditve 7.9.

Učinkovitost algoritma lahko izboljšamo, saj lahko nekatere količine zelo enostavno nadgrajujemo. Če preoblikujemo enačbo (7.18) v obliko

$$x_i^* = \frac{-(\Sigma x)_i + x_i\sigma_i^2 + \sqrt{((\Sigma x)_i - x_i\sigma_i^2)^2 + 4\sigma_i^2 b_i \sigma(x)}}{2\sigma_i^2},$$

iz nje razberemo, da je potrebno količini Σx in $\sigma(x)$ izračunati na vsaki iteraciji algoritma.
Označimo z $x = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ vektor uteži pred nadgraditvijo i-te uteži in z $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, ..., x_n)$ vektor uteži po nadgraditvi i-te uteži x_i. Uporabimo nekaj osnovnega znanja iz algebre in pridemo do enačb

$$\Sigma\tilde{x} = \Sigma x - \Sigma_{.,i} x_i + \Sigma_{.,i}\tilde{x}_i$$

in

$$\sigma(\tilde{x}) = \sqrt{\sigma^2(x) - 2x_i\Sigma_{i,.}x + x_i^2\sigma_i^2 + 2\tilde{x}_i\Sigma_{i,.}\tilde{x} - \tilde{x}_i^2\sigma_i^2},$$

pri čemer sta $\Sigma_{i,.}$ in $\Sigma_{.,i}$ i-ta vrstica in i-it stolpec kovariančne matrike Σ. Nadgradnja Σx in $\sigma(x)$ postane enostavna, časovno zahtevnost algoritma pa se s pomočjo teh operacij močno zmanjša ([12], str. 4).

7.2.1. Koda algoritma cikličnega koordinatnega spusta

Tako kot Newton-Nesterov algoritem bomo tudi algoritem cikličnega koordinatnega spusta sprogramirali v programskem jeziku Matlab. Da bi bila algoritma kar najbolj možno podobna, bomo uporabili iste oznake in isti zaustavitveni pogoj kot v primeru Newton-Nesterovega algoritma. Končne uteži za izbrani portfelj bodo shranjene v vektorju `x_zvezda`.

```
while max(abs(c - b)) > 0.00000001;
    R = S * x0;
    s = x0' * S * x0;
    for i = 1 : length(x0);
        A = 2 * (v(i)^2);
        B = - R(i) + (x0(i) * (v(i)^2));
        D = (R(i) - x0(i) * (v(i)^2))^2 + 4 * (v(i)^2) * b(i) * sqrt(s);
        x_zvezda(i) = (B + sqrt(D)) / A;
        R = R - S(:,i) * x0(i) + S(:,i) * x_zvezda(i);
        s = s - 2 * x0(i) * S(i,:) * x0  + (x0(i)^2) * (v(i)^2) + 2 *
            * x_zvezda(i) * S(i,:) * x_zvezda - (x_zvezda(i)^2) * (v(i)^2);
        x0 = x_zvezda;
    end
```

```
    x_z = x0 / sum(x0);
    RC = ((S * x_z) / sqrt(x_z' * S * x_z)) .* x_z;
    c = RC / sum(RC);
end
x_zvezda = x_z
```

7.3. Učinkovitost numeričnih algoritmov

Avtorji članka [12] so primerjali učinkovitost petih algoritmov, ki se uporabljajo za izračun uteži portfeljev s pariteto tveganj. Primerjali so algoritem zaporednega kvadratičnega programiranja, Jacobijev algoritem, Newtonov algoritem, Nesterov algoritem in algoritem cikličnega koordinatnega spusta.

Med drugim so ugotovili, da je Newton-Nesterov algoritem hitrejši, ko je število sredstev v portfelju manjše ($n < 250$), medtem ko je algoritem cikličnega koordinatnega spusta hitrejši, ko je število sredstev v portfelju večje ($n > 250$). Poleg tega so opazili, da so numerični rezultati glede hitrosti občutljivi na programski jezik in sestavo algoritma, ki se uporablja za izračun Newtonovega koraka. Slednjega je bolje računati preko linearnega sistema z uporabo razcepa Cholesky kot na vsakem koraku izračunavati inverz simetrične pozitivno definitne matrike. Poleg tega je čas, potreben za izračun algoritma cikličnega koordinatnega spusta, odvisen od učinkovitosti programskega jezika v smislu zank. Zato je Newtonov-Nesterov algoritem hitrejši od algoritma cikličnega koordinatnega spusta v programskih jezikih kot sta Matlab in R, saj so ti algoritmi revni v implementacijah zank. Nasprotno velja za algoritem cikličnega koordinatnega spusta, ki je hitrejši od Newton-Nesterovega algoritma v naivnih programskih jezikih, kot so C, Fortran in Gauss.

Ti rezultati so nam dali idejo, da primerjamo uspešnost naših dveh algoritmov. Nobeden od njiju ne potrebuje dodatnih popravkov, saj sta oba spisana v programskem jeziku Matlab in imata isti zaustavitveni pogoj. Prav tako bosta oba algoritma začela iteracije na istem vektorju uteži. Manjkata le še dva nabora podatkov, ki sta različnih velikosti.

Hitrost izračuna uteži za portfelj s pariteto tveganj bomo preverili na indeksih S&P 500 in Eurostoxx 50. S&P 500 indeks je sestavljen iz petsto delnic in pokriva približno 80% celotne kapitalizacije ameriškega trga. Obtežen je na podlagi tržne kapitalizacije, zato ga praviloma sestavljajo delnice družb s srednjo in visoko kapitalizacijo. Družbe, ki so vključene v indeks, so izbrane s strani analitikov in ekonomistov družbe Standard & Poor's. V našo analizo bomo vključili vse delnice, ki so sestavljale ta indeks na dan 31.3.2016. Drugi indeks je Eurostoxx 50, ki je vodilni evropski blue-chip indeks za evroobmočje. Omogoča blue-chip predstavitev vodilnih super sektorjev v evroobmočju. Indeks pokriva 50 delnic iz 12 držav evroobmočja. Tako kot za indeks S&P 500, bomo tudi za indeks Eurostoxx 50 uporabili delnice, ki so ga sestavljale na dan 31.3.2016.

S pomočjo programskega jezika R lahko s spletne strani Yahoo! Finance uvozimo podatke o vseh izbranih delnicah. V našem izračunu bomo upoštevali cene delnic od datuma njihove izdaje do 23.4.2016, dneva, ko smo izvedli analizo. S tem bomo dobili dva nabora podatkov zelo različnih velikosti. Korelacijska matrika za indeks S&P 500 ima dimenzijo 504×504, za indeks Eurostoxx 50 pa 50×50. Oba algoritma bomo uporabili na obeh naborih podatkov in poračunali povprečni čas delovanja vsakega od njiju. Povprečni čas bomo poračunali na podlagi 10000 ponovitev vsakega od algoritmov. Rezultati (v sekundah) so prikazani v naslednji tabeli.

	S&P 500	Eurostoxx 50
Newton-Nesterov algoritem	0,5085	0,0028
Algoritem cikličnega koordinatnega spusta	0,3548	0,0246

TABELA 2. Primerjava hitrosti

Iz tabele 2 razberemo, da naša algoritma ustrezata ugotovitvam iz članka [12]. Newton-Nesterov algoritem hitreje poračuna portfelj, ki ga sestavljajo delnice indeksa Eurostoxx 50, algoritem cikličnega koordinatnega spusta pa hitreje poračuna portfelj, ki ga sestavljajo delnice indeksa S&P 500. Ker sta algoritma različno hitra glede na velikost nabora podatkov, ju lahko združimo in dobimo učinkovit algoritem za vsak nabor podatkov. Algoritma preprosto združimo z if zanko, ki preklopi pri ugotovljeni meji 250. Mejo lahko določimo še bolj natančno, vendar ideja glede združitve ostane nespremenjena.

8. Ostale hevristične metode

Določevanje uteži na podlagi paritete tveganj ni edini robusten način za alokacijo sredstev v portfelju. Najbolj poznane tehnike, ki nadzorujejo tveganje v kontekstu alokacije sredstev, so poleg že omenjene paritete tveganj, ki je primer tehnike za doseganje želene volatilnosti, tudi enako uteževanje, minimalna varianca, maksimalna diverzifikacija ter uteževanje z volatilnostjo, kar pogosto imenujemo tudi naivna pariteta tveganj. Portfelj s pariteto tveganj je na poseben način povezan s portfeljem z enakimi utežmi in portfeljem z najnižjim tveganjem. Preden predstavimo povezavo med omenjenimi tremi portfelji, bolj natančno spoznajmo oba portfelja.

8.1. Portfelj z enakimi utežmi

Eden najbolj naivnih hevrističnih portfeljev je portfelj z enakimi utežmi ali »1/n« portfelj. Ta naivna strategija določanja uteži vsakemu od n sredstev v portfelju pripiše utež $\frac{1}{n}$. Strategija »1/n« ne uporablja nobene optimizacije ali ocene in popolnoma ignorira podatke. Vlagateljem ni potrebno oblikovati predpostavk o porazdelitvi donosov izbranih razredov sredstev. Portfelj z enakimi utežmi ne ustvari skoncentriranih portfeljev v smislu alokacije kapitala, poleg tega je povprečje-varianca optimalen, če imajo vsi razredi sredstev enak pričakovani donos in kovariance ([4], str. 110). Njegova slaba stran je pogosta revna diverzifikacija tveganja, katera je še posebej izrazita, ko se tveganja med sredstvi močno razlikujejo.

Zakaj se ukvarjati s tako preprosto strategijo določevanja portfeljskih uteži, ko na trgu obstajajo veliko bolj dodelani optimizacijski modeli, med katerimi glavni steber predstavlja povprečje-varianca optimizacijski model? Očitna prednost »1/n« pravila pred optimizacijskimi modeli je njegova preprosta uporaba na velikem številu sredstev. Preprostost je dobrodošla lastnost strategije, a vendar je njena učinkovitost ključnega pomena. Zato je smiselno primerjati učinkovitost »1/n« strategije z učinkovitostjo optimalnih strategij.

Avtorji članka [7] so empirično pokazali, da strategija enakega uteževanje sredstev ustvari višje donose portfelja, kadar se uporablja za izgradnjo portfeljev iz lastniških razredov sredstev. Primerjali so izven vzorčno uspešnost naivno diverzificiranega portfelja z uspešnostjo štirinajstih različnih modelov za optimalno alokacijo sredstev, to je klasičnega povprečje-varianca portfelja in njegove številne razširitve, ki so bile oblikovane za zmanjšanje učnika napake pri ocenjevanju. Uporabili so sedem različnih empiričnih podatkovnih bazah z mesečnimi donosi in tri merila uspešnosti. Ugotovili so, da noben od štirinajstih modelov ni konsistentno boljši od »1/n« strategije v nobeni od treh mer uspešnosti.

