

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO
Finančna matematika - 2. stopnja

Zala Herga

Arbitraža na omrežjih

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir
Somentor: doc. dr. Primož Škraba

Ljubljana, 2015

Podpisana Zala Herga izjavljam, da:

- sem magistrsko delo z naslovom *Arbitraža na omrežjih* izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Tomaža Koširja in doc. dr. Primoža Škrabe in
- Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, marec 2015

Podpis:

Zahvala

Hvala prof. Koširju za nasvete in temeljite preglede naloge ter Primožu za vse potrpežljive razlage in spodbudne besede.

Hvala staršem za neskončna vprašanja o napredku moje magistrske naloge, ki so bila potrebna spodbuda za začetek in vztrajanje pri pisanju dela.

Zahvala gre tudi kolegom s fakultete - Nini, Ani, Zali in ostalim, zaradi katerih sem se z veseljem udeleževala predavanj in se z njimi skupaj prebila tudi skozi težje trenutke tega študija.

Hvaležna sem Primožu in Živi, ki sta mi kljub kakšnemu požrtemu živcu celo obdobje šolanja dajala dober zgled.

Navsezadnje pa hvala Janu, Heleni, Luki, Katarinam, Jaki in Petru - preprosto zato, ker so dobra družba in mi dajejo energijo za sprejemanje novih izzivov.

Kazalo

Povzetek	xi
Abstract	xii
1 Uvod	1
2 Valutni trg	3
2.1 Učinkovitost trga, zakon ene cene in arbitraža	4
2.2 Arbitraža na valutnem trgu	8
2.3 Povezano delo	9
3 Osnovne lastnosti vrst	11
3.1 Opis podatkov	11
3.2 Lastnosti vrst	12
3.2.1 Priprava podatkov	12
3.2.2 Korelacija	13
3.2.3 Kointegracija	20
4 Iskanje arbitraže	29
4.1 Teorija grafov	29
4.1.1 Baza ciklov	35
4.2 Implementacija	38
4.2.1 Algoritem	40
4.2.2 Rezultati	44
5 Zaključek	49
Literatura	51
A Dodatni grafični prikaz rezultatov	54

Slike

2.1	Primer objave menjalnih tečajev (vzeto s strani www.investing.com/quotes/single-currency-crosses , dne 24.10.2014)	5
3.1	Grafi korelacijskih matrik za različna časovna obdobja	17
3.2	Primerjava korelacij valutnih parov na dnevnih intervalih - november 2012	18
3.3	Primerjava korelacij valutnih parov na desetminutnih intervalih - 12. november	19
3.4	Vrednosti slučajnih spremenljivk M in N	26
3.5	Ostanki $M - \beta \cdot N$	27
3.6	Vizualizacija kointegracijske matrike za drugo polletje 2012 in primer kointegriranih vrst	28
4.1	Zgoraj levo: Graf, ki ponazarja možne transakcije med valutami. Zgoraj desno: vpeto drevo, uporabljeno v prvem koraku implementacije algoritma, s korenem v USD . M_{full} : matrika sosednosti za celi graf. M_{tree} : matrika sosednosti za vpeto drevo s korenem v USD	41
4.2	Rezultati iskanja arbitraže na grafu s šestimi vozlišči	46
4.3	Pojavitev arbitraže na trikotniku USD, CAD, CHF	47
4.4	Gibanje cen v času pojavitve arbitraže	48
A.1	Korelacija valutnih parov. Različne barve predstavljajo različne gruče, debelina povezave pa je linearno odvisna od moči korelacije.	55
A.2	Korelacije menjalnih tečajev, gledane na dvominutnih intervalih	56
A.3	Korelacije menjalnih tečajev, gledane na tedenskih intervalih	57
A.4	Korelacije menjalnih tečajev, gledane na enournih intervalih	58
A.5	Grafi kointegriranih vrst	59
A.6	Histogram pojavitev arbitraže; prikazane so samo vrednosti večje od 0.005	60
A.7	Graf pojavitve arbitraže na trikotniku $EUR-USD-HUF$ v januarju 2012	61

A.8	Graf pojavitve arbitraže na trikotnikih $USD-CAD-CHF$ in $USD-CAD-AUD$ v januarju 2012. Arbitraža $USD-CAD-CHF$ je označena z rdeče-črno kombinacijo, $USD-CAD-AUD$ pa z zeleno-sivo. V nekaterih primerih sta se pojavljali sočasno.	62
-----	---	----

Tabele

2.1	Kratice in njihov pomen za nekaj najpogostejših svetovnih valut . . .	3
3.1	Vzorec podatkov za par AUD/CAD	11
3.2	Na levi: primer matrike po združevanju podatkov. Na desni: primer matrike po interpolaciji.	13
4.1	Rezultati iskanja arbitraže za prvi teden januarja 2011, za valutne pare $AUD/CAD, AUD/USD, USD/CAD$	40
4.2	Povzeti rezultati iskanja arbitraže - v drugem stolpcu je izračunan delež arbitraže za določeno trojico valut po številu pojavitev, v tretjem stolpcu pa delež arbitraže glede na skupno vsoto vseh arbitraž, ki so se pojavile v enem letu. V zadnjem je prikazana najvišja vrednost arbitraže na tem trikotniku.	44
4.3	Količina trgovanja s posameznimi valutami podana v padajočem vrstnem redu. Količina trgovanja temelji na količini podatkov dveh let (merjena v GB) valutnega para. Frekvenca trgovanja je zgolj ocena, ki izhaja iz povprečne dnevne količine trgovanja.	45

Program dela

V delu obravnavajte arbitražne priložnosti na deviznem trgu. Za iskanje takih priložnosti uporabite metode teorije grafov.

Ljubljana, 30.7.2014

mentor: prof. dr. Tomaž Košir

somentor: doc. dr. Primož Škraba

Povzetek

V teoriji in praksi se pogosto uporablja predpostavka, da na likvidnem, učinkovitem trgu ne obstaja arbitraža. Valutni trg je kot največji in najbolj aktivni mednarodni trg verjetno najboljši približek učinkovitega trga. Matematično ga lahko opišemo kot omrežje, kjer valute predstavljajo vozlišča, menjalni tečaji pa povezave med njimi.

V magistrski nalogi sem trgovalne podatke valutnih tečajev preslikala na tako omrežje, najprej analizirala njihovo obnašanje kot časovne vrste in nato preverila obstoj arbitraže. V ta namen sem v programu R sestavila učinkovit algoritem, ki je podprt s teorijo grafov in analizo na grafih.

Z uporabljenim algoritmom sem dokazala obstoj arbitraže, rezultate analizirala in grafično prikazala.

Math. Subj. Class. (2010): 68R10, 91G99, 05C85.

Ključne besede: arbitraža, omrežja, valutni trg, valutni tečaj, časovne vrste, ko-integracija, analiza na grafih.

Abstract

A no-arbitrage assumption for markets is common both in theory and practice. The assumption serves to ensure liquid and efficient markets. As the one of the largest and the most active markets, the foreign exchange market (FOREX) is probably the closest real world approximation to an efficient market. Mathematically, we describe the market as a directed network in which currencies are represented as vertices and the exchange rates as weighted arcs.

In this master's thesis, we first analyze the time series arising from currency pairs. Then we map historical FOREX trading data to a time varying network, which we then search for arbitrage. To this end, we propose an efficient algorithm based on graph theory and calculus on graphs and give an implementation in R.

Using our algorithm, we show the existence of arbitrage in trading data. The results are analyzed and presented graphically.

Math. Subj. Class. (2010): 68R10, 91G99, 05C85.

Keywords: arbitrage, networks, forex, exchange rates, time series, cointegration, calculus on graphs.

Poglavje 1

Uvod

V teoriji in praksi se pogosto uporablja hipoteza, da so likvidni trgi učinkoviti in da se na njih ne da priti do “zastonj kosila” - netveganega dobička. To je intuitivno smiselno za trge, ki so v ravnovesju. Kaj pa, kadar na trg pridejo pomembne novice ali pa ga doletijo drugačni pretresi? Takrat cene zagotovo zanihajo, vendar ne nujno do te mere, da bi se na trgu pojavila arbitraža. Sploh v današnjem času, ko večina trgovanja poteka računalniško, bi pričakovali, da do arbitraž ne pride oz. arbitraže zelo hitro izginejo.

Valutni trg je po skoraj vseh merilih največji in najbolj likviden mednarodni trg, s povprečnim dnevnim prometom okoli 5,3 triljonov ameriških dolarjev. Zato bi, če kje, na tem trgu pričakovali, da je ta trg učinkovit in se na njem ne pojavlja arbitraža, saj veliko število udeležencev na trgu ohranja in, kadar se poruši, tudi hitro vzpostavlja ravnovesje na trgu. Čeprav je ta trg največji, pa vseeno obstajajo razlike v trgovanju med najpomembnejšimi valutnimi pari in tistimi, ki nimajo resnega vpliva v svetovnem merilu. Za trg, ki ga določa valutni par evro-dolar, bi pričakovali, da je izjemno likviden, ne bi pa si upali istega trditi za par evro-forint, ki ima približno sedemkrat manjšo frekvenco trgovanja.

Moja hipoteza v tej magistrski nalogi je, da arbitraže na finančnih trgih večino časa ni, vendar pa se ob določenih trenutkih vendarle pojavi. To hipotezo bom preverila na valutnem trgu. Valutni trg lahko opišemo kot omrežje, v katerem so valute predstavljene z vozlišči, menjalni tečaji pa kot uteži na povezavah med njimi. Hipotezo bom preverjala na trgovalnih podatkih dveh let, ki obsegajo dvanajst valutnih parov. Teh dvanajst parov poskuša zavzeti reprezentativen vzorec – v njem so valutni pari z večjo in manjšo frekvenco trgovanja, valute, ki so med seboj pozitivno ali negativno korelirane ali pa sploh nekorelirane. Moj cilj je sestaviti učinkovit algoritem, delujoč na omrežju in podprt s teorijo grafov in analizo na grafih, ki bo zmož obdelati tako količino podatkov.

Če bo hipoteza potrjena, bom opisala kako pogosto in v kolikšni meri se arbitražna pojavlja, ter poskusila odkriti razloge za pojavljanje.

V nalogi bom najprej opisala valutni trg, njegove lastnosti, vpeljala nekaj splošnih definicij povezanih z ekonomskimi trgi in predstavila raziskovalna dela, ki so se že ukvarjala s podobno tematiko. V naslednjem poglavju bom opisala pripravo in analizo podatkov, ki sem jih uporabila. Predstavila bom rezultate, ki sem jih dobila pri analizi korelacije in kointegracije vrst. Sledila bo matematična teorija, prikazana na preprostih primerih, ki je osnova za implementirani algoritem, in na koncu še predstavitev rezultatov.

Poglavje 2

Valutni trg

Kadar hoče neko podjetje iz države A kupiti produkte podjetja iz države B , mora to narediti z valuto, ki jo v državi B uporabljajo. To pomeni, da mora najprej z valuto države A kupiti valuto države B . V namen trgovanja s svetovnimi valutami se je razvil *valutni trg* (imenovan tudi *devizni trg* ali *FOREX trg*, angl. *FOREX market*, kar izhaja iz *Foreign Exchange market*).

Valutni trg je danes največji trg na svetu po skoraj vseh merilih. Odprt je vse dni v letu, 24 ur na dan. Po ocenah BIS [7] je trgovanje na valutnem trgu aprila 2013 v povprečju na dan zneslo 5.3 bilijonov ameriških dolarjev (v nadaljevanju *USD*). Aprila 2010 je bilo to število 4.0 bilijonov USD in aprila 2007 3,3 bilijona USD. Največ se je trgovalo s pogodbami valutnih zamenjav (povprečno 2.2 bilijona USD dnevno), sledila je takojšnja trgovina z valutnimi tečaji (2 bilijona USD).

Glavna valuta je (ostal) ameriški dolar, pojavlja se v kar 87% trgovanj. Na drugem mestu po pogostosti je evro s 33% deležem, sledita japonski yen (23%) in britanski funt (11.8%). Večina trgovanja (71% aprila 2013, 66% aprila 2010) se zgodi v štirih največjih finančnih centrih - v ZDA, VB, Singapurju in na Japonskem. V tabeli 2.1 je predstavljenih nekaj kratic in njihov pomen za najpogostejše svetovne valute.

AUD	avstralski dolar	GBP	britanski funt
BRL	brazilski real	HUF	madžarski forint
CAD	kanadski dolar	INR	indijska rupija
CHF	švicarski frank	JPY	japonski jen
CNY	kitajski juan	TRY	turška lira
EUR	evro	USD	ameriški dolar

Tabela 2.1: Kratice in njihov pomen za nekaj najpogostejših svetovnih valut

Tečaj valutnega para je podan v obliki

$$EUR/USD = 1.2165,$$

kjer je *EUR* osnovna valuta (angl. *base currency*), *USD* pa citirana valuta (angl. *quote currency*). Ta zapis pomeni, da lahko za 1 EUR kupimo 1.2165 USD. Glede na zapis tečaja valutnega para ločimo *neposredni* in *posredni* menjalni tečaj. Neposredni menjalni tečaj je tisti, kjer je domača valuta osnovna valuta, pri posrednem pa je domača valuta citirana. Ker je slovenska valuta evro, je za nas zgornji tečaj primer neposrednega. Kadar valutni par ne vsebuje ameriškega dolarja mu pravimo *medvalutni par* (angl. *cross currency*) - npr. *EUR/GBP*, *EUR/JPY*,...

Tako kot na večini ostalih finančnih trgov obstajata tudi za valutne pare dve različni ceni - *prodajna* in *nakupna* (angl. *bid* in *ask*). Ti dve ceni se nanašata na osnovno valuto. Pogost zapis teh cen je naslednji:

$$EUR/USD = 1.2165/70,$$

kjer sta števki za poševnico zadnji dve decimalki nakupne cene. Kadar *kupujemo valutni par*, pomeni, da bomo morali plačati nakupno ceno citirane valute v zameno za enoto osnovne valute oz. v zgornjem primeru plačati 1.2170 USD za 1 EUR. Obratno, kadar *prodajamo valutni par*, pomeni, da bomo prejeli prodajno ceno citirane valute za eno enoto osnovne valute oz. 1.2165 USD za 1 EUR. Transakcije se vedno opravljajo glede na osnovno valuto - glede na to kupujemo ali prodajamo valutni par. Nakupna cena je vedno višja od prodajne. Razliki med obema cenama pravimo *cenovni razpon* (angl. *spread*). Primer objave menjalnih tečajev lahko vidimo na sliki 2.1.

Menjalni tečaji so običajno zaokroženi na 4 decimalna mesta natančno. Najmanjši spremembi menjalnega tečaja se reče *pip*, kar je ponavadi stotina od 1% oz. 1 *bazična točka*. Na ceno določene valute vpliva veliko dejavnikov - inflacija, razlike v obrestih merah, javni dolg, pogoji za poslovanje, politična stabilnost, gospodarske napovedi, ...

2.1 Učinkovitost trga, zakon ene cene in arbitraža

V finančni literaturi se pogosto uporablja predpostavka o učinkovitosti trga. Učinkovit trg bi lahko opisali kot trg, kjer je tržna cena nepristranska ocena prave cene investicije. Začetki hipoteze o učinkovitosti trga segajo v začetek 20. stoletja, hipoteza pa trdi, da so finančni trgi informacijsko učinkoviti. Eugene Fama (1970) je učinkovit trg opisal kot "trg, na katerem cene vedno 'popolnoma odražajo' dostopne informacije." [1] Kasneje je Malkiel (1992) podal bolj natančno definicijo:

Pair ↕	Bid	Ask	Open	High	Low	Chg. ↕	Chg. % ↕	Time ↕
↕ EUR/USD	1.2651	1.2653	1.2647	1.2665	1.2635	+0.0005	+0.04%	11:14:44
↕ GBP/USD	1.6038	1.6041	1.6031	1.6072	1.6018	+0.0009	+0.05%	11:14:44
↕ USD/JPY	108.15	108.16	108.27	108.31	107.86	-0.12	-0.11%	11:14:36
↕ USD/CHF	0.9531	0.9534	0.9540	0.9546	0.9526	-0.0008	-0.08%	11:14:43
↕ AUD/USD	0.8778	0.8780	0.8760	0.8784	0.8720	+0.0019	+0.22%	11:14:44
↕ USD/CAD	1.1213	1.1215	1.1232	1.1235	1.1211	-0.0018	-0.16%	11:14:19

Slika 2.1: Primer objave menjalnih tečajev (vzeto s strani www.investing.com/quotes/single-currency-crosses, dne 24.10.2014)

Definicija 1. [2] *Finančni trg je učinkovit, če popolnoma in pravilno odraža vse relevantne informacije v določanju cen vrednostnih papirjev. Formalno, trg je učinkovit glede na neko množico informacij Θ_t , če bi ostale cene vrednostnih papirjev nespremenjene ob razkritju teh informacij vsem udeležencem na trgu. Še več, učinkovitost glede na množico informacij Θ_t pomeni, da je nemogoče narediti ekonomski dobiček s trgovanjem na podlagi Θ_t .*

Glede na množico informacij Θ_t poznamo tri oblike učinkovitosti trga. [3]

1. Šibka učinkovitost trga: cene vrednostnih papirjev popolnoma odražajo vse informacije preteklih cen. Prihodnjih cen ne moremo napovedati na podlagi preteklih cen.
2. Pol učinkovitost trga: cene vrednostnih papirjev popolnoma odražajo vse javno dostopne informacije. Udeleženci z notranjimi informacijami lahko izkoristijo tak trg.
3. Kreпка učinkovitost trga: cene vrednostnih papirjev popolnoma odražajo vse javno dostopne in notranje informacije. Tudi udeleženci z notranjimi informacijami ne morejo premagati trga.

Če je trg učinkovit, nobena skupina investorjev ne bo konsistentno premagovala trga. Vendar pa to ne pomeni, da nobena skupina udeležencev ne more dlje časa premagovati trga. Pomeni le, da ti udeleženci niso uspešni zaradi svojih strategij, ampak imajo le srečo. V resnici bi morala približno polovica udeležencev učinkovitega trga ves čas premagovati trg. Ker je tržna cena le nepristranska ocena prave cene, sta dejansko lahko ti ceni precej različni - le odklon mora biti naključen. Dogodek, da udeleženec učinkovitega trga najde podcenjen vrednostni papir, je naključen.

Posledica učinkovitega trga je *Zakon ene cene*. Ta pravi, da ena dobrina ne more imeti istočasno dveh različnih tržnih cen.

Definicija 2. *Za trg rečemo, da na njem velja Zakon ene cene, če za poljubljia portfelja Ψ in Φ , iz $V_t(\Psi) = V_t(\Phi)$, za $t > 0$, sledi $V_0(\Psi) = V_0(\Phi)$, kjer je $V_t(X)$ vrednost portfelja X v času t .*

Zakon izhaja iz ideje, da vse razlike v ceni iste dobrine takoj izravnaajo udeleženci trga, ki izkoristijo arbitražo.

Arbitražo v literaturi pogosto opisujejo kot netvegan, takojšnji dobiček. V osnovi je to koncept, da ne moremo ustvariti dobička iz ničesar. Predpostavko, da na trgu ni arbitraže (angl. “*No-arbitrage assumption*”), se pogosto označuje tudi s frazo “Ni zastonj kosila” (angl. “*No free lunch*”). Zakon ene cene je posledica pogoja, da na trgu ni arbitraže. Hull definira arbitražno trgovanje kot “zagotoviti si netvegan dobiček z istočasnim vstopom v dva ali več trgov.” [4] Poleg odklona od zakona o eni ceni, se arbitraža pojavi tudi kadar dve sredstvi z enakimi denarnimi tokovi nimata enake cene in kadar vrednost sredstva, ki ima znano ceno v prihodnosti, ni enaka tej ceni, diskontirani z netvegano obrestno mero.

Definicija 3. [6] *Portfelju pravimo arbitražni portfelj, če ima danes nepozitivno vrednost in je verjetnost, da bo imel v prihodnosti negativno vrednost, ničelna; verjetnost, da bo imel pozitivno vrednost, pa neničelna.*

Definicija 4. *Arbitražna strategija je proces izkoriščanja razlik v ceni sredstva, ki ga arbitražer simultano kupi in proda z namenom, da ustvari netvegan dobiček.*

Zgled 5. *Pariteta obrestnih mer.* [5]

Pariteta obrestnih mer opisuje razmerje med takojšnjimi menjalnimi tečaji in menjalnimi tečaji terminskih pogodb. Kadar to razmerje ne velja, lahko arbitražerji izvedejo svoje netvegane strategije, ki vodijo do zagotovljenega dobička. Posledično njihovo trgovanje vzpostavi pravo ravnovesje med cenami terminskih pogodb in menjalnimi tečaji.

Pariteto obrestnih mer lahko opišemo z uporabo dveh valut, v tem primeru USD in EUR. Naj bo E_0 trenutni menjalni tečaj med valutama, kar pomeni, da potrebujemo E_0 USD za nakup enega evra. F_0 je dogovorjena prihodnja cena - cena za nakup enega evra v času T . Netvegani nominalni obrestni meri v ZDA in Evropski uniji označimo z r_{US} in r_{EU} . Pariteta obrestnih mer označuje primerno razmerje med E_0 in F_0 :

$$F_0 = E_0 \left(\frac{1 + r_{US}}{1 + r_{EU}} \right)^T.$$

Naj bo $F_0 = 1.97\$/\text{€}$, $r_{US} = 0.04$, $r_{EU} = 0.05$ in $E_0 = 2\$/\text{€}$. Ker je

$$1.97 < 2 \left(\frac{1.04}{1.05} \right)$$

na trgu očitno obstaja arbitraža. Naj E_1 označuje vrednost menjalnega tečaja čez eno leto (ki je iz perspektive investitorja slučajna spremenljivka). Možna arbitražna strategija je naslednja:

$V t = 0$:	izposodi si 1€ po 5% obrestni meri za 1 leto kupi 2\$ in jih posodi na ameriškem trgu vstopi v terminsko pogodbo pri $F_0 = 1.97\$/\text{€}$
$V t = 1$:	odplačaj $E_1 \cdot 1.05\text{€}$ zberi investiran denar: 2.08\$ kupi evre: $1.05\text{€}(E_1 - 1.97\$/\text{€})$
Skupaj	0.0115\$

2.2 Arbitraža na valutnem trgu

Na valutnem trgu se pojavljata dve vrsti arbitraže. Prva, trivialna oblika arbitraže, se lahko pojavi, če pride do negativnega cenovnega razpona med nakupno in prodajno ceno. Čeprav se v literaturi ponavadi uporablja predpostavka, da taka situacija ne obstaja, so v [9] pokazali, da do takega negativnega cenovega razpona včasih vendarle pride. Ena možnost za to je preprosto napaka banke, vendar je to zelo malo verjetno. Drugi razlog za negativni cenovni razpon je lahko ta, da včasih na trgovanih platformah zaradi intenzivnega trgovanja pride do časovnega zamika in je trenutna nakupna/prodajna cena nekaj bazičnih točk za najboljšo ponudbo. Zadnji razlog za negativni cenovni razpon pa je povezan z vstopom novih bank na trg, ki negativni razpon med cenama uporabljajo za privabljanje strank. To je bolj podrobno razloženo v [9].

Druga vrsta arbitraže je pa ta, ki se ji bom posvetila v svoji nalogi – *trikotna arbitraža*. Ta nastane, kadar pride do neenakosti med neposrednim menjalnim tečajem dveh valut in tečajem, ki se ga izračuna preko tretjega, medvalutnega tečaja. Bolj nazorno je trikotna arbitraža razložena v naslednjem zgledu.

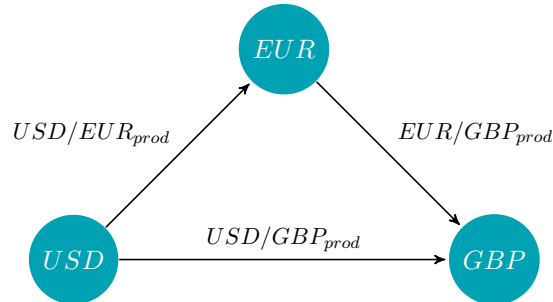
Zgled 6. Dane imamo naslednje menjalne tečaje:

$$USD/GBP = 0.50/0.51$$

$$EUR/USD = 1.30/1.35$$

$$EUR/GBP = 0.70/0.75,$$

kjer prvo število v vsakem tečaju predstavlja prodajno ceno, drugo pa nakupno. Recimo, da bi imamo trenutno svoj inventar v ameriških dolarjih in bi radi kupili britanske funte. Imamo dve možnosti: z dolarji lahko neposredno kupimo funte, ali pa najprej z dolarji kupimo evre in z evri kupimo funte.



Glede na zgornje podatke, lahko funte kupimo z dolarji po tečaju $USD/GBP = 0.5$ oz. en dolar lahko prodamo za 0.5 GBP.

Če kupujemo funte preko evrov:

$$\begin{aligned}
 USD/EUR_{prod} \cdot EUR/GBP_{prod} &= \frac{1}{EUR/USD_{nak}} \cdot EUR/GBP_{prod} \\
 &= \frac{1}{1.35} \cdot 0.70 \\
 &= 0.5186,
 \end{aligned}$$

pa lahko en dolar prodamo za 0.5186 funta. Očitno je nakup funtov preko evrov bolj ugoden kakor neposredni nakup z dolarji. Vendar to še ne pomeni, da je na trgu arbitraža - to je odvisno tudi od prodajne cene GBP/USD . Ta je enaka $\frac{1}{0.51}$. Ker je

$$\frac{0.5186}{0.51} = 1.0169 > 1,$$

to pomeni, da je na trgu arbitraža in lahko z enim investiranim dolarjem s kupovanjem valut zaslužimo 0.0169 USD.

Spremenimo nekoliko naše začetne podatke:

$$EUR/USD = 1.30/1.40.$$

V tem primeru je

$$\begin{aligned}
 USD/EUR_{prod} \cdot EUR/GBP_{prod} &= \frac{1}{1.40} \cdot 0.70 = \\
 &= 0.5 \\
 &= USD/GBP_{prod}
 \end{aligned}$$

in na trgu ni arbitraže.

2.3 Povezano delo

Marshall, Treepongkaruna in Young [8] v svojem članku raziskujejo obstoj trikotne arbitraže na valutnem trgu. Njen obstoj so dokazali za vseh 24 ur trgovalnega dneva. Število arbitražnih priložnosti je pozitivno odvisno od frekvence trgovanja, na frekvenco pa vplivajo trgovalne ure ustanov pomembnejših valut. Velikost arbitražnih priložnosti je odvisna od časa, ko se zgodi, in se zmanjšuje glede na frekvenco trgovanja in povečuje glede na velikost razpona med nakupno in prodajno ceno.

Podobno, Ito, Yamada, Takayusu in Takayusu [9] v svoji raziskavi ugotavljajo, da nasprotno kot trdijo teoretične napovedi arbitražne priložnosti na valutnem trgu obstajajo, vendar izginejo v roku nekaj sekund. Glede na opazovano množico podatkov dvanajstih let, se je frekvenca arbitražnih priložnosti zmanjšala in verjetnost njenega izginotja v roku ene sekunde se je povečala. Število transakcij se v sekundi po pojavitvi arbitražne priložnosti poveča, kar nakazuje, da te priložnosti sprožajo trgovanja, ki jih želijo izkoristiti.

Kozhan in Tham [10] se v svoji raziskavi ne ukvarjata neposredno z obstojem arbitraže, ampak raziskujeta, ali je “netvegana” arbitraža res netvegana. V svojem članku predstavita tveganje izvedbe pri izkoriščanju arbitraže (“execution risk in arbitrage exploitation”) na valutnem trgu, ki se pojavi zaradi negotovosti pri trgovanju z arbitražnim portfeljem. Ta nastane zaradi množice udeležencev trga (arbitražerjev), ki želijo izkoristiti omejeno količino zaloge potrebnega sredstva. Tveganje izvedbe je odvisno od stopnje tekmovalnosti med arbitražerji, stroškov nelikvidnosti trga in stroškov inventarja. Avtorja sta pokazala, da ne izginejo vse arbitražne priložnosti takoj iz trga - take sta poimenovala “tvegane arbitraže”. S pomočjo simulacij sta pokazala, da lahko pridejo arbitražerji do izgube, če jih več tekmuje v isti arbitražni priložnosti in da se te izgube večajo s številom udeležencev. Potrdila sta tudi, da bolj kot je trg likviden, manjši so odmiki od vrednosti, ki jih določa zakon ene cene.

Poglavje 3

Osnovne lastnosti vrst

3.1 Opis podatkov

Nabor podatkov, ki sem ga uporabila v tej magistrski nalogi, obsega 66 valutnih parov. Za vsakega od njih imamo podatek o trenutni (po lokalnem in UTC¹ času) nakupni in prodajni ceni. Nova vrstica v podatkih je zapisana, kadar pride do spremembe cene menjalnega tečaja. Vse vrste se začnejo z januarjem 2011 in končajo decembra 2012. Podatki niso združeni - vsak teden vsakega valutnega para je shranjen v svoji datoteki. Podatki so obsežni, npr. za valutni par *EUR/USD* so velikosti 3,4GB, vsi skupaj se pa seštevajo v kar 160GB. Nekaj vrstic vrste *AUD/CAD* lahko vidimo v tabeli 3.1.

Bid	Ask	MsUTC	UTCtime	LocalTime
1.0147	1.0155	1294005621000	2011-01-02T22:00:21.0	2011-01-02T17:00:21.0
1.0149	1.0157	1294005677000	2011-01-02T22:01:17.0	2011-01-02T17:01:17.0
1.0148	1.0156	1294005677000	2011-01-02T22:01:17.0	2011-01-02T17:01:17.0
1.0149	1.0157	1294005678000	2011-01-02T22:01:18.0	2011-01-02T17:01:18.0
1.0148	1.0156	1294005684000	2011-01-02T22:01:24.0	2011-01-02T17:01:24.0

Tabela 3.1: Vzorec podatkov za par *AUD/CAD*

¹UTC (mešanica angleške okrajšave za “Coordinated Universal Time” in francoske za “Temps Universel Coordonné”) je svetovno sprejet časovni standard za regulacijo časa. V večini primerov je enak GMT času (greenwiniški čas) s to izjemo, da GMT včasih upošteva poletne premike ure in, da je UTC definiran bolj natančno. Uradno je bil formiran leta 1960 na pobudo številnih znanstvenih institucij.[11]

3.2 Lastnosti vrst

V tem poglavju bom pokazala, kako je potekala priprava podatkov za nekaj osnovnih analiz, kako sem te izvedla in predstavila rezultate. V te analize sem vključila samo 12 časovnih vrst valutnih parov, in sicer *AUD/CAD*, *AUD/USD*, *USD/CAD*, *AUD/CHF*, *CAD/CHF*, *USD/CHF*, *USD/HUF*, *EUR/HUF*, *EUR/AUD*, *EUR/CHF*, *EUR/CAD*, *EUR/USD*. Za analizo sem uporabila programski jezik R v razvojnem okolju RStudio.