Vzrok za revno uspešnost optimizacijskih modelov glede na portfelj z enakimi utežmi so napake, do katerih pride pri ocenjevanju pričakovanih donosov in kovariančne matrike. Te spodkopljejo vse dobičke, ki jih lahko ustvari optimalna diverzifikacija v primerjavi z naivno diverzifikacijo. Portfeljske uteži, temelječe na vzorčnih ocenah teh momentov, so posledično ekstremno pozitivne ali negativne, kar je daleč od optimalnega. Glede na ugotovitev, da ob vseh različnih optimizacijskih modelih v literaturi, ni nobenega, ki bi imel konsistentno višji Sharpe kazalnik od tistega za »1/n« portfelj, lahko zaključimo, da se »alokacijske napake« povzročene z uporabo $\frac{1}{n}$ uteži lahko izkažejo za manj uničujoče od napak, ki jih povzročijo uteži iz optimizacijskih modelov ([7], str. 1920).

Analitično lahko izpeljemo dolžino potrebnih ocenjevalnih period, ki jih povprečje-varianca strategija potrebuje, da lahko od nje pričakujemo dosego višjih ali vsaj ekvivalentnih donosov kot so tisti, ki jih ustvari strategija »1/n«. Za parametre kalibrirane na podatkih ameriškega delniškega trga so ugotovili, da za portfelj s samo 25 sredstvi potrebujemo več kot 3000 mesecev dolgo ocenjevalno okno, za portfelj z 50 sredstvi pa več kot 6000 mesecev. Resnost ocenjevalne napake je osupljiva, če upoštevamo, da so v praksi portfeljski modeli tipično ocenjeni na $60-120$ mesečnih podatkih ([7], str. 1947).

Velja opomniti, da je razlog za dobro uspešnost »1/n« pravila tudi v izbranem naboru podatkov. Analiza iz [7] je narejena za alokacijo premoženja glede na portfelje delnic in ne na posamezne delnice. Optimalna divezifikacijska politika dominira »1/n« pravilo samo za zelo visoke stopnje nesistematične volatilnosti, diverzificirani portfelji pa imajo nižjo nesistematično volatilnost kot posamezna sredstva. Kljub temu lahko povzamemo, da bo strategija »1/n« bolj verjetno presegla strategije iz optimizacijskih modelov v primerih

(1) ko je n velik, saj to izboljša možnosti za diverzifikacijo,
(2) ko sredstva nimajo zadovoljivo dolge zgodovine podatkov, ki bi omogočala natančno oceno momentov ([7], str. 1920).

Lahko potegnemo dva pomembna zaključka. Prvič, medtem ko je bil narejen precejšen napredek pri oblikovanju optimalnih portfeljev, bi moralo biti več energije namenjene izboljšanju ocene momentov (predvsem pričakovanih donosov) in uporabi ne le statističnih ampak tudi drugih dostopnih informacij o donosu sredstev.

Drugič, z namenom ocenjevanja uspešnosti določene strategije za optimalno alokacijo sredstev, predlagano bodisi s strani akademskih krogov bodisi investicijsko upravljalne industrije, naj »1/n« pravilo služi vsaj kot prvo očitno izhodišče za primerjavo, saj je preprosto za uporabo in ima relativno nizke stroške implementacije ([7], str. 1948).

8.2. Portfelj z najnižjim tveganjem

Portfelj, ki temelji na »1/n« pravilu ni edini, ki se izogne največji težavi povprečje-varianca optimizacije. Znotraj Markowitz okvirja obstaja portfelj z najnižjim tveganjem, ki se prav tako izogne ocenjevanju pričakovanih donosov.

Namesto ocenjevanja pričakovanih donosov je lažje predpostaviti, da imajo vsa sredstva v portfelju enak pričakovani donos. Ob tej predpostavki se portfelji razlikujejo le še glede na njihova tveganja in nič več glede na pričakovane donose. Ker se portfelji razlikujejo le še glede na njihova tveganja, je edini učinkovit portfelj tisti z najnižjim tveganjem. Portfelj z najnižjim tveganjem je v okviru povprečje-varianca optimalen, če imajo razredi sredstev enake pričakovane donose ([13], str. 2).

Sestava portfelja z najnižjim tveganjem je odvisna le od kovariančne matrike donosov. Ker ne poznamo kovariančne matrike Σ, jo moramo oceniti na pravem trgu. Tipično raziskovalci uporabijo zgodovinska opazovanja donosov za to oceno ([13], str. 6). Ker lahko kovariančno matriko na zgodovinskih podatkih ocenimo veliko bolj natančno kot pričakovane donose, je tveganje napake investitorja nižje v primeru portfelja z najnižjim tveganjem kot v primeru klasičnega Markowitzovega portfelja.

Standardna portfeljska teorija kot edini učinkovit portfelj navaja tangentni portfelj, a veliko empiričnih študij je pokazalo, da investiranje v portfelj z najnižjim tveganjem pogosto prinese boljše izven vzorčne rezultate kot so rezultati tangentnega portfelja. Tako kot strategija enakega uteževanja je tudi strategija minimalne variance pokazala svoj uspeh pri izgradnji lastniškega portfelja. Za delnice, ob predpostavki, da so vsi donosi delnic enaki, so pokazali, da je portfelj z najnižjim tveganjem lahko bolj uspešen od optimalnega portfelja, ki je oblikovan na podlagi šumečih napovedi donosov delnic ([4], str. 110).

Slaba stran portfelja z najnižjim tveganjem je njegova zasnova, ki bolj uteži manj tvegana sredstva. Posledično je takšen portfelj precej skoncentriran v le nekaj sredstvih. Zato so portfelji z najnižjim tveganjem komaj kaj diverzificirani v smislu homogene porazdelitve uteži. To je ravno nasprotno od portfelja z enakimi utežmi, ki je popolnoma diverzificiran v utežeh.

Portfelj z najnižjim tveganjem je rešitev naslednjega minimizacijskega problema

$$\min x^T \Sigma x, \qquad (8.1)$$

$$\text{p.p. } x^T \mathbb{1} = 1,$$

kjer je

- $\mathbb{1}$ stolpični vektor enic velikosti n in
- $x = (x_1, ..., x_n)^T$ vektor portfeljskih uteži.

Uteži bomo tako kot v primeru portfelja s pariteto tveganj najprej poračunali na primeru dveh sredstev, nato pa še na primeru večjega števila sredstev.

8.2.1. **Primer dveh sredstev (n=2)**

Naj bo ρ korelacija med dvema sredstvoma in $x = (w, 1 - w)$ vektor nujnih uteži. Varianca (tveganje) portfelja z dvema sredstvoma je enaka

$$\sigma^2 = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Ker želimo portfelj z najnižjim tveganjem, moramo minimizirati varianco portfelja. V ta namen odvajamo varianco po utežeh in odvod enačimo z nič

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial w} = 2w\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2w\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4w\rho\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Z nekaj obračanja zgornje enačbe pridemo do rešitve

$$x^* = \Big(\frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\Big).$$

8.2.2. **Splošen primer (n>2)**

Naj bo n število sredstev in Σ kovariančna matrika velikosti $n \times n$. Minimizacijski problem (8.1) bomo rešili z Lagrangevo funkcijo

$$L(x, \lambda) = x^T\Sigma x - \lambda(x^T\mathbb{1} - 1).$$

Pogoji prvega reda optimizacijskega problema so:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = 2\Sigma x - \lambda\mathbb{1} = 0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = x^T\mathbb{1} - 1 = 0.$$

Iz prvega pogoja izrazimo x

$$x = \frac{1}{2}\lambda\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \tag{8.2}$$

Pomnožimo obe strani z $\mathbb{1}^T$ in upoštevamo drugi pogoj, da dobimo izraz za λ

$$1 = \mathbb{1}^T x = \frac{1}{2}\lambda\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1},$$
$$\lambda = \frac{2}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}}.$$

Izraz za λ vstavimo v enačbo (8.2) in dobimo formulo za izračun uteži portfelja z najnižjim tveganjem

$$x = \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}}. \tag{8.3}$$

S tem se poenostavi tudi izračun variance portfelja z najnižjim tveganjem v obliko

$$\sigma^2 = x^T\Sigma x = \frac{1}{\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}}. \tag{8.4}$$

Metodologija paritete tveganj se od tradicionalnih portfeljev z najnižjim tveganjem razlikuje v več pomembnih točkah. Prvič, čeprav oba pristopa zgradita portfelj z uporabo tveganja kot vhodnega podatka, pariteta tveganj poudarja diverzifikacijo tveganja, medtem ko se minimalna varianca osredotoča na zmanjšanje stopnje tveganja celotnega portfelja. Za portfelj z najnižjim tveganjem velja, da so njegovi marginalni prispevki tveganja enaki za vsa sredstva v portfelju, portfelj s pariteto tveganj pa je dosežen z izenačitvijo celotnih prispevkov tveganja teh sredstev. Drugič, pariteta tveganja uporablja zneske tveganja za izgradnjo portfelja medtem ko minimalna varianca še vedno sledi optimizaciji in je zato veliko bolj občutljiva na vhodne podatke o volatilnosti in korelaciji. Posledica tega je, da bo imel portfelj z najnižjim tveganjem mogoče nižjo stopnjo celotnega tveganja kot portfelj s pariteto tveganj, vendar bo zaradi narave optimizacije vedno veliko bolj skoncentriran v smislu diverzifikacije kapitala ([21], str. 3).

8.3. Primerjava hevrističnih portfeljev

V magistrskemu delu smo pozornost namenili trem hevrističnim portfeljem: portfelju s pariteto tveganj, portfelju z enakimi utežmi in portfelju z najnižjim tveganjem. Za vsakega od njih smo povedali, kdaj je povprečje-varianca optimalen. Pod določenimi predpostavkami so ti trije portfelji povezani tudi med seboj. Očitno je, da sta portfelj z enakimi utežmi in portfelj z najnižjim tveganjem enaka, ko imajo vsa sredstva v portfelju enako volatilnost in ko so vse korelacije med pari sredstev enake. Poglejmo kdaj sta ta dva portfelja enaka portfelju s pariteto tveganj.

V primeru dveh sredstev so uteži portfelja z enakimi utežmi enake $w^*_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Iz izračuna uteži za portfelj s pariteto tveganj v primeru dveh sredstev iz razdelka 6.2.1 razberemo, da portfelj z enakimi utežmi in portfelj s pariteto tveganj sovpadata pod pogojem, da sta volatilnosti obeh sredstev enaki $\sigma_1 = \sigma_2$.
Za portfelj z najnižjim tveganjem smo v prejšnjem razdelku videli, da je rešitev brez omejitev v primeru dveh sredstev dana z $w^*_{mv} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$. Zato portfelj z najnižjim tveganjem sovpada s portfeljem s pariteto tveganja le v primeru, ko je $\sigma_1 = \sigma_2$, pri čemer tudi uteži v portfelju z najnižjim tveganjem dobijo vrednost $\frac{1}{2}$. Za ostale vrednosti σ_1 in σ_2 so portfeljske uteži različne ([14], str. 8).

Portfelj s pariteto tveganj je v splošnem kontekstu n sredstev in enolični korelaciji enak

- portfelju z enakimi utežmi v primeru, ko so vse volatilnosti enake,
- portfelju z najnižjim tveganjem v primeru, ko konstantna korelacija doseže svojo najnižjo možno vrednost.