3.2.1 Priprava podatkov

Priprava podatkov mi je zaradi njihove velike količine vzela precej časa. Moj cilj je bil združiti nakupne cene vseh dvanajstih valutnih parov v eno matriko, kjer bi bile cene urejene po času naraščajoče in bi imele vse isti časovni žig. Naloge sem se lotila po sledečih korakih:

1. tedenske podatke dvoletnega obdobja vsakega valutnega para združiti v eno veliko datoteko,
2. prebrati posamično datoteko s pomočjo programa R in obdržati samo podatke, ki jih potrebujem (nakupna cena in timestamp),
3. združiti te časovne vrste v matriki z enotnim timestampom,
4. interpolirati manjkajoče podatke, ki so se pojavili pri združevanju časovih vrst,

Prvega koraka - združevanja tedenskih podatkov - sem se lotila s pomočjo Jave, vseh ostalih pa z R-jem. Pri združevanju podatkov v eno matriko (3. korak) sem zaradi obsežnosti podatkov morala uporabiti dodatne R-jeve pakete za delo z velikimi nabori podatkov (paket *plyr*). Vseeno je za 12 valutnih parov in pol leta podatkov trajalo več ur, da jih je program uredil v matriki. Vsak stolpec v tej matriki je pripadal nakupnim cenam enega valutnega para, razširjenih na unijo vseh timestampov, kjer so bile vrednosti nakupne cene med dvema originalnima vrednostima timestampa *NA*. S preprosto diskretno interpolacijo sem v zadnjem koraku te vrednosti zamenjala z zadnjo znano ceno (primer v tabeli 3.2).

timestamp	AUD/CAD	EUR/USD	timestamp	AUD/CAD	EUR/USD
1294005621000	1.0155	NA	1294005621000	1.0155	1.24345
1294005644000	NA	1.24355	1294005644000	1.0155	1.24355
1294005677000	1.0157	NA	1294005677000	1.0157	1.24355
1294005677000	1.0156	NA	1294005677000	1.0156	1.24355
1294005678000	1.0157	NA	1294005678000	1.0157	1.24355
1294005684000	1.0156	NA	1294005684000	1.0156	1.24355

Tabela 3.2: Na levi: primer matrike po združevanju podatkov. Na desni: primer matrike po interpolaciji.

3.2.2 Korelacija

Korelacijski koeficient med dvema slučajnima spremenljivkama X in Y se izračuna po formuli:

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y},\end{aligned}$$

kjer $\text{cov}(X, Y)$ označuje kovarianco med X in Y , σ označuje standardno deviacijo, μ pa matematično upanje slučajne spremenljivke. Pri izračunu korelacij sem uporabila Pearsonovo metodo. Ta je predvsem priporočena za podatke, ki so normalno porazdeljeni; za ostale porazdelitve sta pogosto predlagani Spearmanova in Kendalova metoda. Te dve metodi merita monotono odvisnost, t.j. ali se obema spremenljivkama istočasno povečuje oziroma manjša vrednost, vendar ne upoštevata v kakšni meri se to zgodi v obeh primerih. Pearsonova metoda pa meri linearno odvisnost spremenljivk. Chok [16] je vendarle pokazal, da je Spearmanova metoda dobra tudi za ne-normalno porazdeljene podatke, če le nimajo očitnih osamelcev. Pearsonova metoda izračuna vzorčni korelacijski koeficient, ki se ga pogosto označuje z r tako, da matematično upanje obeh spremenljivk zamenja s povprečjem vzorca:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}. \quad (3.1)$$

Za kovarianco lahko izračunamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i Y_i - X_i \bar{Y} - Y_i \bar{X} + \bar{X} \bar{Y}) \\
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y} - n \bar{X} \bar{Y} + n \bar{X} \bar{Y} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}.
\end{aligned}$$

Analogen izračun lahko naredimo za standardni deviaciji X in Y in rezultate vstavimo v 3.1:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}^2}} \\
&= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} n \bar{Y}}{n \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n^2 \frac{1}{n} \bar{X}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n^2 \frac{1}{n} \bar{Y}^2}} \\
&= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n Y_j}{n \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}} \\
&= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n Y_j}{\sqrt{[n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2][n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2]}},
\end{aligned}$$

kar lahko poenostavljeno zapišemo kot

$$r = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n \sum X^2 - (\sum X)^2][n \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \quad (3.2)$$

Definicija 7. *Kendallov korelacijski koeficient.*

$$\tau = \frac{\text{št. usklajenih parov}(X_i, Y_i) - \text{št. neusklajenih parov}(X_i, Y_i)}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

kjer je par (X_i, Y_i) usklajen, če velja za $i > j$, da ali $X_i > X_j$ in $Y_i > Y_j$ ali $X_i < X_j$ in $Y_i < Y_j$. Par je neusklajen, če velja za $i > j$, da ali $X_i > X_j$ in $Y_i < Y_j$ ali $X_i < X_j$ in $Y_i > Y_j$. Če je $X_i = X_j$ ali $Y_i = Y_j$, ni par niti usklajen, niti neusklajen.

Zgled 8. Imamo vrednosti treh slučajnih spremenljivk:

X	1	2	3	2	5	1	7	8
Y	3	3	4	4.2	7	4	9	8.9
Z	2.7	7.3	20	7.3	150	2.7	1096	2980

Oglejmo si najprej Kendallov korelacijski koeficient za par X, Y , ki gleda na monotonno odvisnost med dvema spremenljivkama.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{4 - 2}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7} \\ &= \frac{21 - 3}{28} \\ &= 0.64\end{aligned}$$

Če na istih podatkih izračunamo Pearsonov korelacijski koeficient:

$$\begin{aligned}r &= \frac{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i Y_i - \sum_{i=1}^8 X_i \sum_{i=1}^8 Y_i}{\sqrt{[8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i^2 - (\sum_{i=1}^8 X_i)^2][8 \cdot \sum_{i=1}^8 Y_i^2 - (\sum_{i=1}^8 Y_i)^2]}} \\ &= \frac{8 \cdot 202.6 - 29 \cdot 43.1}{\sqrt{[8 \cdot 157 - 841][8 \cdot 276.85 - 1857.61]}} \\ &= 0.963\end{aligned}$$

Vidimo, da je Pearsonov korelacijski koeficient občutno višji kot Kendallov.

Oglejmo si še drugi par - X, Z . Pearsonova metoda:

$$r = 0.838$$

Kendallova metoda:

$$\tau = 1$$

Rezultat je ravno obraten kot pri prvem paru, vendar nekako pričakovan. Obe vrsti sta popolnoma usklajeni - ko glede na prejšnje vrednosti naraste X_i , naraste tudi Z_i , ko pade X_i , pade tudi Z_i in zato je Kendallov korelacijski koeficient enak 1. Vendar pa je velikost skokov pri obeh zelo različna - v resnici je $Z_i \simeq \exp(X_i)$ in posledično Pearsonov korelacijski koeficient toliko nižji.

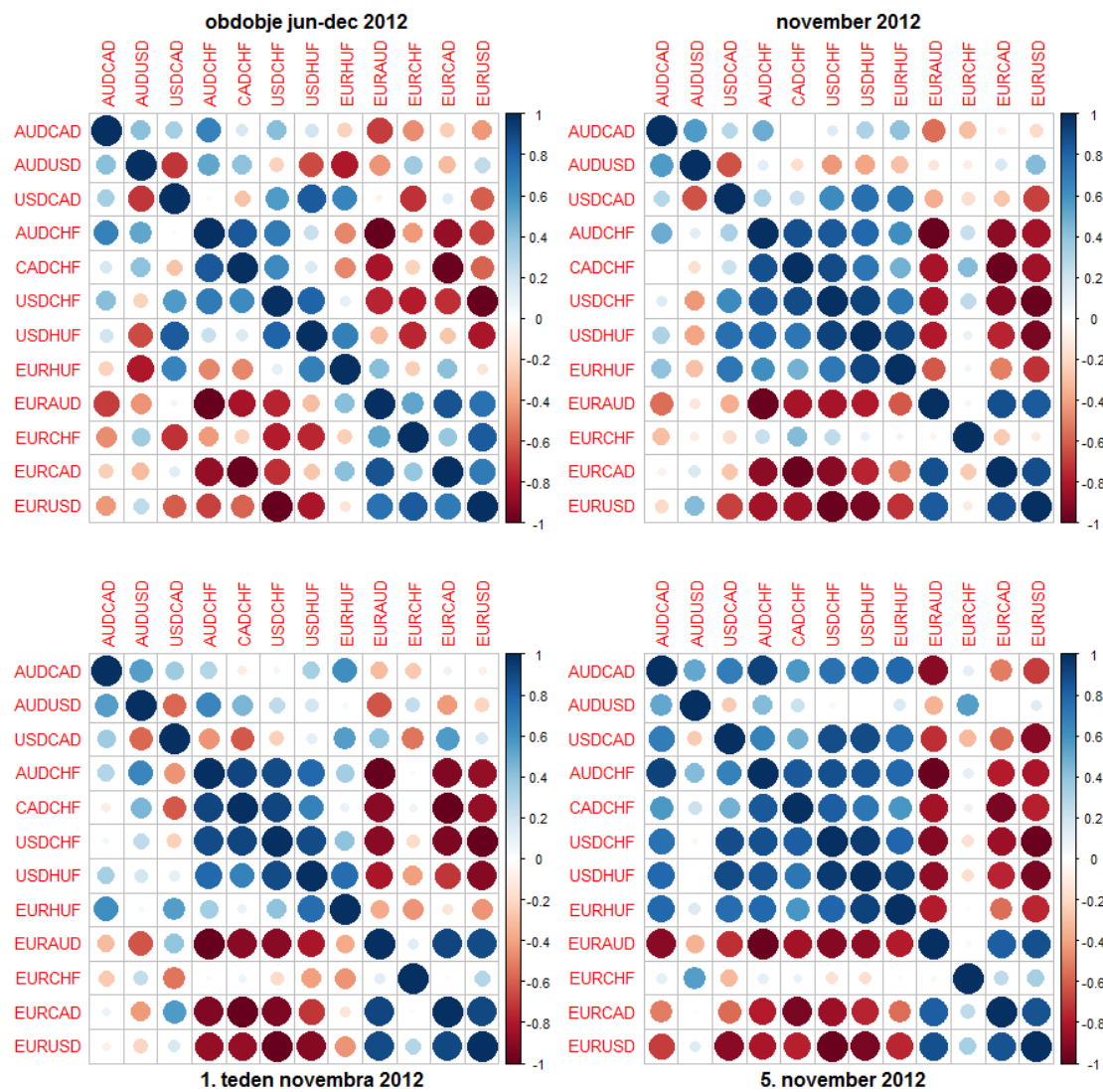
S časovnimi vrstami zbranimi v stolpcih tabele *data* (z izjemo prvega stolpca, kjer je časovni žig), sem korelacijsko matriko *COR* izračunala preprosto z ukazoma:

```
1 COV <- cov(data[,2:13], data[,2:13], method="Pearson")
2 COR <- cov2cor(COV)
```

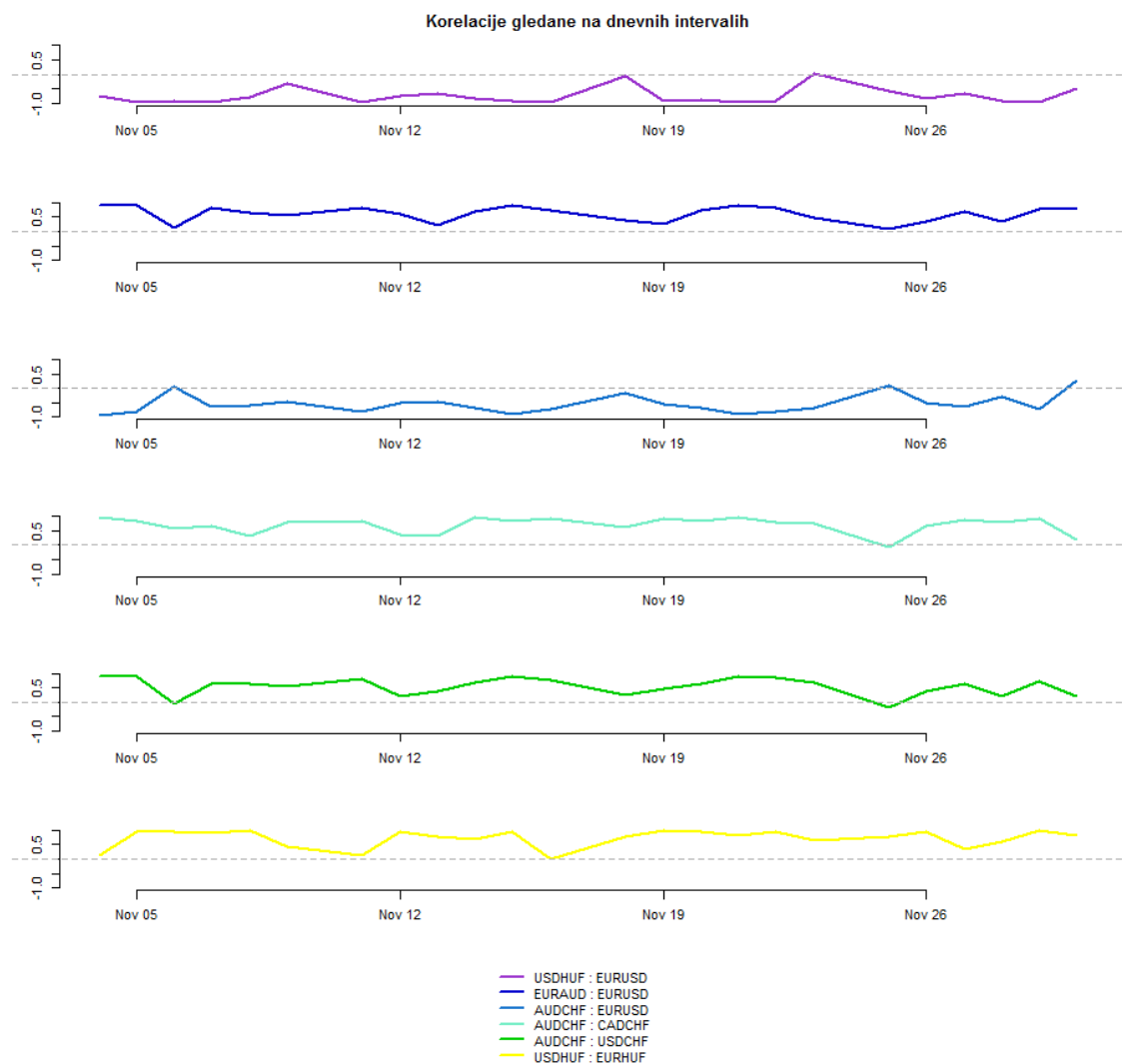
Korelacijske matrike sem izračunala za 4 različna časovna obdobja: polletno obdobje med junijem in decembrom 2012, za november 2012, prvi teden novembra 2012 in za 5. november 2012. Rezultati so prikazani v grafih korelacijskih matrik na sliki 3.1.

Iz grafov je razvidno - najbolj iz zadnjega, ki prikazuje korelacije za 5. november 2012, - da se tvorita dveh gruči valutnih parov. Znotraj teh gruči so pari vrst medsebojno močno pozitivno korelirani: v prvi skupini so *EUR/AUD*, *EUR/CAD* in *EUR/USD*, v drugi pa *AUD/CAD*, *USD/CAD*, *AUD/CHF*, *CAD/CHF*, *USD/CHF*, *USD/HUF* in *EUR/HUF*. Po drugi strani, so pari iz nasprotnih gruči močno negativno korelirani. Gruči sta zelo izraziti predvsem v zadnjem grafu, ki prikazuje korelacijo za obdobje enega dne. Le za valutna para *EUR/CHF* in *AUD/USD* izgleda, da sta bolj ali manj nekorelirana z vsemi ostalimi pari. Sodeč po strukturi grafov, se očitno vrste gledano na kratkih obdobjih (1 dan) obnašajo konsistentno, medtem ko so na daljših obdobjih vendarle bolj nekorelirane. Zdi se, da se gruči tvorita okoli evra in dolarja - smiselna razlaga za to bi bila, da sta ti valuti najbolj konkurenčni med sabo in ob padcu vrednosti prve, drugi zraste vrednost.