Ker ujemanje portfelja s pariteto tveganj in portfelja z najnižjim tveganjem ni ravno očitno, si postopoma poglejmo, kako pridemo do te ugotovitve.
Naj bo $R = C_n(\rho)$ konstantna korelacijska matrika. Torej velja, da je $R_{i,j} = \rho$ za $i \neq j$ in $R_{i,i} = 1$. Kovariančno matriko lahko potem zapišemo kot

$$\Sigma = \sigma\sigma^T \odot R,$$

kjer je $\odot$ oznaka za množenje istoležnih komponent (ang. *element-wise multiplication*). Velja

$$\Sigma^{-1} = \Gamma \odot R^{-1},$$

kjer sta

$$\Gamma_{i,j} = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}, \quad R^{-1} = \frac{\rho\mathbb{1}\mathbb{1}^T - ((n-1)\rho+1)I}{(n-1)\rho^2-(n-2)\rho-1}.$$

S pomočjo teh izrazov in skupaj z lastnostjo $tr(AB) = tr(BA)$ lahko izračunamo uteži za portfelj z najnižjim tveganjem. Nova izraza vstavimo v enačbo (8.3) in dobimo novo formulo za izračun uteži v primeru portfelja z najnižjim tveganjem

$$x_i = \frac{-((n-1)\rho+1)\sigma_i^{-2} + \rho\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i\sigma_j)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}(-((n-1)\rho+1)\sigma_k^{-2} + \rho\sum_{j=1}^{n}(\sigma_k\sigma_j)^{-1})}. \tag{8.5}$$

Upoštevajmo, da je spodnja meja konstantne korelacije dosežena v $\rho = -(n-1)^{-1}$. Potem rešitev (8.5) postane

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i\sigma_j)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_k\sigma_j)^{-1}} = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{-1}}.$$

Opazimo, da je ta rešitev ravno rešitev za portfelj s pariteto tveganj v primeru konstantne korelacije. S tem smo pokazali, da je portfelj s pariteto tveganj podoben portfelju z najnižjim tveganjem, ko so konstantne korelacije na svoji najnižji možni vrednosti.

Do sedaj smo ugotovili v katerih okoliščinah obravnavane tri strategije ustvarijo enake portfelje. Dodatno lahko pokažemo, da je portfelj s pariteto tveganj lociran med portfeljem z enakimi utežmi in portfeljem z najnižjim tveganjem ter tako predstavlja dobro potencialno substitucijo tradicionalnima pristopoma. Lastnosti obravnavanih treh portfeljev s stališča matematične definicije dobijo obliko:

$$\begin{gathered} x_i = x_j \text{ (EW)}, \\ \partial_{x_i}\sigma(x) = \partial_{x_j}\sigma(x) \text{ (MV)}, \\ x_i\partial_{x_i}\sigma(x) = x_j\partial_{x_j}\sigma(x)\text{(ERC)}. \end{gathered}$$

Iz zgornjih definicij vidimo, da je portfelj s pariteto tveganj (ERC) lociran med portfeljem z najnižjim tveganjem (MV) in portfeljem z enakimi utežmi (EW). Za potrebe dokaza te trditve si oglejmo modificirano verzijo optimizacijskega problema (6.11)

$$x^*(c) = \arg\min\sqrt{x^T\Sigma x}, \tag{8.6}$$

$$p.p. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \geq c \\ \mathbf{1}^T x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} .$$

Če želimo oblikovati portfelj s pariteto tveganj, moramo minimizirati volatilnost portfelja ob dodatnih omejitvenih funkcijah, t.j $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \geq c$, kjer je c konstanta, določena s strani portfelja s pariteto tveganj. Konstanto c lahko interpretiramo kot minimalna stopnja diverzifikacije po komponentah, ki je potrebna za pridobitev portfelja s pariteto tveganj. Volatilnost $\sigma(x^*(c))$ je naraščajoča funkcija c-ja

$$c_1 \leq c_2 \Longrightarrow \sigma(x^*(c_1)) \leq \sigma(x^*(c_2)),$$

saj je omejitev $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - c \geq 0$ manj omejevalna z c_1 kot z c_2. Dva ekstremna primera sta dosežena v $c = -\infty$ in $c = -n\ln n$.
Če je $c = -\infty$, potem je optimizacijski problem ravno problem z minimalno varianco. Uteži portfelja z najnižjim tveganjem so potem $x^*(-\infty)$.
Iz Jensenove neenakosti in omejitve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ dobimo, da je vsota $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ omejena in sicer na način $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \leq -n\ln n$. Edina rešitev za c je potem $-n\ln n$.

Tako dobimo $x^*(-n\ln n) = 1/n$, kar je ravno portfelj z enakimi utežmi.
Zato rešitev za splošni problem za $c \in [-\infty, -n\ln n]$ zadošča zvezi

$$\sigma(x^*(-\infty)) \leq \sigma(x^*(c)) \leq \sigma(x^*(-n\ln n))$$

oziroma

$$\sigma_{MV} \leq \sigma(x^*(c)) \leq \sigma_{EW}.$$

Glede na rezultat iz razdelka 6.2.3 obstaja takšna konstanta c^*, da je $x^*(c^*)$ portfelj s pariteto tveganj. To dokazuje, da so volatilnosti obravnavanih treh portfeljev urejene na način

$$\sigma_{MV} \leq \sigma_{ERC} \leq \sigma_{EW}. \tag{8.7}$$

Zaključimo lahko, da imamo naravno ureditev volatilnosti portfeljev. Volatilnost portfelja z najnižjim tveganjem je nepresenetljivo najnižja, volatilnost portfelja z enakimi utežmi je najvišja in volatilnost portfelja s pariteto tveganj je vmes med obema volatilnostma. Rezultat lahko posplošimo na katerokoli konveksno mero tveganja, ki izpolnjuje Eulerjev izrek o homogeni funkciji ([14], str. 8).

9. Ocenjevanje portfeljske uspešnosti

Predstavljena algoritma nam omogočata učinkovit izračun portfeljskih uteži za portfelj s pariteto tveganj. Lastnosti portfelja s pariteto tveganj si bomo ogledali na treh različnih naborih podatkov. V 7. poglavju smo ugotovili, da je Newton-Nesterov algoritem za manjši nabor podatkov hitrejši od algoritma cikličnega koordinatnega spusta. Ker so vsi izbrani nabori podatkov manjšega obsega, bomo portfelj s pariteto tveganj določili s pomočjo Newton-Nesterovega algoritma.

Primarni cilj empiričnega testiranja je ocena portfeljske strategije paritete tveganj glede na strategiji enako uteževanje ter minimalna varianca, v kontekstu koncentracije uteži sredstev in koncentracije prispevkov tveganja sredstev. V vseh treh primerih se bomo omejili na izgradnjo portfeljev z nenegativnimi utežmi.

Uspešnost zgrajenih portfeljev bomo ocenili z več različnimi kazalniki. Za vsak portfelj bomo poračunali njegov povprečni letni preseženi donos in letno volatilnost. Preseženi donos se izračuna kot razlika med dejanskim donosom in netveganim donosom. Netvegani donos lahko vlagatelj doseže z investicijo v kratkoročne državne vrednostne papirje. Za izračun netveganega donosa bomo uporabili indeks G0D0 (The BofA Merrill Lynch German Governmant Index), ki sledi uspešnosti javno izdanega državnega dolga s strani nemške vlade, nominiranega v EUR.

Ocenjevanje uspešnosti zgolj na povprečnem donosu ali le na volatilnosti ne poda veliko informacij. Donosi morajo biti popravljeni za tveganje, preden jih lahko smiselno primerjamo. Ena od možnih mer uspešnosti, ki je popravljena za tveganje, je Sharpe kazalnik (S). Sharpe kazalnik temelji na ideji, da vlagatelj ne more doseči višjega donosa od netvegane obrestne mere (oziroma netveganega donosa) brez sprejetja tveganja. Sharpe kazalnik zato upošteva samo tisti del donosa, za katerega mora vlagatelj prejeti tveganje, izračuna pa se z s formulo ([1], str. 826)

$$S = \frac{R_P - R_f}{\sigma_P},$$

kjer je R_P povprečna donosnost portfelja P, R_f povprečna netvegana donosnost in σ_P standardni odklon donosov. Sharpe kazalnik nam pove, kolikšna je presežena donosnost na enoto prevzetega tveganja. Bolj diverzificirani portfelji imajo višji Sharpe kazalnik, kar pomeni, da je nagrada na enoto tveganja višja ([10], str. 259).

Poračunali bomo tudi dva Ginijeva koeficienta, enega za alokacijo uteži (G_{x_i}) in enega za alokacijo tveganja (G_{c_i}). Ginijev koeficient je mera, ki jo ekonomisti pogosto uporabljajo za merjenje dohodkovne neenakosti (ali koncentracije premoženja) v državi in za primerjavo neenakosti med državami. Označimo utež oziroma celotni prispevek tveganja sredstva i z y_i in jih uredimo v nepadajočem vrstnem redu ($y_i \leq y_{i+1}$). Ginijev koeficient za uteži in Ginijev koeficient za prispevke tveganja se izračuna po formuli ([5], str. 14)

$$G = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i(y_i - \bar{y}).$$

Vrednost Ginijevega koeficienta se vedno nahaja med 0 in 1. Bližje kot je vrednosti nič, bolj enaka je porazdelitev uteži (prispevkov tveganja) v portfelju. Bolj kot je Ginijev koeficient blizu ena, bolj neenaka je porazdelitev uteži (prispevkov tveganja) v portfelju. Zato koeficient blizu nič označuje dobro diverzificirane portfelje in koeficient blizu ena označuje visoko skoncentrirane portfelje.

Ker je diverzifikacija izredno pomemben kriterij pri izgradnji portfelja, bo zadnja mera uspešnosti portfelja diverzifikacijski kazalnik (D). Diverzifikacijski kazalnik portfelja P je definiran kot razmerje med tehtanim povprečjem volatilnosti sredstev in volatilnostjo portfelja

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i}{\sigma_P}.$$

Portfelj, ki pod predpostavkami samih dolgih pozicij maksimizira diverzifikacijski kazalnik, je še eden iz skupine portfeljev, ki ga ustvari strategija za katero ni potrebno napovedati pričakovanih donosov. Imenuje se najbolj diverzificiran portfelj. Cilj vsake portfeljske strategije je ustvariti čim višji diverzifikacijski kazalnik, saj ta odraža resnično diverzificiran portfelj. Diverzifikacijski kazalnik kateregakoli portfelja, sestavljenega le iz dolgih pozicij, bo vedno vsaj ena ([6], str. 41).

Predenj se spustimo v analizo podatkov naj opomnimo, da namen tega razdelka ni oblikovanje portfeljev, ki bodo prinesli željeni donos na določen datum v prihodnosti. Portfelji v nadaljevanju ne vključujejo nobenih predvidevanj glede obnašanja vključenih sredstev v prihodnosti in so oblikovani izključno na zgodovinskih podatkih. Prav tako portfelji ne bodo izračunani na konkretnih vrednostnih papirjih, vendar bodo le-ti zastopani s strani različnih indeksov, ki sledijo splošnemu gibanju nekega razreda sredstev na trgu. Cilj tega razdelka je preveriti teoretične lastnosti izbranih portfeljskih strategij na konkretnem naboru podatkov, za kar so izračuni na zgodovinskih podatkih indeksov povsem ustrezni.