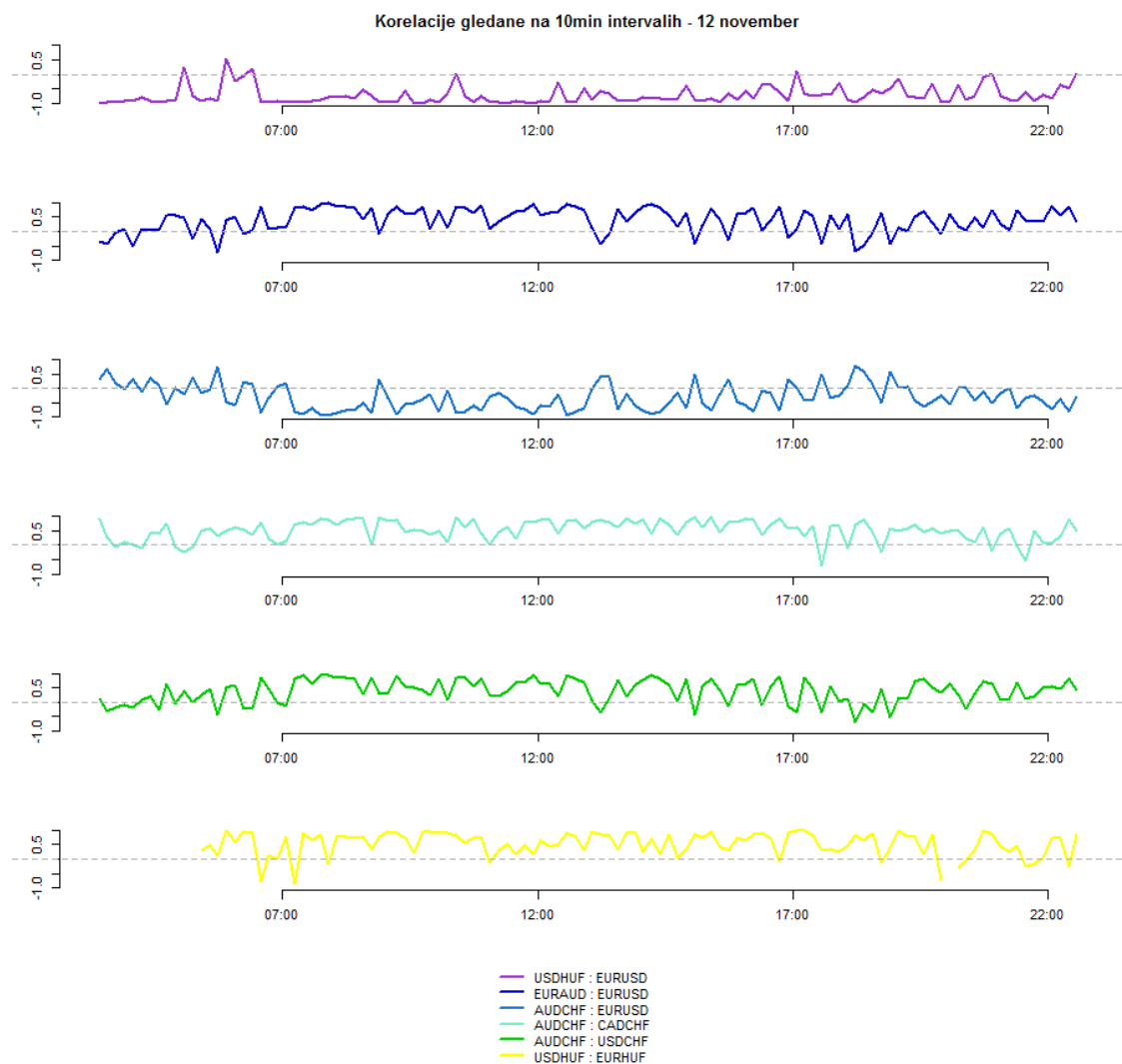
Ker ni očitno, da so zgornje korelacijske matrike reprezentativne za splošne korelacije med vrstami, sem še dodatno analizirala nekaj parov časovnih vrst in si ogledala, kako se korelacija med pari vrst krajšega obdobja spreminja v večjem časovnem okviru. Na tem mestu sem izbrala 6 parov časovnih vrst - nekateri pari so iz različnih zgoraj omenjenih gruči, nekateri pa si delijo mesto v isti gruči. Rezultati za dnevne in desetminutne intervale so prikazani na slikah 3.2 in 3.3. Če upoštevamo, da je bil 5. november 2012 ponedeljek, lahko iz slike 3.2 razberemo, da so vrste na začetku in koncu trgovalnega tedna veliko bolj nekorelirane, kot ostale dni, ko je korelacija močnejša - v pozitivno ali negativno smer. Kljub tem premikom, pa korelacija v nobenem primeru ne menja predznaka na mesečnem intervalu. Temu pa ni tako če gledamo obnašanje korelacije krajših intervalov, kar lahko vidimo na sliki 3.3. Izgleda, da na kratkih intervalih korelacija skorajda naključno spreminja vrednosti. To potrjujejo tudi rezultati za korelacije na dvominutnih, enournih in tedenskih intervalih, grafi katerih so dodani v prilogi A. Tam je prikazan tudi graf, v katerem valutni pari označujejo vozlišča, kjer so vozlišča iz iste gruče iste barve, debelina povezav med njimi je pa linearno odvisna od vrednosti korelacije.



Slika 3.1: Grafi korelacijskih matrik za različna časovna obdobja



Slika 3.2: Primerjava korelacij valutnih parov na dnevnih intervalih - november 2012



Slika 3.3: Primerjava korelacij valutnih parov na desetminutnih intervalih - 12. november

3.2.3 Kointegracija

Preden se lotimo kointegracije časovnih vrst, si moramo najprej ogledati nekaj pojmov, povezanih z njo.

Večina metod za analizo časovnih vrst uporablja stacionarne modele, ki so osnovani na *slučajnih procesih*.

Definicija 9. *Slučajni proces.*

Slučajni proces je zaporedje slučajnih spremenljivk, $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, kjer je vsak element ϵ_t statistično neodvisen od ostalih ϵ_s , $s \neq t$, in imajo vsi ϵ_t enako porazdelitev.

Primer slučajnega procesa je $\{\epsilon_t\}$, kjer so vsi ϵ_t porazdeljeni normalno z upanjem $\mu = 0$ in varianco $\sigma = 1$. Tak slučajni proces označimo z $\epsilon_t \sim N(0, 1)$. Ta proces pogosto označujemo kot *napako* (angl. *error term*) ali *beli šum*. *Slučajni sprehod* je proces, kjer je trenutna vrednost spremenljivke sestavljena iz preteklih vrednosti in belega šuma. Matematično slučajni sprehod opišemo z

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t.$$

V slučajnem sprehodu je sprememba X popolnoma naključna.

Definicija 10. [12] *Stacionarnost.*

1. *Krepka stacionarnost.*

Stohastični proces je krepko stacionaren, kadar je skupna porazdelitev $X_{t_i, \dots, t_j}$ enaka skupni porazdelitvi $X_{t_i+s, \dots, t_j+s}$, za vse j, s .

2. *Šibka stacionarnost.*

Stohastični proces je šibko stacionaren, če sta njegovo matematično upanje in varianca konstantna v času in je avtokovarianca med X_t in X_{t+s} odvisna le od zamika s , kjer $s \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma(s) = \text{cov}(X_t, X_{t+s})$$

Če je proces krepko stacionaren, so vsi momenti procesa ves čas enaki. Pomeni tudi, da porazdelitev (X_t, X_s) ni odvisna od t in s , ampak le od razdalje med njima.

Ponavadi vrste niso stacionarne, obstajajo pa metode, kako s transformacijami take vrstne narediti. Ena od teh metod je diferenciranje, kjer definiramo nov proces na podlagi odmika dveh zaporednih vrednosti osnovnega procesa. V primeru slučajnega sprehoda je to enako:

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = \epsilon_t.$$

Y_t je torej slučajni proces, ki pa je stacionaren. Operacijo označimo z $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Dvakratno diferenciranje označimo z Δ^2 , kar je

$$\Delta^2 X_t = \Delta(X_t - X_{t-1}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.$$

Izračunajmo še $\Delta^3 X_t$:

$$\begin{aligned}\Delta^3 X_t &= \Delta^2(X_t - X_{t-1}) \\ &= \Delta(X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}) \\ &= X_t - 3X_{t-1} + 3X_{t-2} - X_{t-3}\end{aligned}$$

Ni težko opaziti, da je v splošnem formula enaka

$$\Delta^n X_t = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X_{t-i} (-1)^i.$$

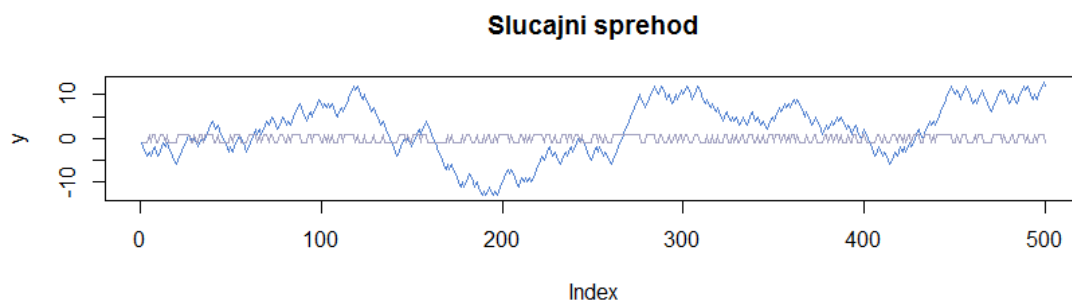
Diferenciranje nas privede do spodnje definicije.

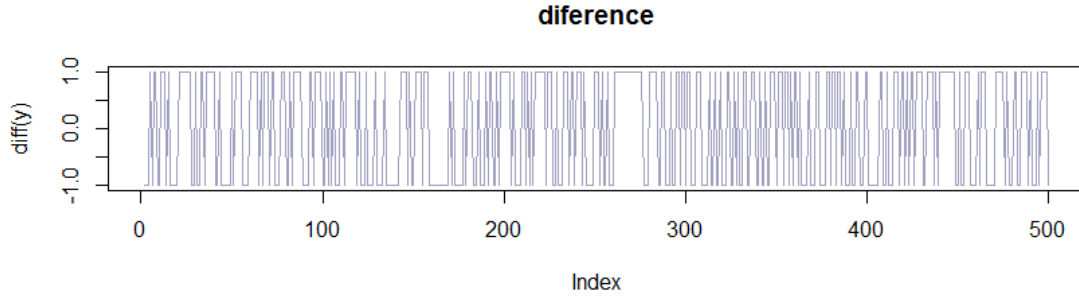
Definicija 11. [13] Za vrsto X_t brez deterministične komponente, ki je stacionarna po d -kratnem diferenciranju pravimo, da je integrirana reda d , označimo pa jo z $X_t \sim I(d)$.

Zgled 12. *Slučajni sprehod*

Oglejmo si slučajni sprehod $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$, kjer je

$$\epsilon_t \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$





V zgornjem grafu (z modro barvo) je prikazan sprehod X_t - vsota naključno potuje gor in dol, glede na vrednosti ϵ_t . V istem grafu (siva) so narisane difference; vidimo, da ima vrsta ves čas enako varianco in upanje. V spodnjem grafu je še enkrat prikazana ΔX_t , ki je enaka vrednostim ϵ_t ; ta proces je stacionaren.

Za $d = 0$ je vrsta stacionarna, za $d = 1$ je pa stacionarna njena sprememba. Prve imajo varianco končno, druge pa (v limiti) neskončno. Ta teoretično neskončna varianca izhaja iz dolgoročnega obnašanja vrste. Zato so integrirane vrste reda $I(1)$ v primerjavi z $I(0)$ gladke s prevladujočimi dolgimi nihanjem. Veljajo tudi naslednje lastnosti:

- vsota vrst $I(0)$ in $I(1)$ bo vrsta $I(1)$,
- za konstanti a in $b \neq 0$ ter vrsto $X_t \sim I(d)$, je $(a + bX) \sim I(d)$,
- v splošnem za $X_t \sim I(d)$ in $Y_t \sim I(d)$ velja, da je njuna linearna kombinacija $Z_t = X_t - aY_t$ prav tako $I(d)$.

Samo v posebnih primerih se lahko zgodi, da je $Z_t \sim I(d - b)$, $b > 0$. V primeru, da sta X_t, Y_t obe integrirani reda $I(1)$, Z_t pa $I(0)$, to pomeni, da je konstanta a taka, da se večina dolgoročnih komponent X_t in Y_t med sabo izniči. Za $a = 1$ velja, da je razlika med X_t in Y_t stacionarna vrsta. To nas privede do naslednje definicije:

Definicija 13. [13] Za komponente vektorja X_t pravimo, da so kointegrirane reda d, b , označeno z $X_t \sim CI(d, b)$, če

- so vse komponente vektorja X_t vrste reda $I(d)$,
- obstaja tak vektor $\alpha \neq 0$, da je $Z_t = \alpha' X_t \sim I(d - b)$, $b > 0$.

Vektorju α pravimo kointegracijski vektor.

Za boljšo predstavo slučajnega sprehoda in kointegracije med vrstami se pogosto uporablja naslednja zgodba o pijancu in njegovem psu [14]:

Predstavljajmo si pijanca na poti iz gostilne domov. Ker pijano tava naokoli, lahko njegovo pot opišemo s slučajnim sprehodom:

$$X_t - X_{t-1} = u_t. \quad (3.3)$$

Vendar se pa ne obnašajo tako samo pijanci, tudi izpuščeni psički se tako obnašajo - vsak nov vonj, ki ga zavohajo, določi smer, ki jo bodo ubrali v naslednjem trenutku in obenem pozabili na prejšnji vonj. Tudi pot takega psička lahko opišemo s slučajnim sprehodom:

$$Y_t - Y_{t-1} = w_t, \quad (3.4)$$

kjer sta w_t in u_t stacionarna koraka, ki ustrezata belemu šumu, ki ju pijanec in pes naredita v vsakem obdobju.

Pomembna značilnost slučajnih sprehodov je, da je zadnja opazovana vrednost najboljši napovedovalec bodočih vrednosti. Če bi nekdo pred gostilno vprašal prijatelja, kje je psiček, ki sta ga pred tem videla, bi mu ta verjetno odgovoril: "Hm, bil je tukaj, ko sem šel notri." Pogovor bi verjetno potekal podobno, če bi se pogovarjala o pijancu.

Druga pomembna lastnost slučajnih sprehodov je, da dlje kot sta bila prijatelja v gostilni, bolj verjetno sta psiček in pijanec odtavala daleč od tam. Takrat bi prijatelja za enega ali za drugega rekla: "Ampak kdo ve, kam sta že prišla do zdaj." Ta naraščujoča varianca v lokaciji opisuje nestacionarnost slučajnih sprehodov.

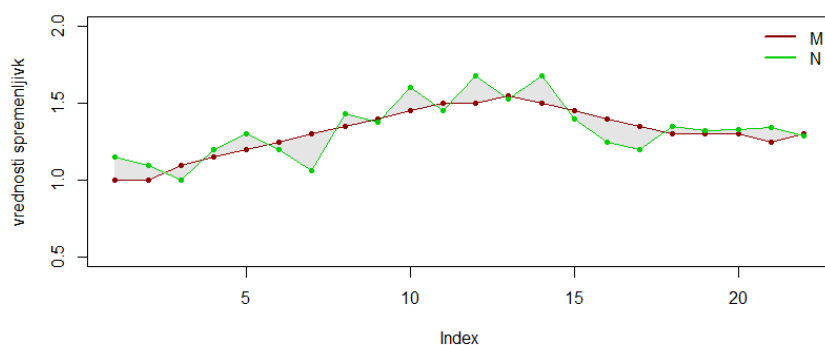
Kaj pa če je pes od pijanca? Pijanec gre ven iz gostilne in začne tavati po svoji slučajni poti, vendar vsake toliko pokliče svojega psa. Ta ga sliši in zalaja - tedaj tudi pijanec sliši njega. Psiček si misli: "Ne smem ga pustiti predaleč, zaklenil me bo ven iz hiše." Pijanec si pa misli: "Ne smem ga pustiti predaleč, zbudil me bo sredi noči s svojim lajanjem." Oba ocenita kako daleč sta eden od drugega in se delno približata.

Po tem scenariju niti pijanec niti pes ne sledita slučajnemu sprehodu. V svoj sprehod sta dodala t.i. mehanizem za odpravo napak. Ampak, če bi nekdo skušal slediti enemu iz para, bi se še vedno zdelo, da tavata brezciljno skozi noč. Verjetnost, da bosta odtavala daleč od gostilne, še vedno narašča. Vseeno pa, čeprav sta njuni poti nestacionarni, bi prijatelja verjetno še vedno rekla: "Če najdeš enega od njiju, drugi verjetno ne bo prav daleč." V tem primeru je razlika med sprehodoma stacionarna in sta sprehoda pijanca in njegovega psa kointegrirana reda (1, 1).

Zgled 14. Imamo vrednosti dveh slučajnih spremenljivk:

M	1	1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
	1.5	1.55	1.5	1.45	1.4	1.35	1.3	1.3	1.3	1.25	1.3
N	1.15	1.1	1	1.2	1.3	1.2	1.06	1.43	1.38	1.6	1.45
	1.68	1.53	1.68	1.40	1.25	1.2	1.35	1.32	1.33	1.34	1.29

Vrsti lahko vidimo na sliki 3.4. Preverimo ali sta vrsti kointegrirani. Najprej



Slika 3.4: Vrednosti slučajnih spremenljivk M in N

izračunamo linearni model

$$M = \beta \cdot N$$

in dobimo, da je

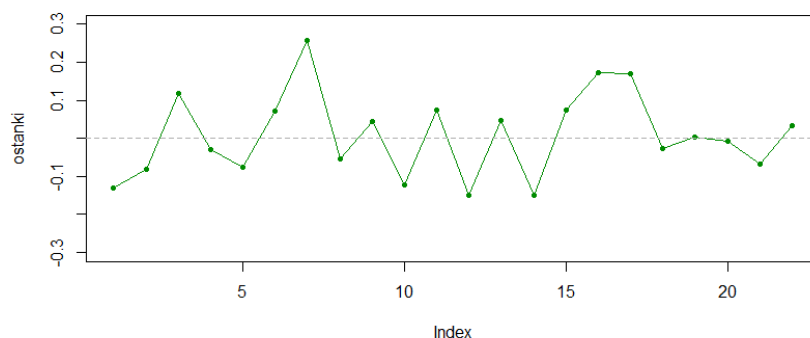
$$\beta = 0.98255$$

z zelo majhno p -vrednostjo ($p < 2 \exp(-16)$). Izračunamo ostanke tega modela

$$res = M - \beta \cdot N,$$

ki so prikazani na sliki 3.5.

Na prvi pogled se zdi, da so ostanke stacionarni, saj se gibljejo okoli ničle z menjajočimi pozitivnimi in negativnimi vrednostmi. Z Dickey-Fullerjevim testom preverimo, da je to res: p -vrednost < 0.01 in vrsti očitno sta kointegrirani.



Slika 3.5: Ostanki $M - \beta \cdot N$

Izračun

Kointegriranost sem preverjala za istih 12 valutnih parov kot korelacijo. Za vsak par vrst sem izračunala linearni model brez premika:

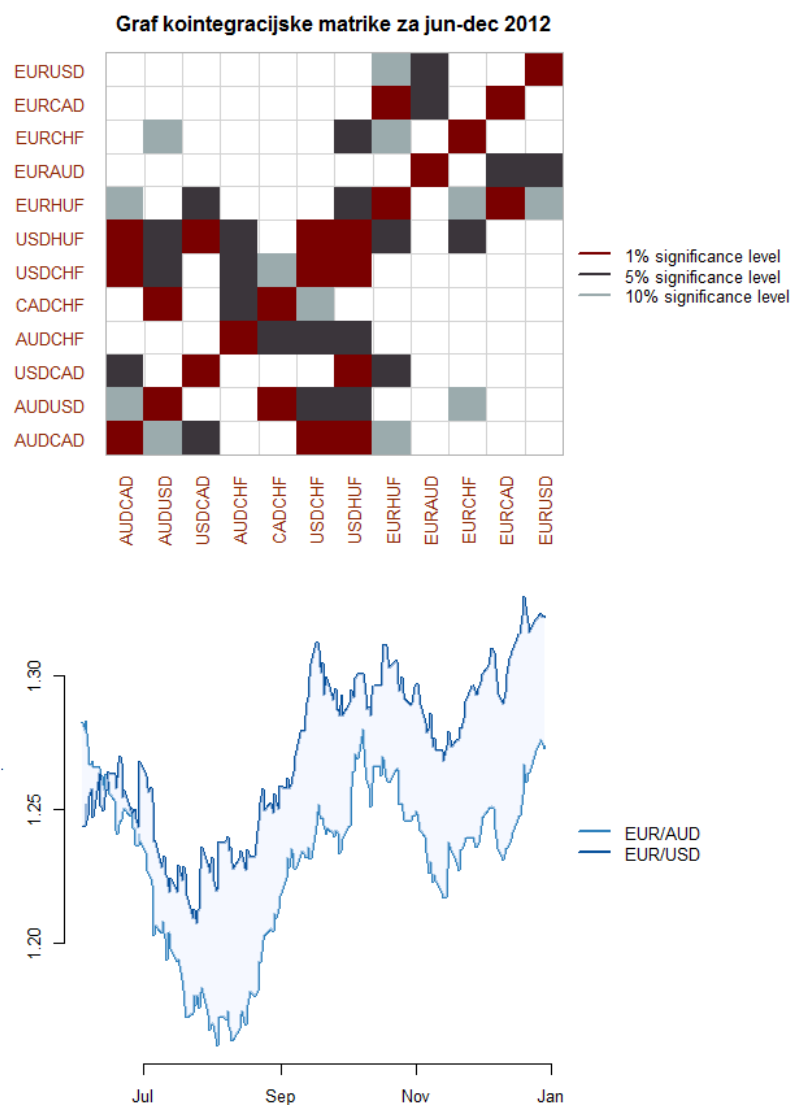
$$VP_1 = \beta \cdot VP_2 \quad (3.5)$$

Reziduali tega modela ustrezajo razponu med obema vrstama:

$$razpon = VP_1 - \beta \cdot VP_2 \quad (3.6)$$

Na tej novo dobljeni vrsti sem izvedla razširjeni Dickey-Fullerjev test, ki testira ali je proces stacionaren. Če je razpon med dvema vrstama stacionaren, sta ti dve vrsti kointegrirani.

Rezultati in primer kointegriranih vrst so prikazani na sliki 3.6, več primerov kointegriranih parov pa v Prilogi. Podobno kot pri korelaciji lahko opazimo, da sta se spet tvorili (isti) dve gruči, le da je tokrat valutni par *EUR/HUF* “preskočil” na drugo stran.



Slika 3.6: Vizualizacija kointegracijske matrike za drugo polletje 2012 in primer kointegriranih vrst

Poglavje 4

Iskanje arbitraže

V tem delu naloge bom predstavila osnove teorije grafov in jih v nadaljevanju nadgradila s pojmi iz analize na grafih, s katerimi sem zgradila algoritem za iskanje arbitraže.

Najprej pa definirajmo nekaj oznak, ki se bodo pojavljale:

- matrike bodo označene z veliki tiskanimi črkami, npr. M , i, j -ti element te matrike pa M_{ij} ali pa, v redkih primerih proti koncu naloge, z $M[i, j]$,
- vektorje bodo označevale male tiskane črke, npr. $\vec{t}$, i -ti element vektorja pa bo označen z indeksom t_i ,
- kadar bomo uporabljali funkcije na elementih vektorja, bomo to poenostavljeno pisali kar kot funkcijo vektorja, npr. $\log \vec{e} = (\log e_1, \log e_2, \dots, \log e_n)^T$

4.1 Teorija grafov

Enostaven graf G je urejen par (V, E) , kjer je V neprazna končna množica vozlišč ali točk grafa G . Če je $|V| = n$, pravimo da je G graf na n vozliščih. Množica $E \subset \binom{V}{2}$ je množica povezav grafa G . Če je $\{i, j\} \in E$, pravimo da sta vozlišči i in j sosednji, ter $\{i, j\}$ povezava med i in j , kar bomo pogosto označili kar z ij . Množica vozlišč j , ki so sosednja vozlišču i , tvori *okolico* vozlišča i in jo označimo z $N(i)$. Enostavni grafi ne vsebujejo večkratnih povezav med dvema točkama in zank, kjer je točka sama sebi sosednja.

Matrika sosednosti (angl. *adjacency matrix*) A grafa G je matrika, ki ima vrstice in stolpce pripadajoče točkam grafa G , njeni elementi A_{ij} pa zavzemajo vrednosti $\{0, 1\}$ glede na to ali sta točki i, j sosednji ali ne. Matrike sosednosti enostavnih grafov imajo po diagonali ničle in so simetrične.

Naj bo $G = (V, E)$ graf na n vozliščih. *Sprehod* $v_1 - v_k$ v grafu G je taka končna k -terica točk $(v_1, \dots, v_k)$, da je za vsak $i < k$ $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Sprehodu, v katerem se nobena točka ne ponovi, pravimo $v_1 - v_k$ *pot*. Sprehodu, kjer je $v_1 = v_k$ pravimo *obhod*, in poti, kjer je $v_1 = v_k$, pravimo *cikel*. Sprehodu, ki gre natanko enkrat čez vsako povezavo v grafu, pravimo Eulerjev sprehod. Če se ta začne in konča v istem vozlišču, je to Eulerjev cikel. Grafu, v katerem obstaja Eulerjev cikel, pravimo Eulerjev graf. V Eulerjevem grafu so vsa vozlišča sode stopnje.

Naj bo $H = (V, E)$ graf. Kadar so povezave v grafu H usmerjene, t.j. povezava ij ni ista kot ji , pravimo da je H *usmerjen graf*. Če je povezava $ij \in E(G)$, pravimo da je vozlišče j dosegljivo iz vozlišča i . Element matrike sosednosti A_{ij} je v tem primeru enak 1 samo, če je vozlišče j dosegljivo iz vozlišča i .

Definicija 15. *Pretok po povezavah.*

Pretok po povezavah na grafu G je funkcija $X : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

$$\begin{cases} X(i, j) = -X(j, i), & \text{če } \{i, j\} \in E \\ X(i, j) = 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Matrika X prirejena pretoku po povezavah je poševno simetrična. Prav tako lahko vsaki poševno simetrični matriki priredimo pretok po povezavah. Zato bom od tukaj naprej namesto zapisa $X(i, j)$ uporabljala X_{ij} .

Spodaj bom definirala operatorje na grafih, ki so analogni bolj znanim operatorjem iz analize vektorskih polj: gradient, rotor in divergenca.

Definicija 16. *Kombinatorični gradient.*

Naj bo G graf in funkcija $s : V \rightarrow \mathbb{R}$. Kombinatorični gradient funkcije s ($\text{grad } s$) : $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ preslika funkcijo s v pretok po povezavah preko enačbe:

$$(\text{grad } s)(i, j) = s_j - s_i. \quad (4.2)$$

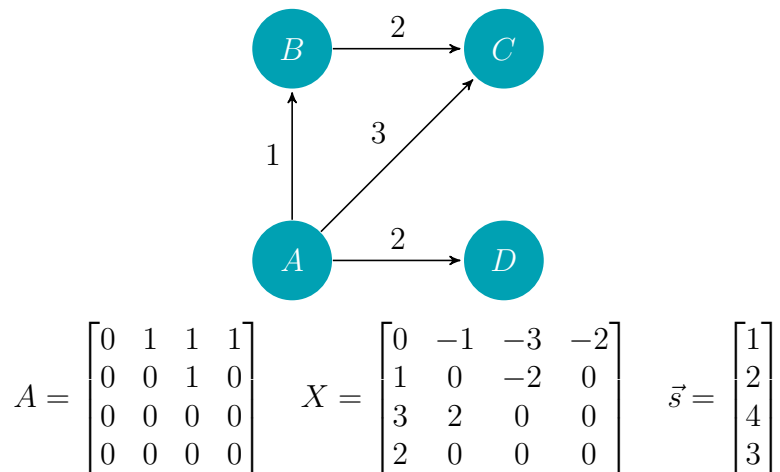
Pretoku po povezavah, ki ima tako obliko, pravimo gradientni pretok.

Od tu naprej se bom na kombinatorični gradient nanašala samo z besedo *gradient*.

Zgled 17. *Gradient in pretok po povezavah.*

V spodnjem grafu lahko vidimo primer grafa, ki ima gradientni pretok. A je matrika sosednosti, X matrika gradientnega pretoka po povezavah, s pa funkcija, ki smo ji

priređili pretok.



Ekonomsko izmenjavo blaga lahko opišemo z grafom $G = (V, E)$, kjer točke grafa G opisujejo n dobrin, povezave pa možne transakcije za njihovo izmenjavo. V primeru, da so vse dobrine med seboj zamenljive, pravimo, da je trg *poln*; v tem primeru je tudi graf G poln graf. Naj bo menjalni tečaj med dobrinama i in j dan z enačbo

$$D_i = A_{ij} \cdot D_j, \quad A_{ij} > 0,$$

kjer D_i predstavlja eno enoto dobrine i . Matrika menjalnih tečajev A med dobrinami je recipročna matrika, saj je

$$A_{ij} = \frac{1}{A_{ji}}, \quad \text{za vse } i, j.$$

V primeru, da graf ni poln, se bodo v matriki A pojavile manjkajoče vrednosti. Obstaja več metod, kako jih nadomestiti, ki pa jih ne bom opisovala, saj je to zgolj obstranski problem v tej nalogi. Če na trgu trikotna arbitraža ne obstaja, mora veljati

$$A_{ij}A_{jk} = A_{ik} \tag{4.3}$$

za vse i, j, k , ki tvorijo 3-cikel v grafu. Z uporabo logaritemske transformacije

$$X_{ij} = \log A_{ij}$$

lahko pogoj (4.3) ekvivalentno zapišemo s pretokom po povezavah:

$$X_{ij} + X_{jk} + X_{ki} = 0. \tag{4.4}$$

Definicija 18. *Trikotni pretok.*

Trikotni pretok na grafu G je funkcija $\phi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadovolji naslednji pogoj:

$$\phi(i, j, k) = \phi(j, k, i) = \phi(k, i, j) = -\phi(j, i, k) = -\phi(i, k, j) = -\phi(k, j, i). \quad (4.5)$$

Definicija 19. *Kombinatorični rotor.*

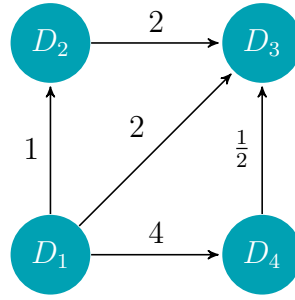
Naj bo $T(E)$ množica vseh 3-klik (trikotnikov) grafa G , ki imajo vse povezave v $E(G)$. Kombinatorični rotor preslika pretoke po povezavah v trikotne pretoke po formuli:

$$\text{rot}(X)_{ijk} = \begin{cases} X_{ij} + X_{jk} + X_{ki}, & \text{če } \{v_i, v_j, v_k\} \in T, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Od tu naprej se bom na kombinatorični rotor nanašala samo z besedo *rotor*. V zgoraj opisanem grafu izmenjave dobrin G torej arbitraža ne bo obstajala, če bo rotor na 3-ciklih enak 0.