9.1. **Globalni delniški portfelj**

Za začetek empiričnega preverjanja uspešnosti strategij si bomo ogledali nabor podatkov, ki je sestavljen iz trinajstih največjih borznih indeksov po svetu. Glede na geografske enote jih lahko razporedimo sledeče:

- *Kanada*:
  - SPTSX (S&P/TSX Composite Index)
- *Severna Amerika*:
  - INDU (Dow Jones Industrial Average)
  - SPX (S&P 500 Index)
  - CCMP (NASDAQ Composite Index)
  - RTY (Russell 2000 Index)
- *Evropa*:
  - UKX (FTSE 100 Index)
  - DAX (DAX Index)
  - CAC (CAC 40 Index)
  - IBEX (IBEX 35 Index)
- *Azija - Pacifik*:
  - NKY (NIKKEI 225 Index)
  - HSI (HANG SENG Index)
  - TWSE (Taiwan Stock Exchange Weighted Index)
  - SHCOMP (Shanghai Stock Exchange Composite Index)

Podatki o izbranih borznih indeksih so pobrani s terminala Bloomberg. Uporabili bomo dnevne podatke za obdobje med 1.1.1999 in 31.12.2015. Vse vrednosti so v EUR.

V tabeli 3 sta predstavljeni osnovni opisni statistiki vseh izbranih indeksov: povprečni letni donos μ (izračunan na podlagi aritmetičnega povprečje) in letna volatilnost σ_i. Tabela 4 prikazuje korelacijsko matriko Σ.

	$\mu(\%)$	σ_i (%)
DAX	8,24	25,20
CAC	4,05	24,37
UKX	2,01	21,71
HSI	9,71	26,75
CCMP	10,48	29,30
NKY	5,78	25,83
RTY	11,38	26,66
SPX	6,99	22,62
SPTSX	8,35	22,56
INDU	7,15	21,66
TWSE	6,94	26,13
SHCOMP	14,74	28,64
IBEX	2,87	24,69

TABELA 3. Povzetek statistik

	Σ (%)												
DAX	100	88,2	77,2	32,7	50,8	15,7	51,4	55,3	56,2	53,1	22,1	7,8	78,6
CAC		100	84,1	32,9	44,4	15,8	47,0	50,2	56,8	47,8	22,9	7,3	87,2
UKX			100	40,7	45,3	21,6	48,2	53,2	61,6	51,7	27,7	13,3	74,3
HSI				100	27,3	53,9	26,4	29,5	34,2	30,1	54,2	41,8	28,1
CCMP					100	13,1	88,4	89,7	66,7	82,2	23,9	14,0	38,8
NKY						100	10,0	12,7	19,0	14,3	45,0	24,5	11,7
RTY							100	89,9	68,9	84,7	23,2	13,2	41,5
SPX								100	71,4	97,2	24,9	16,7	43,4
SPTSX									100	65,6	26,7	14,7	50,1
INDU										100	25,5	17,7	41,1
TWSE											100	27,7	18,5
SHCOMP												100	4,4
IBEX													100

Tabela 4. Korelacijska matrika

Izbrani nabor podatkov je zanimiv zaradi njegovih karakteristik. Iz tabele 3 opazimo, da imajo vsa sredstva zelo podobne volatilnosti. Vse se gibljejo na intervalu med $21,66\%$ in $29,30\%$. Glede na zgodovinske podatke je bil najbolj volatilen indeks CCMP. Najmanj tvegana indeksa sta bila ameriški DIJA in londonski UKX, pri čemer je bil indeks UKX tisti, ki je imel najnižji povprečni letni donos.
Na splošno so imeli evropski indeksi (z izjemo indeksa DAX) najnižje povprečne letne donose v obravnavanem obdobju. Njihovi donosi so nizki tudi glede na dejstvo, da gre za delniški razred sredstev.
Za razliko od podobnih volatilnosti se korelacijski koeficienti med seboj močno razlikujejo. Vsi korelacijski koeficienti so pričakovano pozitivni, saj je nabor sredstev sestavljen le iz delniških indeksov. A kljub temu imamo v korelacijski matriki vse, od zelo nizke do zelo močne povezanosti med sredstvi. Po pričakovanjih so med seboj močno povezane delnice iz istih trgov (ameriški trg, evropski trg), najnižjo korelacijo pa opazimo med evropskimi delnicami in delnicami na Shanghaiski borzi. Globalni delniški portfelj je zato primer portfelja s podobnimi volatilnostmi in različnimi korelacijami.

V nadaljevanju bomo na teh podatkih uporabili obravnavane tri portfeljske strategije in za vsako od njih izračunali uteži, marginalni prispevek tveganja in celotni prispevek tveganja. Rezultati so prikazani v tabeli 5.

	Portfelj z enakimi utežmi			Portfelj z najnižjim tveganjem			Portfelj s pariteto tveganj		
	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$
DAX	7,69	19,39	1,49	0	16,19	0	6,72	18,75	1,26
CAC	7,69	18,59	1,43	0	16,01	0	6,98	18,05	1,26
UKX	7,69	16,89	1,30	8,47	15,30	1,30	7,59	16,59	1,26
HSI	7,69	16,42	1,26	0	17,31	0	7,25	17,37	1,26
CCMP	7,69	22,69	1,75	0	18,13	0	5,84	21,57	1,26
NKY	7,69	10,72	0,82	18,97	15,30	2,90	10,33	12,20	1,26
RTY	7,69	20,81	1,60	0	16,69	0	6,37	19,77	1,26
SPX	7,69	18,64	1,43	0	15,90	0	7,06	17,85	1,26
SPTSX	7,69	17,45	1,34	7,69	15,30	1,18	7,43	16,95	1,26
INDU	7,69	17,26	1,33	22,66	15,30	3,47	7,58	16,61	1,26
TWSE	7,69	13,36	1,03	9,48	15,30	1,45	8,77	14,37	1,26
SHCOMP	7,69	10,39	0,80	16,57	15,30	2,53	10,42	12,09	1,26
IBEX	7,69	16,98	1,31	16,17	15,30	2,47	7,65	16,46	1,26

Tabela 5. Karakteristike portfeljev

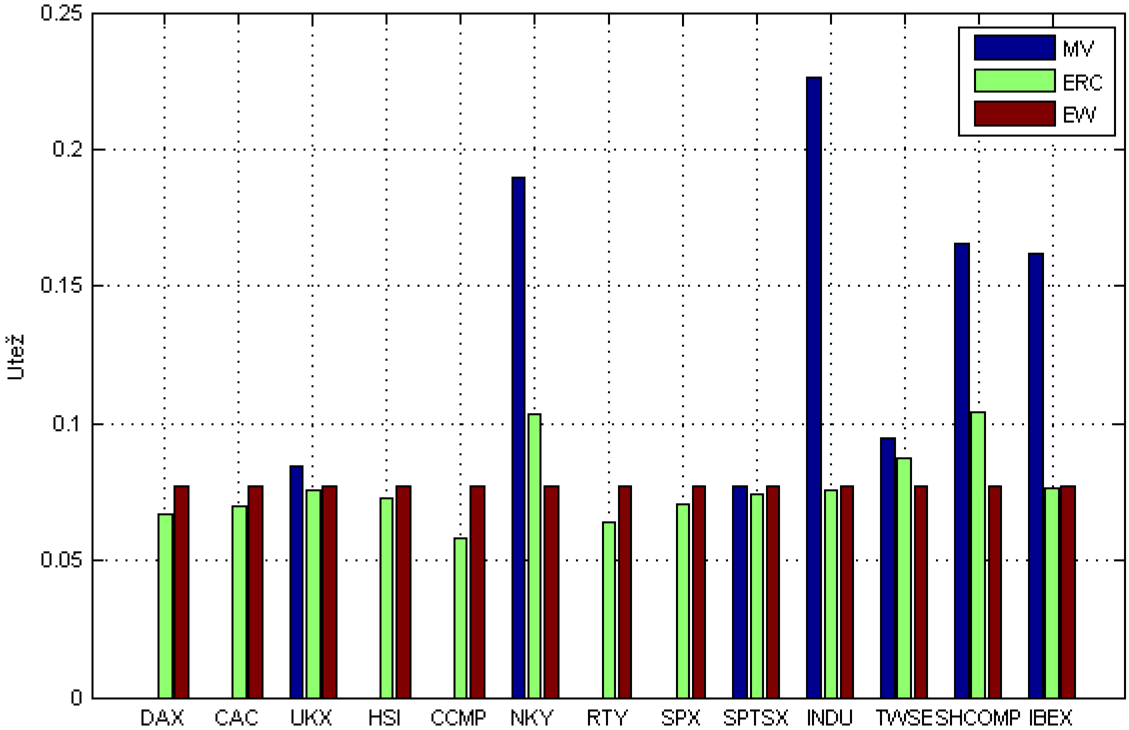
Glede na dejstvo, da portfelj z enakimi utežmi enako obteži vse delnice v portfelju, bi lahko naivno pričakovali, da bodo najbolj volatilne delnice prispevale največji delež tveganja in obratno. Izkaže se, da je ta domneva le na pol resnična, saj največ tveganja prispeva indeks CCMP, ki je najbolj volatilen. Preseneti nas najnižji celotni prispevek tveganja, ki ga ustvarijo delnice iz indeksa SHCOMP. Ta indeks je sam po sebi na drugem mestu po tveganosti, zato ga ne bi pričakovali na zadnjem mestu med celotnimi prispevki tveganj. Če bi sklepali le po volatilnostih, bi najmanj tveganja moral prispevati indeks INDU. Vendar lahko iz tabele 5 razberemo, da temu še zdaleč ni tako. Skoraj polovica ostalih sredstev prispeva manj tveganja od njega. Prav tako ima polovica sredstev nižji marginalni prispevek tveganja.

Na primeru portfelja z najnižjim tveganjem lepo vidimo lastnost enakih marginalnih prispevkov tveganja za vsa sredstva, katerih utež ni enaka nič. Vsa ta sredstva imajo najnižji marginalni prispevek tveganja. V tabeli 5 ni prikazanega stolpca z normaliziranimi prispevki tveganja c_i, če pa bi bil, bi iz njega videli, da so vsi normalizirani prispevki tveganja enaki utežem portfelja z najmanjšim tveganjem. To bomo lahko kasneje preverili na grafu 1 in 2.
Opazimo, da je portfelj z najnižjim tveganjem sestavljen le iz polovice vseh delnic, ki so bile v naboru. S tem lahko potrdimo večkrat omenjeno pomanjkljivost tega portfelja, ki je visoka skoncentriranost tako v smislu uteži kot v smislu prispevkov tveganj.