Zgled 20. *Zakon ene cene in rotor.*

V grafu G so predstavljene 4 dobrine. Vse so paroma zamenjive razen D_2 in D_4 .



graf G

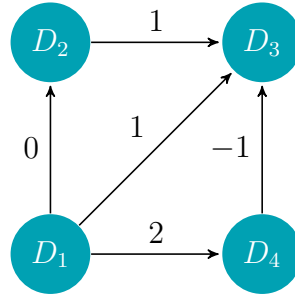
Vrednosti na povezavah prikazujejo menjalni tečaj: $2D_2 = D_3$, kar pomeni, da moramo za 1 enoto D_3 plačati 2 dobrini D_2 in za 1 enoto D_2 plačati $\frac{1}{2}$ dobrine D_3 . A je matrika menjalnih tečajev:

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & & & \\ 2 & 2 & & \frac{1}{2} \\ 4 & & 2 & \end{bmatrix}$$

V grafu ni arbitraže, saj oba trikotnika ustrezata pogojem danim s (4.3). Npr. za trikotnik $D_3D_4D_1$ velja:

$$\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}$$

V grafu H so namesto cen A_{ij} na povezavah uporabljene vrednosti $X_{ij} = \log_2 A_{ij}$.



graf H

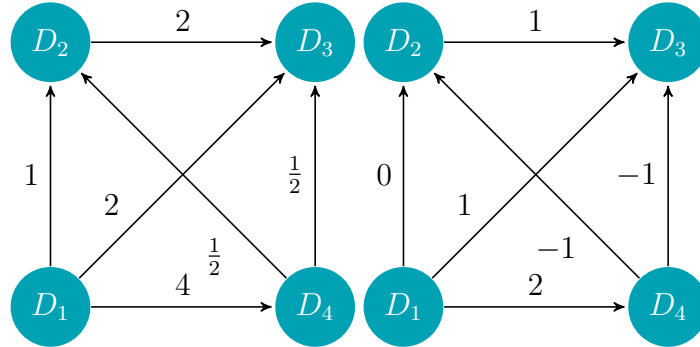
Po (4.4) mora veljati, da se pretok po povezavah v trikotniku sešteje v 0, če ni arbitraže; če gledamo trikotnik $D_3D_4D_1$:

$$1 - 2 + 1 = 0$$

in pogoj je izpolnjen.

Dodajmo grafu G tega malega trga še povezavo med D_2 in D_4 z menjalnim tečajem $A_{24} = \frac{1}{2}$, nov graf je predstavljen z G' . Očitno se na trgu s tem menjalnim tečajem pojavi arbitraža, saj je direktna menjava D_1 za D_2 cenejša kot nakup preko D_4 (4.3):

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \neq 1.$$



graf G'

graf H'

Ker imamo sedaj na trgu arbitražo predvidevamo, da morata biti tudi $\text{rot}(X)_{142} \neq 0$ in $\text{rot}(X)_{423} \neq 0$. Oglejmo si ta pogoj v grafu H' , v katerem so na povezavah

logaritmirane vredosti uteži povezav G' :

$$\begin{aligned} 2 - 1 - 0 &= 1 \\ -1 + 1 + 1 &= 1. \end{aligned}$$

V grafu H' pogoj (4.4) ni izpolnjen in potrди obstoj arbitraže.

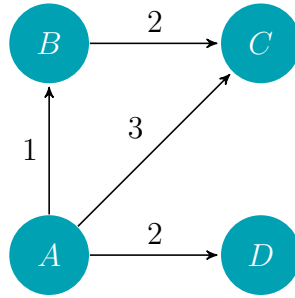
Definicija 21. *Kombinatorična divergenca.*

Naj bo X pretok po povezavah na grafu $G = (V, E)$. Kombinatorična divergenca je potencialna funkcija $\text{div} : V \rightarrow \mathbb{R}$, katere vrednost je na vsaki točki grafa G določena z

$$\text{div } X(i) = \sum_{j:j \in N(i)} X_{ij}. \quad (4.7)$$

Od tu naprej se bom na kombinatorično divergenco nanašala samo z besedo *divergenca*.

Zgled 22. *Divergenca.*



$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{div}(X) = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Intuitivno: rotor sešteva neto pretok po povezavah v 3-ciklih, divergenca pa pretok skozi točko - ta je lahko nevtralna ($\text{div}(X_i) = 0$), izvor ($\text{div}(X_i) > 0$) ali ponor ($\text{div}(X_i) < 0$).

Lema 23. Naj bo $G = (V, E)$ graf in v njem gradientni pretok $(\text{grad } s) = X$ za nek $s \in \mathbb{R}^n$. Velja

$$(\text{rot} \circ \text{grad})(s) = 0$$

Dokaz. Naj bo $v_i v_j v_k \in T(E)$ in $s \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(rot \circ grad)(s) &= rot(grad s) \\
&= rot(X)_{ijk} \\
&= X_{ij} + X_{jk} + X_{ki} \\
&= (s_j - s_i) + (s_k - s_j) + (s_i - s_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

To pomeni, da je v primeru, da je pretok v grafu gradientni, $rot(X) = 0$ za vse trikotnike v grafu. To nas pripelje do spodnjih definicij.

Definicija 24. Naj bo $X : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pretok po povezavah na grafu $G = (V, E)$.

1. X je konsistenten na $\{v_i, v_j, v_k\} \in T(E)$, če je $(rot X)_{ijk} = 0$.
2. X je globalno konsistenten, če velja $X = (grad s)$ za neko funkcijo $s : V \rightarrow \mathbb{R}$.
3. X je lokalno konsistenten ali trikotno konsistenten, če je $(rot X)_{ijk} = 0$, $\{v_i, v_j, v_k\} \in T(E)$ za vsak trikotnik $T(E) \in G$.

4.1.1 Baza ciklov

Za uspešno iskanje arbitraže v grafu, sem morala izbrati primerno bazo ciklov.

Definicija 25. Neusmerjena baza ciklov.

Neusmerjena baza ciklov (angl. undirected cycle basis) grafa je množica ciklov, ki tvori bazo cikličnega prostora grafa in je najmanjša množica ciklov, tako da katerikoli cikel v G lahko opišemo kot vsoto baznih ciklov.

Ciklični prostor (neusmerjenega) grafa je množica njegovih Eulerjevih podgrafov. Lahko ga opišemo kot vektorski prostor z dimenzijo enako cikličnemu številu grafa. *Ciklično število* grafa je minimalno število povezav, ki jih moramo odstraniti iz grafa, da dobimo gozd. Za graf z n vozlišči, m povezavami in c povezanimi komponentami je to število enako $m - n + c$ [17]. Graf, na katerem sem jaz iskala arbitražo (enostavna, neusmerjena različica), ima 12 povezav, 6 vozlišč in je sestavljen iz 1 komponente, torej je dimenzija njegovega cikličnega prostora enaka 7.

Oglejmo si jedro funkcije f v vektorskem prostoru:

$$ker(f) = \{v \in V; f(v) = 0\},$$

kjer je V vektorski prostor. Če vzamemo $f = \text{rot}$ je očitno

$$\ker(\text{rot}) = \{c \in C; \text{rot}(c) = 0\},$$

kjer so c 3-cikli brez arbitraže, z utežmi, katerih vrednosti so logaritmirane cene.

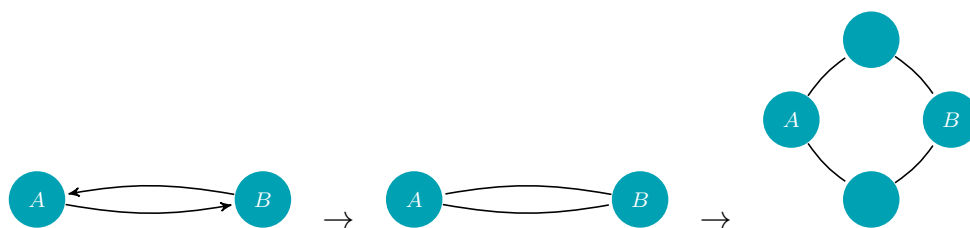
Vendar pa graf, na katerem iščemo arbitražo ni neusmerjen. Iskanja baze se tukaj lahko lotimo na naslednje načine:

1. Iskanje baze usmerjenega grafa.

Obstaja več algoritmov za iskanje ciklične baze usmerjenih grafov, vendar so ti v splošnem časovno zahtevni. Nekateri od teh algoritmov iščejo minimalne baze, spet drugi, manj požrešni, pa najdejo baze, ki niso nujno optimalne. Temu pristopu se ne bom posvetila, ker sem z drugimi metodami dobila zadovoljive rezultate.

2. Transformacija usmerjenega grafa v neusmerjenega.

Usmerjen graf lahko poskusimo opisati z neusmerjenim grafom. Vse usmerjene povezave spremenimo v neusmerjene in zato, da se izognemo delu z multigrafom, uporabimo baricentrično delitev. To pomeni, da na vsako povezavo vstavimo novo vozlišče, kot je prikazano spodaj.



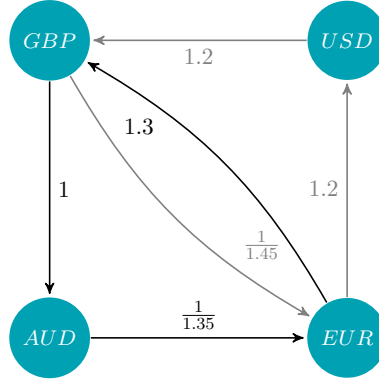
S to metodo dobimo enostaven graf, ki ima glede na originalni graf $2m$ povezav in $n + m$ vozlišč. Za naš primer je dimenzija te ciklične baze enaka 19. Problem te metode je v tem, da ne ujame samo arbitraže ampak tudi ostale neučinkovitosti trga, ki nas ne zanimajo in jih je težko ločiti od arbitraže.

3. S pomočjo 3-ciklov.

Metoda, ki sem jo uporabila pri implementaciji dosega ravnotežje med hitrostjo in natančnostjo algoritma. Uporabljena baza je sestavljena iz vseh trikotnikov, ki obstajajo v grafu. Nasprotno kot zgoraj opisana metoda z baricentrično delitvijo, s to bazo algoritem ne najde vseh arbitraž v grafu, najde pa vse trikotne arbitraže. S preverjanjem samo ciklov dolžine 3 v resnici predpostavljamo, da je pri menjavi valute A za valuto B direkten nakup B z A najbolj ugoden, kar pa ni vedno res. Vendar pa bi bilo iskanje najugodnejše menjave dveh valut na vsakem koraku tako časovno kot tudi tehnično zelo zahtevno.

Zgled 26. Primer grafa, v katerem z implementiranim algoritmom ne najdemo arbitraže.

Imamo cikel na štirih vozliščih, $V(G) = \{AUD, EUR, USD, GBP\}$ in poleg povezav cikla še povezavo med EUR in GBP.



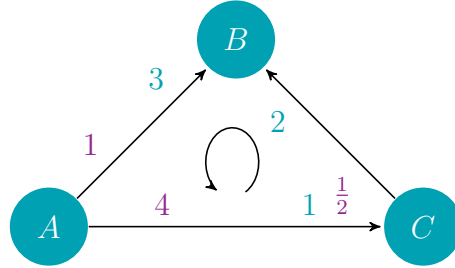
Arbitraže ni v nobenem od trikotnikov EUR–USD–GBP in EUR–GBP–AUD, saj je tako $\frac{1.44}{1.45} < 1$ kot tudi $\frac{1.44}{1.45} < 1$. Vendar pa arbitraža v grafu vseeno obstaja: namestno, da z EUR direktno kupimo GBP, je bolj ugodno, če z EUR kupimo USD in z USD kupimo GBP. S transakcijami na celem 4-ciklu AUD – EUR – USD – GBP dobimo

$$\frac{1.2 \cdot 1.2 \cdot 1}{1.35} > 1,$$

torej arbitraža tam očitno obstaja, vendar je s samo s pregledovanjem trikotnikov ne zaznamo. Vendar pa so velikosti arbitraže, ki jih ne najdemo, omejene. V tem primeru je $EUR/USD_{nak} \cdot USD/GBP_{nak} = 1.44$. Če bi ta vrednost presegla $\frac{1}{EUR/GBP_{nak}} = 1.45$, bi to že sprožilo arbitražo v trikotniku EUR–USD–GBP, ki bi jo zaznali. Po drugi strani, če bi bila vrednost $EUR/USD_{nak} \cdot USD/GBP_{nak}$ nižja od $GBP/AUD_{nak} \cdot AUD/EUR_{nak} = 1.35$ pa arbitraže sploh ne bi bilo.

4.2 Implementacija

Naj bo T graf (cikel) na treh vozliščih, prikazan spodaj.



Puščica znotraj cikla označuje njegovo orientacijo, modre številke na povezavah predstavljajo zaporedno število povezave v grafu, vijolične številke na povezavah pa uteži (menjalne tečaje kot v zgledu 20). Potem lahko zapišemo vektor $\vec{t}$, v katerem bo i -ti element zavzel vrednost -1 ali 1 glede na to ali smer i -te povezave v grafu T ustreza orientaciji cikla. Glede na zgornji graf je ta vektor enak

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo vektor $\vec{e}$ enak logaritmiranim vrednostim uteži na povezavah; i -ti element vektorja pripada i -ti povezavi grafa:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potem z množenjem $\vec{t}^\intercal$ in $\vec{e}$ dobimo ravno rotor cikla ACB :

$$\vec{t}^\intercal \cdot \vec{e} = 1 = \text{rot}(X)_{ACB},$$

kjer je X , ki predstavlja pretok po povezavah:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Če vzamemo nasprotno orientacijo cikla, moramo v vektorju $\vec{t}$ vzeti ravno nasprotnne vrednosti in dobimo

$$\vec{t}^\intercal \cdot \vec{e} = -1 = \text{rot}(X)_{ACB}.$$

V obeh primerih očitno ne velja zakon ene cene, vendar pa bi s trgovanjem v prvem primeru naredili dobiček, v drugem pa izgubo. Ker so v tem primeru cene glede na usmerjenost povezave obratne, bi v resnici lahko izračunali le rotor enega od obeh ciklov, pri drugem pa upoštevali, da sta vrednosti nasprotni. Da izmerimo dejanski dobiček oz. izgubo, moramo upoštevati, da smo za računanje rotorja dejanske cene logaritmirali in odšteti vrednost investicije (1 enota). V zgornjem primeru bi bil dobiček torej enak

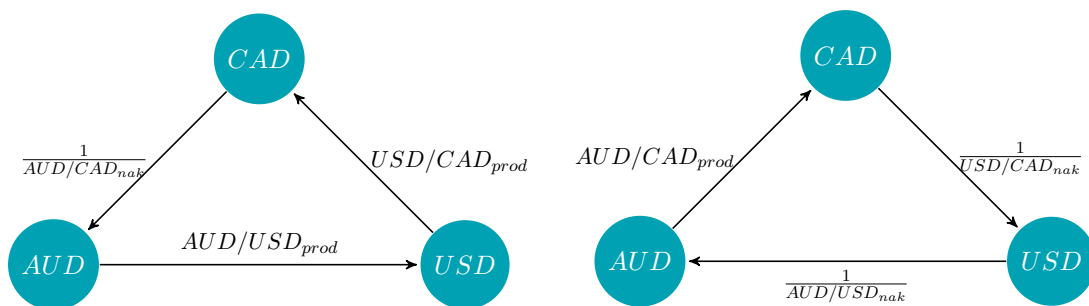
$$2^1 - 1 = 1,$$

izguba pa

$$2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

V resnici je potrebno pri iskanju arbitraže na dejanskih podatkih upoštevati še prodajno in nakupno ceno. Ker sta ti dve ceni različni, vrednosti rotorja v različno usmerjenih ciklih ne bosta več nasprotni.

Za začetek sem iskala arbitražo samo v trikotniku, ki ga tvorijo valutni pari AUD, CAD in USD .



Arbitražo sem iskala tako, da sem izračunala

$$AUD/USD_{prod} \cdot USD/CAD_{prod} \cdot \frac{1}{AUD/CAD_{nak}}.$$

Če je bila dobljena vrednost večja od 1, to pomeni, da se je na trgu pojavila arbitraža, saj lahko iz investirane 1 denarne enote preko transakcij naredimo dobiček. Podobno sem za obratno usmerjen trikotnik izračunala

$$\frac{1}{AUD/USD_{nak}} \cdot \frac{1}{USD/CAD_{nak}} \cdot AUD/CAD_{prod}.$$

datum	orientacija	rotor
2011-01-04 05:02:14	1	0.00017
2011-01-04 05:02:15	1	0.00027
2011-01-04 05:02:16	1	0.00006
2011-01-07 14:30:03	1	0.00034
2011-01-07 14:30:04	1	0.00025
2011-01-07 14:30:05	1	0.00187
2011-01-07 14:30:06	1	0.00005
2011-01-07 14:30:08	1	0.00076
2011-01-07 14:30:44	1	0.00045
2011-01-07 14:30:45	1	0.00035
2011-01-07 14:30:46	1	0.00035
2011-01-07 14:30:47	1	0.00015
2011-01-07 14:30:48	1	0.00025
2011-01-07 14:30:49	1	0.00035
2011-01-07 14:30:50	1	0.00046
2011-01-07 14:30:51	1	0.00035
2011-01-10 01:30:07	1	0.00027
2011-01-09 23:00:15	-1	0.00256
2011-01-09 23:00:20	-1	0.00216

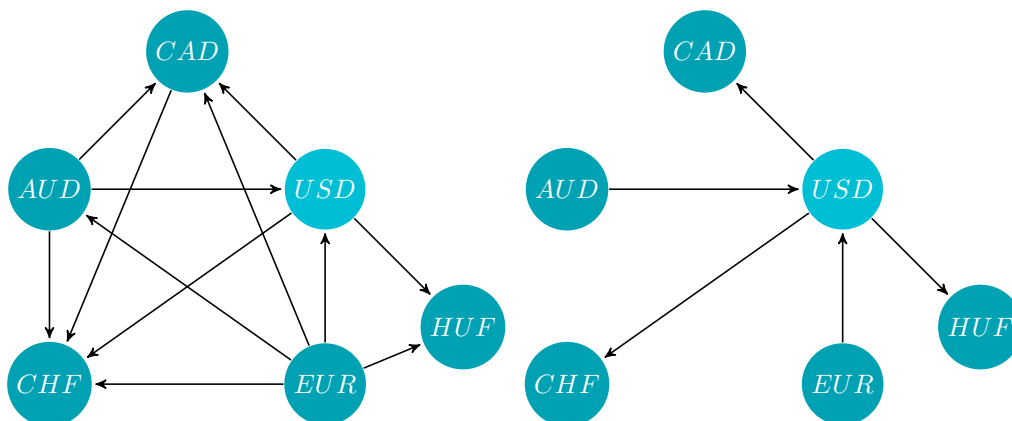
Tabela 4.1: Rezultati iskanja arbitraže za prvi teden januarja 2011, za valutne pare AUD/CAD , AUD/USD , USD/CAD

Vrednosti nikoli ne pridejo enake 1, vendar pa se od 1 večinoma razlikujejo šele na peti ali šesti decimalki in le redko v korist “arbitražerja”. V enem tednu se je arbitraža pojavila 19-krat. Rezultate lahko vidimo v tabeli 4.1. Osvetljene vrstice označujejo primere, kjer je bil rotor (arbitraža) višja od 0.001 - to se je zgodilo le trikrat, najvišja vrednost je dosegla 0.00256.

Metoda, ki sem jo zgoraj uporabila, ustreza pogoju Zakona ene cene danem v enačbi (4.3), vendar sem se računanja na velikem številu podatkov lotila preko rotorja. Rezultati, dobljeni s to metodo in prikazani v 4.1, pa so mi služili za preverjanje.

4.2.1 Algoritem

Pri pisanju algoritma za iskanje arbitraže (Algoritem 1) sem se oprla na osnovni nalogi: določitev vrednosti $\vec{t}$ in $\vec{e}$. Trgovanje z valutami je opisano z grafom $G = (V, E)$,



$$M_{full} = \begin{matrix} & \begin{matrix} USD & CAD & AUD & CHF & EUR & HUF \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{tree} = \begin{matrix} & \begin{matrix} USD & CAD & AUD & CHF & EUR & HUF \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & & \\ 1 & & & & & \\ 0 & \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Slika 4.1: Zgoraj levo: Graf, ki ponazarja možne transakcije med valutami. Zgoraj desno: vpeto drevo, uporabljeno v prvem koraku implementacije algoritma, s korenem v *USD*. M_{full} : matrika sosednosti za celi graf. M_{tree} : matrika sosednosti za vpeto drevo s korenem v *USD*

kjer so posamezne valute vozlišča grafa, povezava med dvema vozliščema pa obstaja, če se da z valutama direktno trgovati. Smer povezave je določena iz menjalnega tečaja: če je za valuti i, j menjalni tečaj dan z i/j , se povezava začne v i in konča

v j . Ta graf se da opisati z matriko sosednosti, ki sem jo v algoritmu 1 označila z M_{full} . Za lažje iskanje 3- ciklov sem si pomagala s pomožnim drevesom, ki je vpet grafu M_{full} - to sem označila z M_{tree} . V obeh grafih so vozlišča enako oštevilčena in vozlišče, ki je v drugem grafu koren drevesa, je oštevilčen z 1. Algoritem drevesu M_{tree} v vsakem koraku doda po eno povezavo kl , $kl \ni E_{M_{full}} \setminus E_{M_{tree}}$, ki je spet odstranjena, preden je naslednja dodana. Množica $E_{M_{full}} \setminus E_{M_{tree}}$ je določena s primerjavo matrik M_{full} in M_{tree} : če ima M_{full} na mestu $[k, l]$ vrednost 1, M_{tree} pa 0, to pomeni, da povezava od k do l v grafu predstavljenim z M_{full} obstaja, v M_{tree} pa ne. Z dodajanjem po ene povezave v drevo se na vsakem koraku pojavi natanko en 3-cikel v grafu M_{tree} .

Ko je cikel najden, mu je treba določiti vektor $\vec{t}$. Za to je potrebno primerjati usmerjenost cikla z dejansko smerjo povezave. Koren drevesa in prej opisani točki k in l določajo cikel $1kl$. Za vsako izmed povezav $1k$, kl in $l1$ preverimo ali so ustrezni elementi v M_{tree} (ali M_{full} - na teh mestih imata iste vrednosti) enaki 1. Če so, to pomeni, da ta povezava obstaja, sicer je pa povezava med tema vozliščema očitno obratno obrnjena. V prvem primeru je element vektorja $\vec{t}$ enak 1, v drugem pa -1 .

Po istem principu določimo imena valutnih parov, ki nas v danem koraku zanimajo: če obstaja povezava kl , potrebujemo podatke prodajnih in nakupnih cen k/l , sicer pa podatke l/k . Ko so določeni vsi trije valutni pari, jih združimo v tabeli z enotnim časovnim žigom. Glede na $\vec{t}$ lahko določimo katera cena nas zanima za določen par: če je $t_i = 1$, je prava cena prodajna, sicer nakupna. Te cene določajo $\vec{e}$. Za vsako vrstico tabele oz. za vsako časovno enoto določimo njegovo novo vrednost in izračunamo

$$\exp(\vec{t}^T \cdot \log \vec{e}) - 1.$$

Če je ta vrednost večja od 0, je na trgu arbitraža. Ko je pregledana cela tabela, je na vrsti še obratno usmerjen cikel - pomnožimo $\vec{t}$ z (-1) , določimo nove nakupne in prodajne cene in ponovimo postopek iteracije skozi tabelo podatkov. Dodano povezavo izbrišemo iz M_{tree} in dodamo novo iz $E_{M_{full}} \setminus E_{M_{tree}}$, dokler ne porabimo vseh povezav iz te množice.

S to metodo lahko najdemo vse 3-cikle v grafu, ki vsebujejo koren drevesa. Preostale trikotnike lahko najdemo tako, da zamenjamo koren drevesa, vozlišče, ki je bilo pred tem koren drevesa in njegove povezave izbrišemo in ponovimo zgoraj opisani postopek na $|V(G)| - 1$ točkah. Matrike sosednosti M'_{full} za nov graf G' ni težko dobiti: ker smo koren grafa G oštevilčili z 1, M_{full} izbrišemo prvo vrstico in prvi stolpec in dobimo M'_{full} . Za koren drevesa ponovno izberemo vozlišče oštevilčeno z 1 v novem grafu. Pri taki izbiri bosta prvi stolpec in prva vrstica M'_{full} (in ničle na ostalih mestih) določala ravno drevo s korenem v vozlišču 1. Ko preiščemo vse cikle inducirane z $E_{M'_{full}} \setminus E_{M'_{tree}}$, spet odstranimo koren drevesa in določimo novega

Algoritem 1 Algoritem za iskanje arbitraže

Input:

$data$: podatki posameznih valutnih parov
 M_{full} : matrika sosednosti grafa, ki vsebuje vse povezave
 M_{tree} : matrika sosednosti drevesa
 $prag$: nenegativno število, rotor

Output: $arbitrage$: tabela s podatki o arbitraži

```
1: funkcija NAJDIBITRAZO( $data, M_{full}, M_{tree}, prag$ )
2:   while  $\dim(M_{tree}) > \mathbb{R}^{2 \times 2}$  do
3:      $seznamPov \leftarrow najdiManjkajočePovezave(M_{full}, M_{tree})$ 
4:     for ( $start, end$ ) in  $seznamPov$  do
5:        $M_{tree}[start, end] \leftarrow M_{full}[start, end]$ 
6:        $trojica \leftarrow določiTrojico(M_{tree}, start, end)$   $\triangleright$  določi trojico valut
7:        $\vec{t} \leftarrow določiT(M_{tree}, start, end)$   $\triangleright$  sestavi vektor  $\vec{t}$ 
8:        $data \leftarrow najdiPodatke(trojica)$   $\triangleright$  dobi cene za trojico valut
9:        $cena \leftarrow določiNP(trojica, \vec{t})$   $\triangleright$  določi prodajne ali nakupne cene
10:      for  $i$  in  $data$  do  $\triangleright$  iteriraj po vrsticah
11:         $\vec{e} \leftarrow (data[i, cena_1], data[i, cena_2], data[i, cena_3])^T$ 
12:         $razpon \leftarrow \exp(\vec{t}^T \cdot \log \vec{e}) - 1$ 
13:        if  $razpon > prag$  then
14:           $arbitrage$  dodaj [ $trojica, datum, razpon$ ]
15:        end if
16:      end for
17:       $\vec{t} \leftarrow -\vec{t}$   $\triangleright$  zamenjaj smer
18:      Ponovi vrstice 9 in 10.
19:       $M_{tree}[start, end] \leftarrow 0$   $\triangleright$  izbriši povezavo iz grafa
20:    end for
21:     $M_{full} \leftarrow M_{full}[-1, -1]$   $\triangleright$  Odstrani 1. vrstico in 1. stolpec
22:     $M_{tree} \leftarrow M_{tree}[-1, -1]$ 
23:     $M_{tree}[1, 1] \leftarrow M_{full}[1, 1]$   $\triangleright$  določi vrednosti novega drevesa
24:     $M_{tree}[1, ] \leftarrow M_{full}[1, ]$ 
25:  end while
26: return  $arbitrage$ 
27: end funkcija
```

itd., dokler ne pridemo do grafa na dveh točkah. Končni algoritem je predstavljen v Algoritmu 1, dejanska koda pa v prilogi ??.

Arbitražo sem iskala na istih 12 valutnih parih, na katerih sem delala analize v prejšnjih poglavjih. Njihovo ponazoritev v grafu in pripadajoči začetni matriki M_{full} ter M_{tree} , ki sem ju uporabila pri implementaciji lahko vidimo na sliki 4.1.

4.2.2 Rezultati

V letu 2012 se je pri zgoraj omenjenih valutah arbitraža pojavila 65222-krat, histogram pojavitev lahko vidimo na sliki 4.2. Upoštevajoč le vrednosti večje od 0, je povprečje rotorja znašalo 0.0008, mediana 0.00035, modus pa 0.000211. Najvišja dosežena vrednost se je pojavila 4.1.2012 ob 23 : 00 : 20 na ciklu $AUD-USD-CAD$ in je znašala 0.0104. Arbitraža se je največkrat pojavila na ciklu $EUR-USD-HUF$ (na grafu 4.2 obarvano s temno zeleno barvo), skupaj v kar 60% primerov vseh najdenih arbitraž. Nasprotno pa se arbitraža na ciklu $AUD-CAD-EUR$ v celem letu sploh ni pojavila. Pogostost pojavitev arbitraž v posameznem trikotniku je predstavljena v tabeli 4.2.

trikotnik	št. pojavitev [%]	velikost [%]	najvišja vr.
EUR-USD-HUF	60	71	0.0096
EUR-USD-CHF	11	4	0.0097
EUR-USD-AUD	5	6	0.0096
EUR-USD-CAD	5	4	0.0095
EUR-CHF-CAD	4	3	0.0053
EUR-CHF-AUD	4	5	0.0082
AUD-USD-CHF	3	2	0.0094
USD-CAD-CHF	3	2	0.0049
AUD-USD-CAD	2	1	0.0104
AUD-CHF-CAD	2	2	0.0066
AUD-CAD-EUR	0	0	0

Tabela 4.2: Povzeti rezultati iskanja arbitraže - v drugem stolpcu je izračunan delež arbitraže za določeno trojico valut po številu pojavitev, v tretjem stolpcu pa delež arbitraže glede na skupno vsoto vseh arbitraž, ki so se pojavile v enem letu. V zadnjem je prikazana najvišja vrednost arbitraže na tem trikotniku.