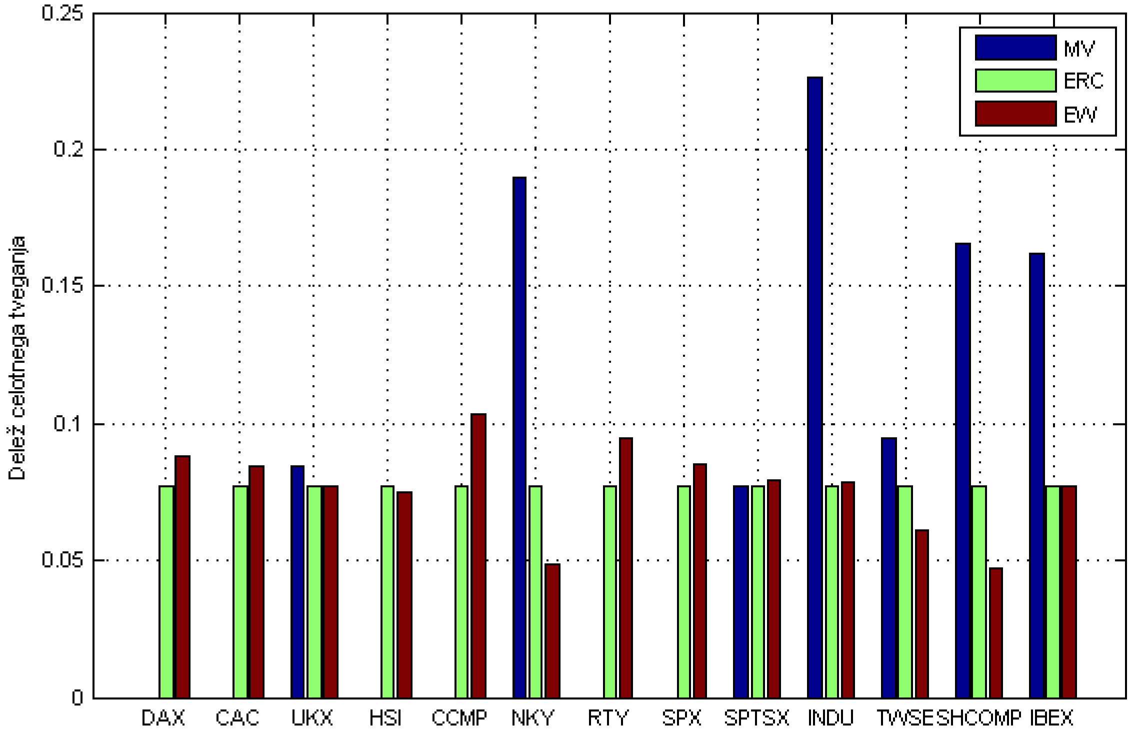
Za portfelj s pariteto tveganj takoj opazimo enake celotne prispevke tveganja iz vseh sredstev, ki portfelj sestavljajo. S tem je empirično dokazano, da je portfelj s pariteto tveganj glede na ostala dva portfelja najbolj uravnotežen v smislu tveganja. Glede na to, da vsa sredstva prispevajo enako količino tveganja, je smiselno pričakovati, da bo najbolj volatilno sredstvo dobilo najnižjo utež. Oziroma, če gledamo z vidika marginalnih prispevkov tveganja, bi najnižjo utež moralo dobiti tisto sredstvo, katerega marginalni prispevek tveganja je najvišji. To se je tudi zgodilo, saj je strategija paritete tveganj najnižjo utež pripisala indeksu CCMP.

Če potegnemo črto pod vsemi tremi strategijami, nas je najbolj presenetil indeks SHCOMP. Kljub svoji visoki volatilnosti v vseh treh strategijah predstavlja sredstvo, v katerega je smiselno vložiti večji % svojega premoženja. Razlog se skriva v njegovih korelacijah z ostalimi sredstvi v portfelju. Je edini indeks, ki ima precej zelo nizkih korelacij z drugimi delnicami, to je med 0% in 10%. S tem indeks SHCOMP lepo ponazarja vpliv diverzifikacijskega učinka.

Ker včasih slikovni prikaz podatkov razkrije še kakšno zanimivost, ki je težje vidna iz samih številk, si bomo razporeditev uteži in tveganja pogledali še grafično.
Graf 1 prikazuje portfeljske uteži, pripisane posameznemu razredu sredstev. Iz njega razberemo že ugotovljena dejstva iz tabele 5. Dodatno opazimo, da strategija paritete tveganj določi uteži precej podobno kot jih določi 1/n pravilo. Razlog za to je delniško tveganje, ki je skupno celotnemu naboru sredstev. Dodatno opazimo dva indeksa, ki jima vse tri strategije pripišejo skoraj enake uteži. Gre za indeks UKX in indeks SPTSX. Indeksu SPTSX tako strategija enakih uteži kot strategija minimalne variance pripišeta povsem enake uteži. Strategija paritete tveganj indeksu pripiše nekoliko nižjo utež, a še vedno zelo blizu tistima, ki ju določita ostali dve strategiji. Podobno enakost opazimo iz grafa 2, ki prikazuje prispevek tveganja



Graf 1. Uteži sredstev



Graf 2. Alokacija tveganja

vsakega sredstva k celotnemu tveganju portfelja, to je normalizirane prispevke tveganja. Če primerjamo oba grafa, lahko za portfelj z najnižjim tveganjem potrdimo že omenjeno ugotovitev, in sicer da so uteži tega portfelja enake njihovim deležem celotnega tveganja. Torej lahko rečemo, da za portfelj z najnižjim tveganjem velja lastnost $c_i(x) = x_i$, kar pomeni, da je normaliziran prispevek tveganja določen z utežjo. Zaključimo lahko, da se iz obeh grafov še lepše vidi lastnost portfelja z enakimi utežmi (graf 1) in lastnost portfelja s pariteto tveganj (graf 2).

Kot je bilo omenjeno že v uvodu v to poglavje, bomo za vsako strategijo poračunali nekaj kazalnikov uspešnosti. Njihove definicije so zapisane na začetku tega poglavja, na tem mestu pa si oglejmo njihove vrednosti na osnovi naših podatkov.

Strategija	$\hat{\mu}(\%)$	$\sigma(\%)$	$S(\%)$	$G_{x_i}(\%)$	$G_{c_i}(\%)$	$DR(\%)$
Enako uteževenje	4,12	16,89	24,37	0,00	11,13	1,49
Minimalna varianca	3,49	15,30	22,79	57,39	57,39	1,61
Pariteta tveganj	4,13	16,38	25,22	9,06	0,00	1,54

Tabela 6. Uspešnost strategij

Preseženi donos za portfelj z enakimi utežmi je zelo podoben tistemu, ki ga ustvari portfelj s pariteto tveganj. To nas ne sme presenetiti, saj smo iz grafa 1 ugotovili, da so uteži za oba portfelja precej podobno določene.
Ob rezultatih glede volatilnosti portfeljev se najprej spomnimo na pravilo (8.7), ki ureja volatilnost treh strategij. Vidimo, da je volatilnost portfelja s pariteto tveganj večja od volatilnosti portfelja z najnižjim tveganjem, vendar manjša od volatilnosti portfelja z enakimi utežmi. S tem smo preverili veljavnost zveze (8.7) na empiričnih podatkih. S pomočjo rezultatov o volatilnostih lahko preverimo tudi, da za vse tri portfelje drži Eulerjev izrek o homogeni funkciji. Volatilnost vsakega od treh portfeljev je namreč enaka vsoti njegovih celotnih prispevkov tveganj. Poleg tega opazimo, da se volatilnosti vseh treh strategij zelo malo razlikujejo med seboj. To je posledica dejstva, da celoten nabor sredstev spada v delniški razred sredstev. Kljub temu v preseženih donosih in volatilnostih ostaja nekaj variance med strategijami, vendar kot bomo videli kasneje, so v primeru globalnega delniškega portfelja preseženi donosi in volatilnosti med posameznimi strategijami daleč najbolj podobni.
Enaka ugotovitev velja tudi za Sharpe kazalnike. V ostalih dveh naborih podatkov se bodo ti močno razlikovali med posameznimi strategijami. V tem primeru največji Sharpe kazalnik ustvari strategija paritete tveganj, sledi mu Sharpe kazalnik za portfelj z enakimi utežmi, najmanjši Sharpe kazalnik pa ustvari portfelj z najnižjim tveganjem. Glede na to, da Sharpe kazalnik ocenjuje preseženo donosnost na enoto tveganja, je bilo to zaporedje pričakovano, saj je enako zaporedju diverzifikacije tveganja (najbolj diverzificiran je portfelj s pariteto tveganj, najmanj diverzificiran je portfelj z najnižjim tveganjem).
Ginijev koeficient za alokacijo uteži je enak nič za portfelj z enakimi utežmi, kar je razumljivo, saj je ta popolnoma diverzificiran v smislu uteži. Prav tako dobro diverzifikacijo uteži, Ginijev koeficient potrdi za portfelj s pariteto tveganj. Ustrezno visok Ginijev koeficient za portfelj z najnižjim tveganjem odraža skoncentriranost tega portfelja v le polovici sredstev.
Ginijev koeficient za alokacijo tveganja pokaže ravno obratne rezultate od Ginijevega koeficienta za alokacijo uteži. Takšen obrat smo pričakovali, nekoliko presenetljiva je le njegova visoka vrednost za portfelj z najnižjim tveganjem, saj je ta v splošnem

obravnavan kot nizko tvegani portfelj.
Zanimive rezultate podaja tudi diverzifikacijki kazalnik. Najvišji je v primeru portfelja z najnižjim tveganjem, kar ni ravno običajno. Razlog za to je izbrani nabor podatkov in njihove karakteristike, saj bomo v nadaljnjih primerih videli, da je praviloma portfelj s pariteto tveganj tisti, ki ima najvišji diverzifikacijki kazalnik.

9.2. Evropski diverzificiran portfelj

Drugi nabor podatkov sestavlja sedem različnih razredov sredstev, pri čemer smo se poskušali omejiti na investitorja, ki ga privlači evropski trg. Ideja, ki se skriva za izbiro razredov sredstev, je prikaz dobro razpršene naložbe, ki je izpostavljena različnim tipom tveganj. Množica podatkov je sestavljena iz naslednjih razredov sredstev:

- BCOMTR (Bloomberg Commodity Index Total Return) - indeks surovin,
- BE500 (Bloomberg European 500 Index) - delniški indeks najbolj likvidnih evropskih podjetij,
- EG00 (The BofA Merrill Lynch Euro Governemnt Index) - indeks državnih obveznic, izdanih s strani držav članic evroobmočja,
- EPEU (FTSE EPRA/NAREIT Euro Zone Index) - indeks, ki sledi uspešnosti trgovanja z nepremičninami na evropskem trgu,
- ER00 (The BofA Merrill Lynch Euro Corporate Index) - indeks visoko kakovostnih (ang. *investment - grade*) podjetniških obveznic, izdanih na evropskem trgu,
- HE00 (The BofA Merrill Lynch Euro High Yield Index) - indeks visoko tveganih (ang. *high yield*) podjetniških obveznic, izdanih na evropskem trgu,
- MXEF (MSCI Emerging Markets Index) - delniški indeks razvijajočih se trgov.

Podatki o izbranih razredih sredstev so pobrani s terminala Bloomberg. Uporabili smo dnevne podatke za obdobje med 1.1.1999 in 31.12.2015. Vse vrednosti so v EUR.

Tako kot v primeru globalnega delniškega portfelja bomo podatke najprej spoznali preko osnovnih opisnih statistik, ki so predstavljene v tabeli 7.

	$\mu(\%)$	σ_i (%)	Σ (%)						
BCOMTR	4,14	17,11	100,0	30,8	-15,0	19,1	-10,1	9,4	38,4
BE500	3,08	19,87		100,0	-22,9	65,5	-23,7	32,5	62,9
EG00	5,05	3,72			100,0	-7,8	78,9	0,8	-18,3
EPEU	7,15	18,27				100,0	-10,5	29,2	46,8
ER00	4,68	2,61					100,0	14,0	-10,9
HE00	5,95	6,55						100,0	38,2
MXEF	8,74	20,29							100,0

Tabela 7. Povzetek statistik in korelacijska matrika

Iz tabele 7 opazimo pomembno varianco med sredstvi, tako v smislu povprečnih donosov kot v smislu volatilnosti. V izbranem obdobju so bile najmanj donosne delnice na evropskem trgu, medtem ko sta bili najbolj donosni naložba v delnice na

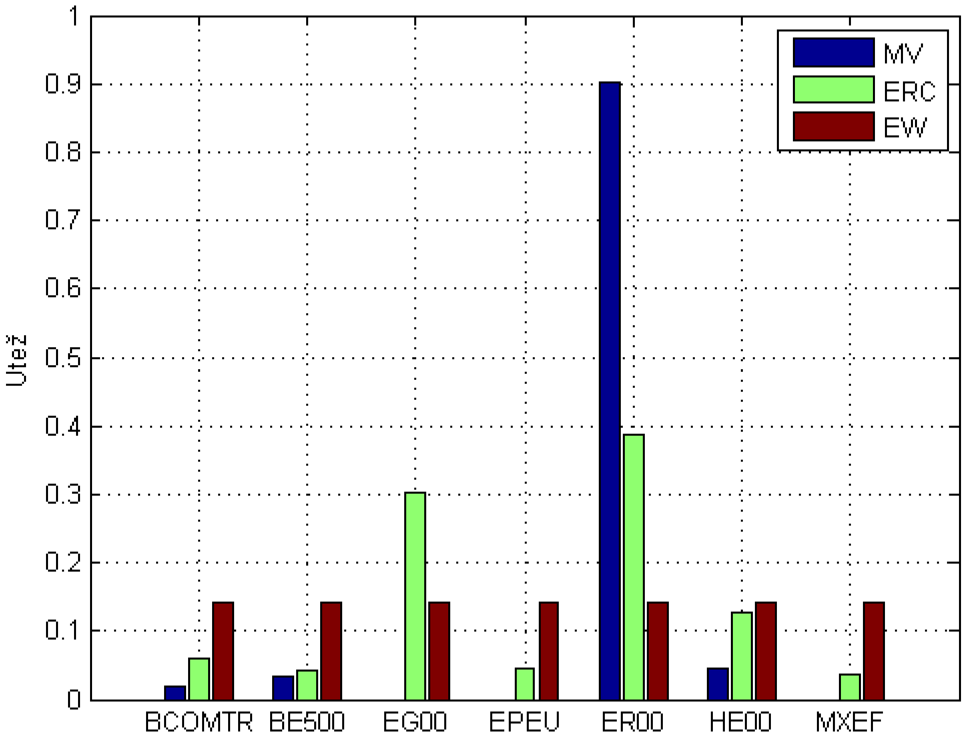
razvijajočih se trgih ter naložba v nepremičnine na evropskem trgu. Presenetljiva nizka donosnost delnic na evropskem trgu je posledica izbranega obdobja. V kolikor obdobje podaljšamo le za nekaj let v preteklost, donos evropskih delnic takoj zraste za nekaj procentov.
Najbolj volatilni razredi sredstev so delnice na razvijajočem in evropskem trgu ter nepremičnine. Najnižjo volatilnost ima razred visoko kakovostnih obveznic, čigar volatilnost je nižja od državnih obveznic. To je še en rezultat, ki je nekoliko v nasprotju s teorijo. Praviloma so državne obveznice manj tvegane od podjetniških obveznic, a za visoko kakovostne obveznice v našem obdobju to očitno ni veljalo. Če pogledamo gole podatke, potem opazimo, da od konca leta 2013 dalje donos visoko kakovostnih podjetniških obveznic močno pada in se zadnja leta giblje v tandemu z evropskimi državnimi obveznicami. Poleg tega se moramo zavedati, da evropske državne obveznice niso le nemške državne obveznice, ki praviloma veljajo za najmanj tvegan vrednostni papir na evropskih tleh. Če bi primerjali visoko kakovostne podjetniške obveznice z državno obveznico Italije ali druge manj stabilne države bi ugotovili, da je razlika v donosu med visokokakovostnimi podjetniškimi obveznicami in državnimi obveznicami v mnogih primerih negativna. Večina državnih obveznic evropskih držav se namreč giblje podobno kot podjetniške obveznice. To potrjuje tudi korelacijski koeficient med indeksoma EG00 in ER00, ki nakazuje močno povezanost med obema razredoma sredstev. Ker so bile državne obveznice nekoliko bolj volatilne do leta 2009, nato pa sta se oba indeksa začela gibati zelo podobno, je volatilnost državnih obveznic v tabeli 7 višja od volatilnosti visoko kakovostnih obveznic.
Korelacijska matrika je zelo raznolika, saj imamo opravka s povsem različnimi razredi sredstev, ki že po svojih definicijah nimajo veliko skupnega.
Izbrani nabor podatkov je zelo raznolik tako v smislu volatilnosti kot v smislu korelacij. Ta nabor podatkov je zanimiv zaradi teh razlik in zaradi možnosti za diverzifikacijo, ki jih ponuja korelacijska matrika.

	Portfelj z enakimi utežmi			Portfelj z najnižjim tveganjem			Portfelj s pariteto tveganj		
	x_i(%)	MRC_i(%)	TRC_i(%)	x_i(%)	MRC_i(%)	TRC_i(%)	x_i(%)	MRC_i(%)	TRC_i(%)
BCOMTR	14,29	9,82	1,40	2,02	2,40	0,05	5,98	7,91	0,47
BE500	14,29	16,80	2,40	3,22	2,40	0,08	4,11	11,49	0,47
EG00	14,29	- 0,40	-0,06	0	2,57	0	30,33	1,56	0,47
EPEU	14,29	13,88	1,98	0	2,50	0	4,40	10,73	0,47
ER00	14,29	- 0,18	-0,03	90,08	2,40	2,16	38,69	1,22	0,47
HE00	14,29	3,08	0,44	4,68	2,40	0,11	12,73	3,71	0,47
MXEF	14,29	16,79	2,40	0	3,36	0	3,76	12,57	0,47

Tabela 8. Karakteristike portfeljev

Prva stvar, ki izstopa v primeru portfelja z enakimi utežmi, so negativni marginalni prispevki tveganja. Negativni marginalni prispevek tveganja nam nakazuje, naj povečamo utež tega sredstva v portfelju. Vendar ker smo v portfelju z enakimi utežmi, to glede na njegovo definicijo ni možno. Zaradi tega lahko pričakujemo, da bodo kazalci uspešnosti strategijo »1/n« ocenili bistveno slabše od ostalih dveh strategij, saj ti ne oblikujeta portfeljev z negativnimi marginalnimi prispevki tveganj. Spomnimo se, da smo to pomanjkljivost portfelja z enakimi utežmi omenili že v razdelku 8.1. Omenili smo, da lahko pričakujemo revno diverzifikacijo tveganj, če se tveganja med sredstvi zelo razlikujejo.

Portfelj z najnižjim tveganjem je močno skoncentriran na razred visoko kakovostnih podjetniških obveznic, saj temu pripiše utež okoli 90%. Ostali razredi sredstev imajo zelo majhne ali ničelne uteži. Prav tako je skoraj celotna volatilnost portfelja z najnižjim tveganjem povzročena s strani razreda visoko kakovostnih podjetniških obveznic. Ta rezultat ni presenetljiv, saj ima razred visoko kakovostnih podjetniških obveznic najnižjo volatilnost, hkrati pa ima tudi pretežno nizke korelacije z ostalimi razredi sredstev. Tudi na tem naboru podatkov opazimo enake marginalne prispevke tveganj za vsa sredstva, katera strategija minimalne variance vključi v portfelj.
V portfelju s pariteto tveganj so prispevki tveganj iz vseh sredstev enaki, skladno s tem so nato določene uteži. Vse uteži so urejene v obratnem vrstnem redu kot volatilnosti. Najnižjo utež strategija paritete tveganj pripiše najbolj volatilnemu razredu sredstev, medtem ko najvišjo utež določi najmanj volatilnemu razredu sredstev.

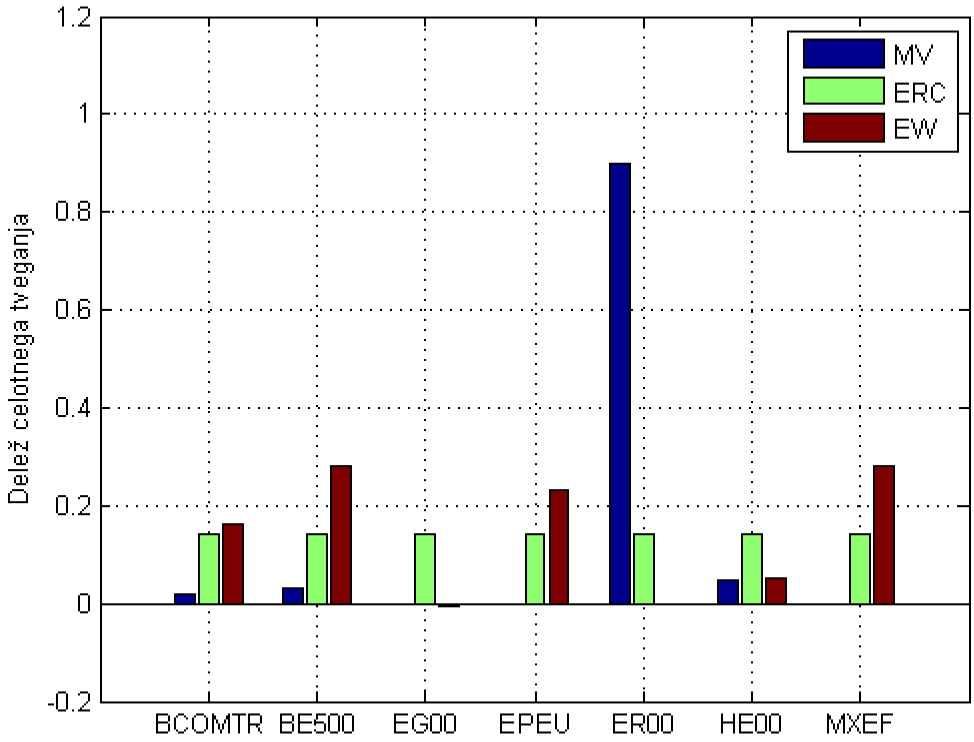


Graf 3. Uteži sredstev

Uspešnost vsake od treh strategij bomo tudi tokrat preverili na množici kazalnikov. Rezultati so prikazani v tabeli 9.

Strategija	$\hat{\mu}(\%)$	$\sigma(\%)$	$S(\%)$	$G_{x_i}(\%)$	$G_{c_i}(\%)$	$DR(\%)$
Enako uteževanje	2,22	8,54	26,03	0,00	46,03	1,48
Minimalna varianca	1,27	2,40	52,90	80,81	80,81	1,52
Pariteta tveganj	1,72	3,31	52,10	47,30	0,00	1,93

Tabela 9. Uspešnost strategij



Graf 4. Alokacija tveganja

Kot smo omenili že v primeru globalnega delniškega portfelja, v tem naboru podatkov med strategijami res opazimo večje razlike v preseženih donosih in volatilnostih. Interval, ki se nanaša na volatilnosti, se razpenja med $2,40\%$ in $8,54\%$. Daleč najvišjo volatilnost in najvišji preseženi donos ima portfelj z enakimi utežmi. Tako visoka volatilnost (glede na ostali dve strategiji) je posledica prej omenjenih negativnih marginalnih prispevkov tveganj. Ponovno lahko preverimo, da drži tudi zveza (8.7).

Najvišji Shrape kazalnik ima portfelj z najnižjim tveganjem, vendar je ta le za $0,8\%$ višji od Sharpe kazalnika za portfelj s pariteto tveganj. Oba portfelja v okviru Sharpe kazalnika močno dominirata portfelj z enakimi utežmi, katerega nizki Sharpe kazalnik je posledica neustrezne alokacije sredstev glede na njihova tveganja.

Ginijev koeficient, ki se nanaša na alokacijo uteži, je enak nič za portfelj z enakimi utežmi. Obratno je Ginijev koeficient, ki se nanaša na alokacijo tveganja, enak nič za portfelj s pariteto tveganj. Portfelj z najnižjim tveganjem ima oba Ginijeva koeficienta enaka. Visok Ginijev koeficient za portfelj z najnižjim tveganjem je posledica visoke koncentracije tega portfelja v enem samem razredu sredstev. Glede na oba Ginijeva koeficienta so vsi trije portfelji slabše diverzificirani kot v primeru globalnega delniškega portfelja.

Najvišji diverzifikacijski kazalnik ima portfelj s pariteto tveganj, sledita mu portfelj z najnižjim tveganjem ter portfelj z enakimi utežmi. Diverzifikacijska kazalnika za portfelj z enakimi utežmi in portfelj z najnižjim tveganjem sta nižja kot v primeru globalnega delniškega portfelja, kar je razumljivo, saj je prvi veliko slabše diverzificiran v tveganju, drugi pa v utežeh. Veliko boljši diverzifikacijki kazalnik ima portfelj s pariteto tveganj, ki je izmed vseh treh portfeljev edini, ki je ustrezno razpršen tako glede na tveganje kot glede na uteži.

9.3. Portfelj surovin

Lastnosti prvega nabora podatkov so bile homogene volatilnosti in raznolika korelacijska matrika. Vhodna podatka za drugi nabor podatkov sta bila razpršena tako v smislu volatilnosti kot v smislu korelacij. Zato bomo v tretji nabor podatkov vključili sredstva z dobro razpršenimi volatilnostmi in homogeno korelacijsko matriko.

Zadnji nabor podatkov sestavlja sedem različnih surovin. Na terminalu Bloomberg lahko najdemo tridesetih indeksov, ki sledijo uspešnosti surovin. Izbrali smo sedem tistih indeksov, katerih korelacije z ostalimi so dovolj blizu nič. V tretjem naboru podatkov so zato indeksi za:

- CC (BBG Cocoa) - kakav,
- FC (BBG FeedCttle) - krmljeno govedo za zakol,
- GC (BBG Gold) - zlato,
- GO (BBG GasOil) - plinsko olje,
- NI (BBG Nickel) - nikelj,
- OJ (BBG OrngJuic) - pomarančni sok,
- SM (BBG SoyMeal) - sojina moka.

Ponovno bomo uporabili dnevne podatke za obdobje med 1.1.1997 in 31.12.2015. Vse vrednosti so v USD.
S pomočjo že poznanih opisnih statistik bomo preverili ali izbrani nabor podatkov ustreza našim željam po raznoliki volatilnosti in podobnih korelacijah.

	μ(%)	σ_i (%)				Σ (%)			
CC	3,69	30,29	100,0	2,6	16,5	13,5	11,4	4,9	9,6
FC	2,47	14,02		100,0	- 0,6	7,3	6,3	5,8	-6,2
GC	4,93	18,26			100,0	18,9	20,9	3,8	12,7
GO	4,05	30,11				100,0	20,3	5,2	10,5
NI	9,59	36,76					100,0	7,7	13,2
OJ	0,10	31,31						100,0	6,4
SM	15,15	27,34							100,0

Tabela 10. Povzetek statistik in korelacijska matrika

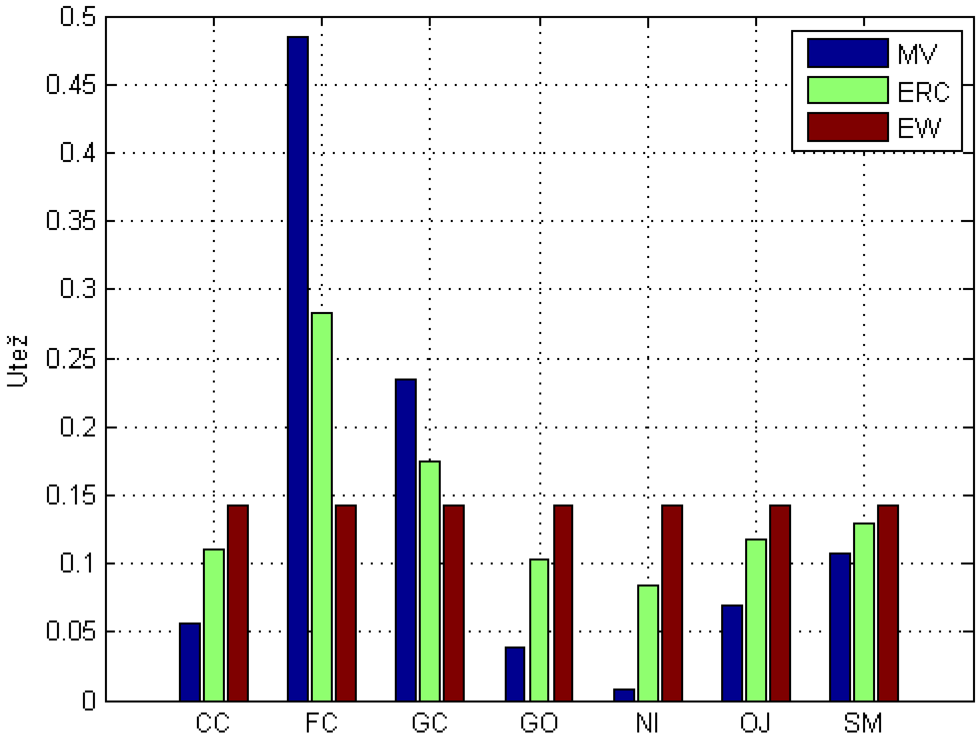
Če primerjamo opisne statistike za trenutni nabor podatkov z opisnimi statistikami ostalih dveh naborov podatkov, potem v tem primeru opazimo najmočnejšo heterogenost v volatilnosti in najbolj homogeno korelacijsko matriko.
V korelacijski matriki opazimo tri nekoliko višje korelacije. Prva je med kovinama zlato in nikelj, saj oba spadata v skupino kovin, s to razliko, da zlato spada med plemenite kovine in nikelj med industrijske kovine. Obe omenjeni kovini nakazujeta šibko povezavo s surovino plinsko olje, ki spada v energetski sektor. Vendar če upoštevamo, da sta oba sektorja kovin močno povezana z energijskim sektorjem (korelacija med njimi je okoli 90%), potem sta povišani korelaciji med omenjeno trojico surovin razumljivi.

V portfelju z enakimi utežmi največ tveganja k celotnemu tveganju portfelja prispeva surovina NI, ki je tudi najbolj volatilno sredstvo v portfelju. Najmanj tveganja

	Portfelj z enakimi utežmi			Portfelj z najnižjim tveganjem			Portfelj s pariteto tveganj		
	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$	$x_i(\%)$	$MRC_i(\%)$	$TRC_i(\%)$
CC	14,29	15,18	2,17	5,66	9,81	0,56	11,04	14,36	1,59
FC	14,29	2,96	0,42	48,49	9,81	4,76	28,23	5,62	1,59
GC	14,29	8,19	1,17	23,49	9,81	2,31	17,42	9,10	1,59
GO	14,29	16,60	2,37	3,89	9,81	0,38	10,35	15,32	1,59
NI	14,29	22,81	3,26	0,83	9,81	0,08	8,34	19,02	1,59
OJ	14,29	13,77	1,97	6,91	9,81	0,68	11,70	13,54	1,59
SM	14,29	12,41	1,77	10,72	9,81	1,05	12,92	12,27	1,59

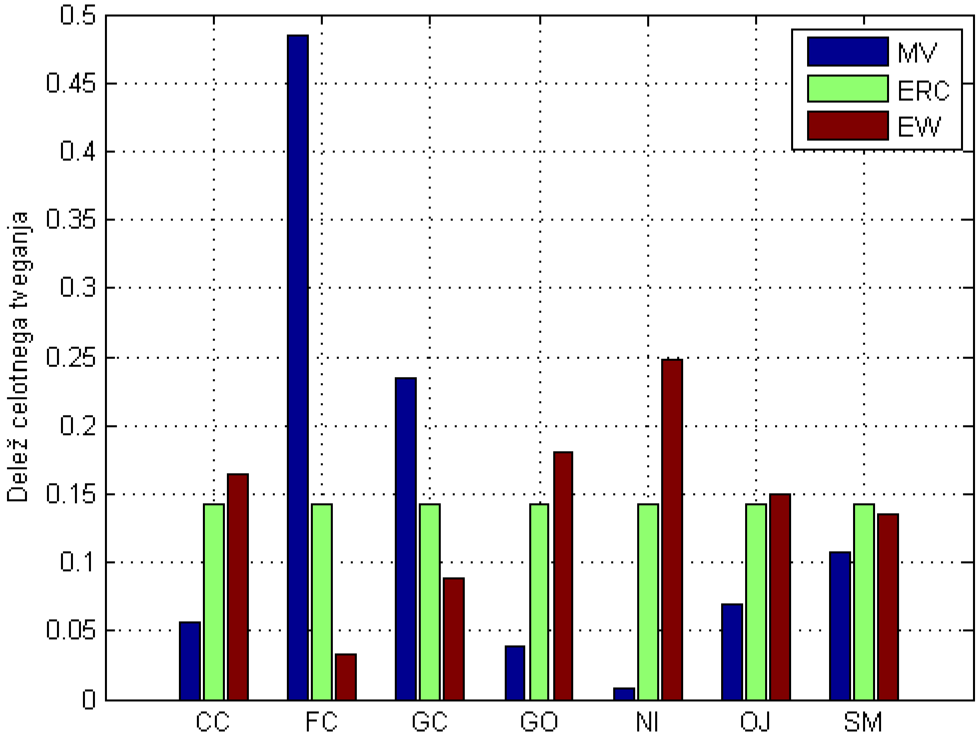
TABELA 11. Karakteristike portfeljev

prispeva najmanj volatilna surovina FC.
Surovine so prvi nabor podatkov, ki jih strategija minimalne variance v celoti vključi v portfelj. Skoraj polovico celotnega tveganja prispeva surovina FC, kar je ravno obratno kot v portfelju z enakimi utežmi. Obratno velja tudi za surovino NI, ki v portfelju z najnižjim tveganjem prispeva najmanj tveganja. Tudi za ta nabor podatkov so vsi marginalni prispevki tveganja v portfelju z najnižjim tveganjem enaki. Za vsako utež v portfelju s pariteto tveganj velja, da je vmes med utežjo za portfelj z enakimi utežmi in utežjo za portfelj z najnižjim tveganjem. Ta rezultat je še lepše viden iz grafa 5. Lahko rečemo, da portfelj s pariteto tveganj predstavlja dobro sredinsko alternativno, saj je uravnotežen v tveganju in ne preveč skoncentriran v utežeh.



GRAF 5. Uteži sredstev

Iz grafa 5 opazimo tudi, da strategija minimalne variance glede na ostali dve portfeljski strategiji pripiše posamezni surovini bodisi najvišjo bodisi najnižjo utež.



Graf 6. Alokacija tveganja

Strategija	$\hat{\mu}(\%)$	$\sigma(\%)$	$S(\%)$	$G_{x_i}(\%)$	$G_{c_i}(\%)$	$DR(\%)$
Enako uteževanje	2,11	13,13	16,04	0,00	24,61	2,05
Minimalna varianca	0,85	9,81	8,69	53,49	53,49	1,97
Pariteta tveganj	1,56	11,10	14,04	21,63	0,00	2,15

Tabela 12. Uspešnost strategij

Tudi za ta nabor podatkov opazimo precejšne razlike med strategijami v okviru preseženih donosov in volatilnosti. Kljub temu so te manjše od evropskega diverzificiranega portfelja, saj surovine (čeprav se delijo naprej v podrazrede) spadajo v isti razred sredstev. Še tretjič lahko za obravnavane volatilnosti potrdimo veljavnost zveze (8.7).
Sharpe kazalnik je za vse tri strategije za skoraj polovico nižji glede na ostala dva nabora podatkov. Največ donosa na prevzeto enoto tveganja prinese portfelj z enakimi utežmi, zelo nizek Sharpe kazalnik pa ima portfelj z najnižjim tveganjem.
Ginijeva koeficienta izkazujeta podobne rezultate kot v že videnih primerih, zato jih ne bomo dodatno komentirali.
Izmed vseh treh naborov podatkov ima ta nabor za vse tri strategije najvišji diverzifikacijski kazalnik. Torej so vsi trije portfelji res dobro diverzificirani. To lahko sklepamo že iz primerjave grafov 5 in 6 z grafi prejšnjih dveh portfeljev. Oba prikazujeta najmanj ekstremnih vrednosti. Tudi v tem primeru je najbolje diverzificiran portfelj s pariteto tveganj, vendar ostala dva portfelja nista veliko slabša.

10. Zaključek

Skozi magistrsko delo smo opisali različne pristope k alokaciji sredstev in se pri tem osredotočili zgolj na strategije, ki ne zahtevajo ocenjevanja pričakovanih donosov. Od bolj poznanih metod za oblikovanje portfeljev smo predstavili strategijo minimalne variance in strategijo enakega uteževanja. Več pozornosti smo namenili manj poznani strategiji paritete tveganj, katera je vedno bolj priljubljena med investitorji. Ker uveljavitev »1/n« pravila v smislu tveganj ni tako preprosta kot v smislu uteži, smo predstavili dva numerična algoritma, ki učinkovito določita uteži za portfelj s pariteto tveganj.

Teoretične ugotovitve smo preverili na treh različnih naborih naložb. Vsi primeri so potrdili teoretične lastnosti portfelja s pariteto tveganj, iz grafov pa smo razbrali, da ima portfelj s pariteto tveganj daleč najbolj enakomerno porazdelitve prispevkov tveganja. Uspešnost portfelja s pariteto tveganj je visoka, a v vseh primerih ni najboljša. Zato se strinjamo z mislijo iz uvoda, da je izbira portfeljske strategije pogojena z izbiro naložb. V nobenem od treh primerov portfelj s pariteto tveganj ne izkazuje slabih rezultatov, a vendar v nobenem primeru ni za nobeno mero uspešnosti (če odmislimo Ginijev koeficient za alokacijo tveganja) konsistentno boljši od ostalih dveh strategij. V prid tem rezultatom naj opomnimo, da empirična analiza ni vključevala portfelja s pariteto tveganj, ki ga lahko zgradimo s pomočjo vzvoda. Z uporabo vzvoda na celotnem portfelju bi lažje dosegli primeren donos, strategija paritete tveganj pa bi s tem mogoče izpadla v še boljši luči.

Glede na naše rezultate lahko zaključimo, da privlačnost strategije paritete tveganj leži predvsem v njenem močnem apeliranju na našo intuicijo, da je diverzifikacija tveganja glavni cilj pri oblikovanju portfelja. Izenačitev prispevkov tveganja se sliši kot dober način za doseg tega cilja, dodatno privlačnost pa doda dejstvo, da končni portfelj ni odvisen od stvari, v katero imajo investitorji najmanj zaupanja, to je ocenjevanje pričakovanih donosov.

Literatura

[1] Z. Bodie, A. Kane, A. J. Marcus, *Investments*, McGraw-Hill International, 8. izdaja, 2009, 23-53 in 823-834.

[2] K.C. Border, *Euler's Theorem for Homogeneous Functions*, Caltech, verzija oktober 2000, [ogled 18. 6. 2016], dostpono na `http://people.hss.caltech.edu/~kcb/Notes/EulerHomogeneity.pdf`.

[3] B. Bruder, T. Roncalli, *Managing Risk Exposures using the Risk Budgeting Approach*, verzija marec 2012, [ogled 13. 2. 2016], dostopno na `http://www.thierry-roncalli.com/download/risk-budgeting.pdf`.

[4] D. Chaves, J. Hsu, F. Li, O. Shakernia, *Risk Parity Portfolio vs. Other Asset Allocation Heuristic Portfolios*, The Journal of Investing, verzija pomlad 2011, [ogled 21. 2. 2016], dostopno na `http://www.jasonhsu.org/uploads/1/0/0/7/10075125/risk_parity_portfolio_vs_other_asset_allocation_heuristic_portfolios.pdf`, 108-118.

[5] D. Chaves, J. Hsu, F. Li, O. Shakernia, *Efficient Algorithms for Computing Risk Parity Portfolio Weights*, The Journal of Investing, verzija jesen 2012, [ogled 11. 3. 2016], dostopno na `www.iinews.com/site/pdfs/joi_fall_2012_ra1.pdf`, 150-163.

[6] Y. Choueifaty, Y. Coignard, *Toward Maximum Diversification*, The Journal of Portfolio Management, verzija jesen 2008, [ogled 4. 5. 2016], dostopno na `http://tobam.site-preprod.net/wp-content/uploads/2014/12/TOBAM-JoPM-Maximum-Div-2008.pdf`, 40-51.

[7] V. DeMiguel, L. Garlappi, R. Uppal *Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?*, The Rewiew of Financial Studies, verzija 2007, [ogled 3. 3. 2016], dostopno na `http://faculty.london.edu/avmiguel/DeMiguel-Garlappi-Uppal-RFS.pdf`, 1915-1953 .

[8] Frank J. Fabozzi, Pamela Peterson Drake, *The Basics of Finance: An Introduction to Financial Markets, Business Finance, and Portfolio Management*, John Wiley & Sons, 2010, 13-33 in 389-412.

[9] F. J. Fabozzi, E. H. Neave, G. Zhou, *Financial Economics*, John Wiley & Sons, 2012, 257-270 in 247-251.

[10] Frank J. Fabozzi, Dessislava A. Pachamanova, *Simulation and Optimization in Finance: Modeling with MATLAB, @RISK, or VBA*, John Wiley & Sons, 2010, 15-18 in 245-256.

[11] Frank J. Fabozzi, Pamela P. Peterson, *Financial Management and Analysis*, John Wiley & Sons, 2. izdaja, 2003, 27-33.

[12] T. Griveau-Billion, Jean C. Richard, T. Roncalli, *A Fast Algorithm for Computing High-Dimensional Risk Parity Portfolios*, verzija september 2013, [ogled 11. 3. 2016], dostopno na `http://arxiv.org/pdf/1311.4057.pdf`.

[13] A. Kempf, C. Memmel, *On the estimation of the global minimum variance portfolio*, CFR Working paper, No. 05-02., 2005, [ogled 21. 2. 2016], dostopno na `http://econstor.eu/bitstream/10419/57730/1/699904641.pdf`.

[14] S. Maillard, T. Roncalli, J. Teiletche, *On the properties of equally-weighted risk contributions portfolio*, verzija maj 2009, [ogled 8. 2. 2016], dostopno na `http://thierry-roncalli.com/download/erc.pdf`.

[15] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Programming*, Volume I: Basic course, verzija julij 1998, [ogled 11. 3. 2016], dostopno na `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.693.855&rep=rep1&type=pdf`, 157-173.

[16] B. Peng, L. Wang, *An Iterative Coordinate Descent Algoritm for High - Dimensional Nonconvex Penalized Quantile Regression*, Journal of Computational and Graphical Statistics, verzija 2014, [ogled 14. 5. 2016], dostopno na `http://users.stat.umn.edu/~wangx346/research/QICD.pdf`, 14-15 .

[17] A. Salomons *The Black-Litterman model Hype or Improvement?*, University of Groningen, MS Thesis, 2007, [ogled 16. 3. 2016], dostopno na `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=E58948770FCFD3A0E22B1F1304298949?doi=10.1.1.318.2166&rep=rep1&type=pdf`, 13-34.

[18] F. Spinu, *An algorithm for computing risk parity weights*, verzija julij 2013, SSRN, [ogled 11. 3. 2016], dostopno na `http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2297383`.

[19] P. Tseng, *Convergence of a Block Coordinate Descent Method for Nondifferentiable Minimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, verzija junij 2001, [ogled 11. 3. 2016], dostopno na `http://www.mit.edu/~dimitrib/PTseng/papers/archive/bcr_jota.pdf`, 475-494.

[20] E. Qian, *Risk Parity Portfolios: Efficient Portfolios Through True Diversification*, PanAgora, verzija september 2005, [ogled 27. 2. 2016], dostopno na `https://www.panagora.com/assets/PanAgora-Risk-Parity-Portfolios-Efficient-Portfolios-Through-True-Diversification.pdf`.

[21] E. Qian, *Risk Parity Portfolios: The Next Generation*, PanAgora, verzija november 2009, [ogled 27. 2. 2016], dostopno na `https://www.panagora.com/assets/PanAgora-Risk-Parity-The-Next-Generation.pdf`.

[22] E. Qian, *Risk Parity and Diversification*, The Journal of Investing, verzija spomlad 2011, [ogled 27. 2. 2016], dostopno na `http://dailyalts.com/wp-content/uploads/2014/06/Risk-Parity-and-Diversification.pdf`.