V tabeli 4.3 vidimo valutne pare, urejene padajoče po pogostosti trgovanja. Na vrhu tabele sta para s katerima se je največ trgovalo: EUR/AUD in EUR/CAD . Ravno na ciklu, ki ga sestavljajo te tri valute, se arbitraža v celem letu ni pojavila (tabela 4.2). Naslednja valutna para sta AUD/CHF in AUD/CAD , ki se pojavita na ciklu, ki je bil po številu arbitraž na predzadnjem mestu. Po drugi strani je na

valutni par	količina trgovanja	valutni par	količina trgovanja
EUR/AUD	4,5	USD/CHF	2,9
EUR/CAD	4	USD/HUF	2,8
AUD/CHF	3,6	CHF/CAD	2,6
AUD/CAD	3,6	USD/CAD	2,3
EUR/USD	3,4	EUR/CHF	1,6
USD/AUD	3,1	EUR/HUF	0,5

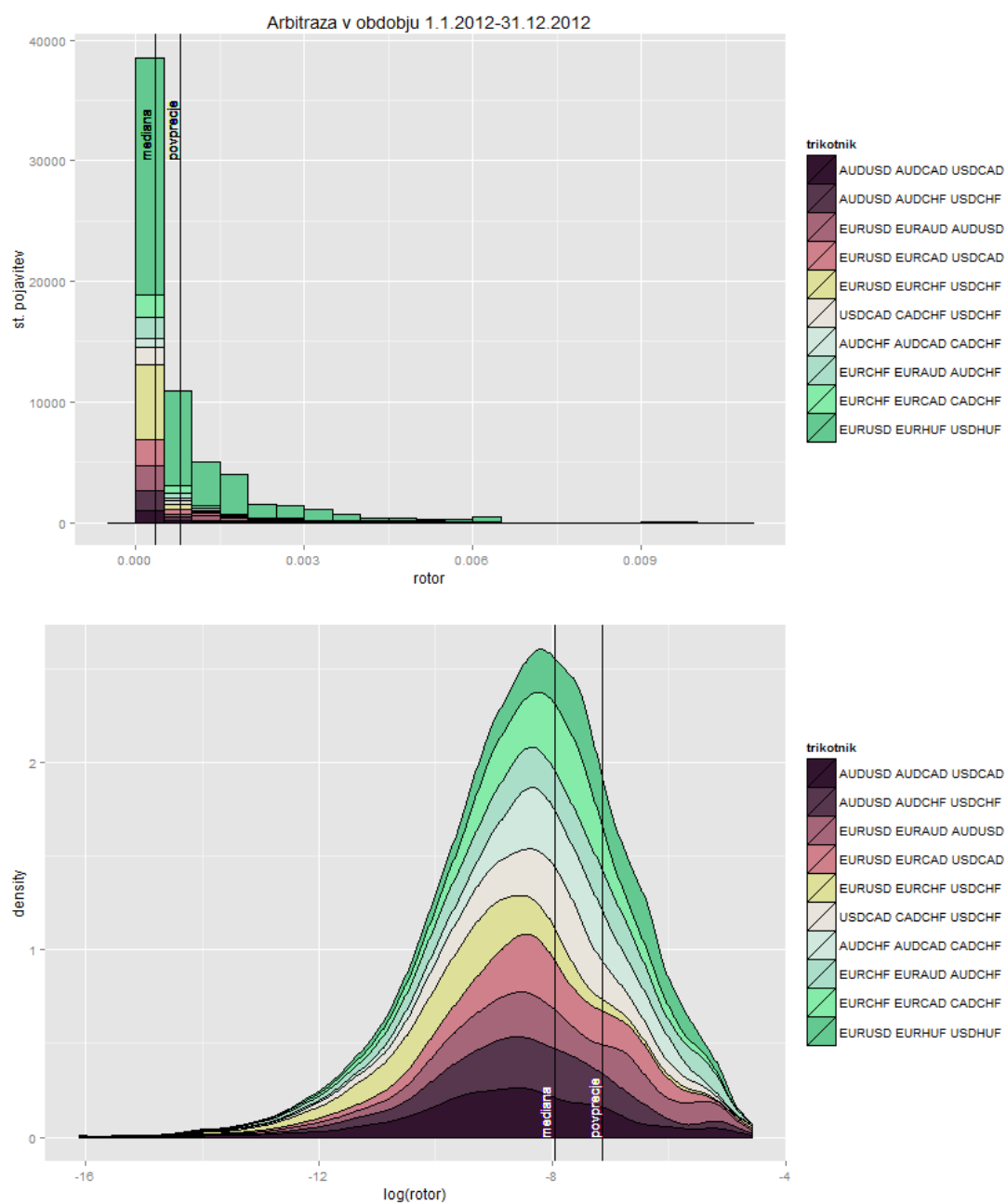
Tabela 4.3: Količina trgovanja s posameznimi valutami podana v padajočem vrstnem redu. Količina trgovanja temelji na količini podatkov dveh let (merjena v GB) valutnega para. Frekvenca trgovanja je zgolj ocena, ki izhaja iz povprečne dnevne količine trgovanja.

čistem dnu tabele pogostosti trgovanja par EUR/HUF , ki se pa prav tako pojavi v trikotniku, na katerem je bilo največ arbitraž. Drugo najmanjšo frekvenco trgovanja ima par EUR/CHF - ta par se tudi pojavi v trikotniku, ki je bil po številu arbitraž na drugem mestu.

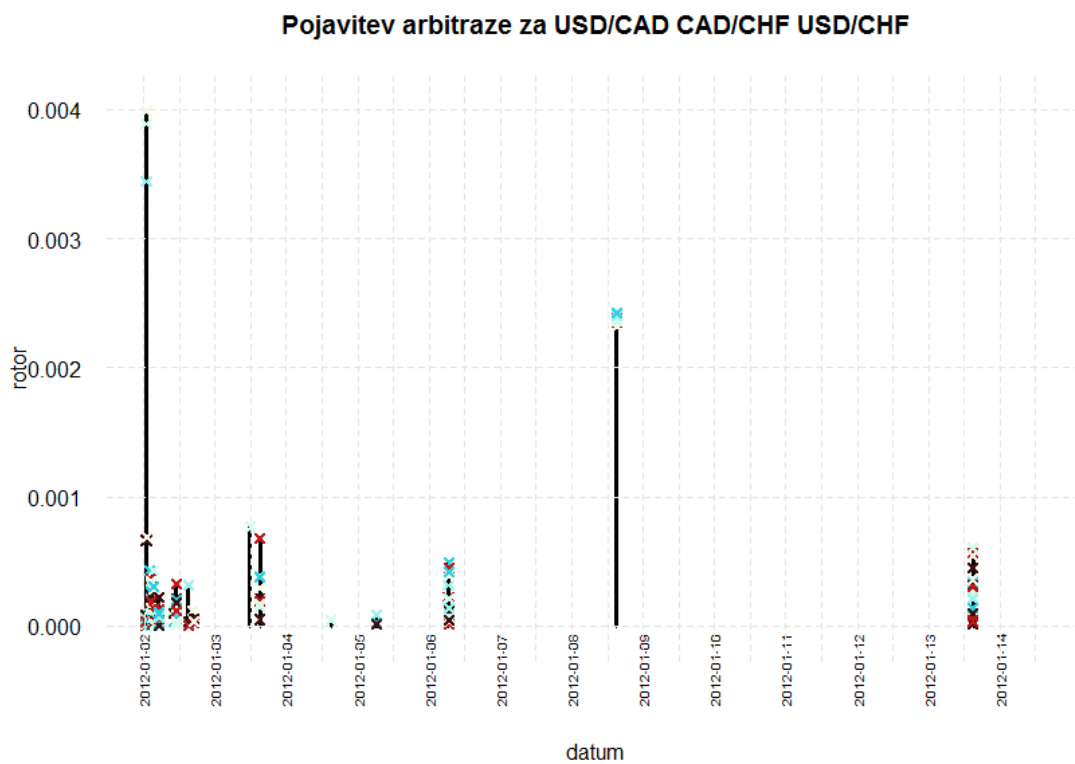
V grafu (4.2) je prikazana gostota porazdelitve pojavitev, vrednosti rotorja so pa logaritmirane za boljši pregled. Ker oblika tega grafa nekoliko spominja na gostoto normalne porazdelitve, sem na logaritmiranih rezultatih naredila Shapiro-Wilkov test, ki pod ničelno hipotezo predpostavlja, da je vrsta normalno porazdeljena. Test je z zelo majhno p-vrednostjo to hipotezo ovrgel.

Arbitraža se v posameznem ciklu ne pojavlja enakomerno v času, ampak v gručah na nekaj-sekundnih intervalih. To je lepo vidno na sliki 4.3, ki prikazuje pojavitve arbitraže na trikotniku, ki ga tvorijo USD, CAD in CHF za obdobje med 2.1.2012 – 15.1.2012. Na istem časovnem obdobju sem si ogledala trikotnik, v katerem je namesto švicarskih frankov avstralski dolar - $USD - CAD - AUD$. V približno polovici primerov, se je arbitraža sočasno pojavila na obeh trikotnikih. Graf je prikazan v prilogi na sliki A.8.

8.1.2012 ob 23 : 00 : 22 se je arbitraža pojavila in obstajala še celih 61 sekund v vrednosti okoli 0.0023, kljub sedemnajstim transakcijam, ki so se vmes zgodile, preden jo je nekdo (ne)namenoma odstranil. Na sliki 4.4 lahko vidimo gibanje cen valutnih parov pol ure pred, med, in pol ure po pojavitvi arbitraže. Območje označeno s sivo barvo sovпада s časom pojavitve arbitraže. Cene CAD/CHF in USD/CHF so v tem času močno variirale, pri USD/CAD pa ni videti nobenih posebnosti.

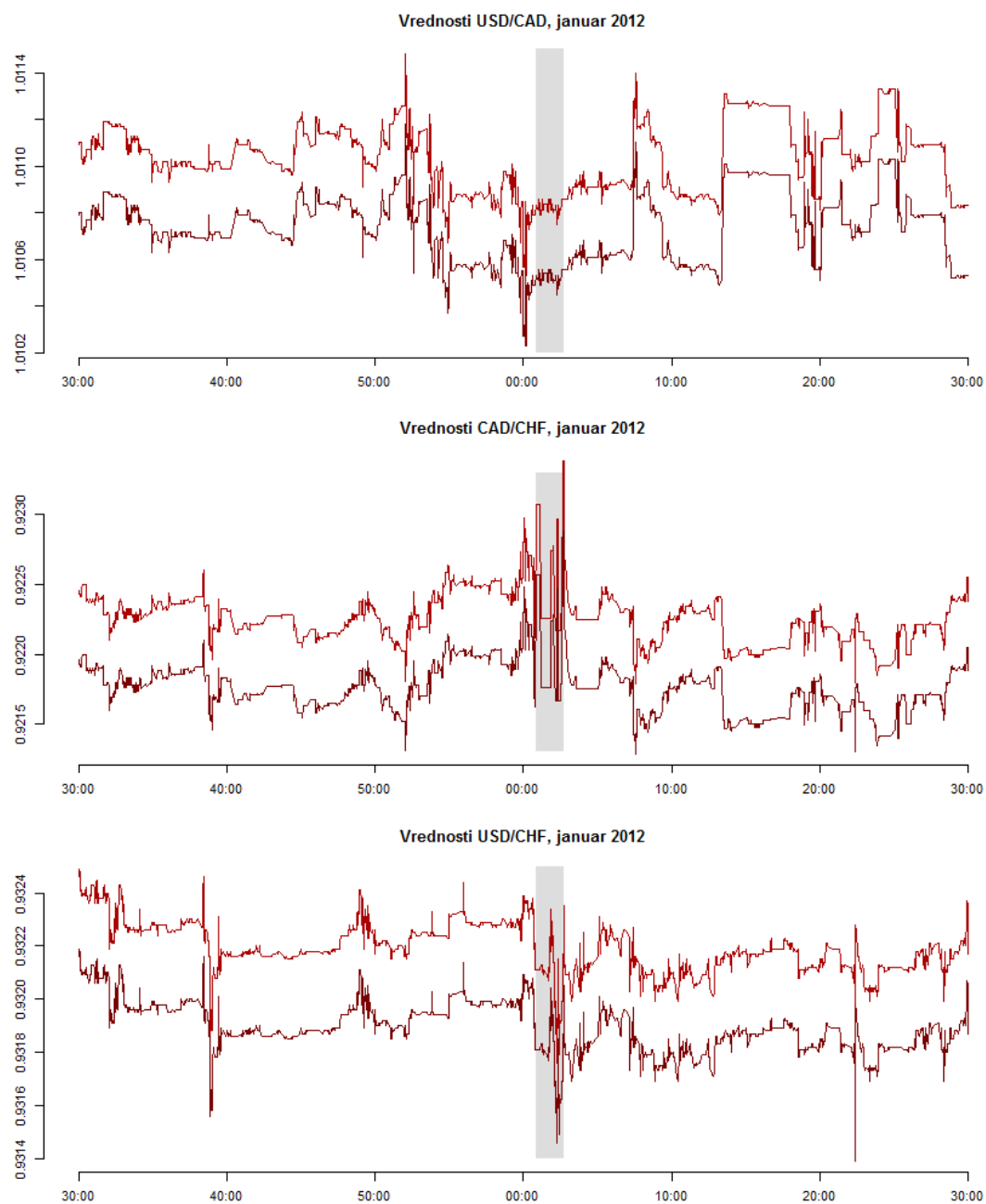


Slika 4.2: Rezultati iskanja arbitraže na grafu s šestimi vozlišči



]

Slika 4.3: Pojavitev arbitraže na trikotniku *USD, CAD, CHF*



Slika 4.4: Gibanje cen v času pojavitve arbitraže

Poglavje 5

Zaključek

V svoji magistrski nalogi sem na valutnem trgu potrdila začetno hipotezo, da se arbitraža občasno pojavlja.

Z analizo korelacije med vrstami, sem prišla do ugotovitve, da se tvorita gruči okoli EUR in USD, ki sta med seboj nasprotno korelirani, tečaji znotraj teh gruč pa pozitivno korelirani.

Rezultati iskanja arbitraž kažejo, da se ta bolj pogosto pojavlja pri menjalnih tečajih, pri katerih je frekvenca trgovanja nižja, kot pri tistih, ki imajo izjemno visoko frekvenco trgovanja. To je bilo predvsem očitno pri iskanju arbitraže na ciklih EUR-USD-HUF in AUD-CAD-EUR. Prvi je primer cikla, na katerem se je pojavilo veliko arbitraž, z valutnimi pari, ki ga sestavljajo, se pa trguje manj pogosto. Drugi cikel sestavljajo pari, s katerimi se trguje bolj visokofrekvenčno in se na njem arbitraža na obdobju celega leta sploh ni pojavila. Tudi pri ostalih ciklih se, čeprav ne tako očitno, pojavlja isti vzorec. To se ujema s teorijo, da so bolj likvidni trgi tudi bolj učinkoviti in je na njih verjetnost za pojavitev arbitraže manjša.

Zagotovo je, da v današnjem času, ko trgovanje poteka večinoma preko računalnikov, udeleženci trga prežijo na arbitraže. Vendar očitno tega ne delajo na vseh trgih - to smo lahko opazili v primeru pojavitve arbitraže na $USD - CAD - AUD$, kjer je arbitraža obstajala 61 sekund, preden jo je nekdo dokončno odstranil. Ali v tem primeru udeleženci trga sploh niso opazili arbitražne priložnosti in so se cene same uravnovesile ali pa so bili arbitražerji previdni iz razlogov kot so opisani v [10], iz danih podatkov ne moremo razbrati. Zamik, ki se pojavlja na trgovalnih platformah pri podajanju informacij zagotovo predstavlja določeno tveganje. Vsekakor bi bilo zanimivo videti, kakšni problemi bi se pojavili, če bi želeli dobljeni algoritem implementirati v dejansko trgovalno strategijo. Zdajšnji algoritem bi lahko razširili iz iskanja trikotne arbitraže na večje cikle in ugotovili kakšen odstotek arbitraž sploh zajamejo trikotne arbitraže. Vendar je ta problem veliko bolj zahteven, kot opisano

iskanje arbitraž na trikotnikih.

Po drugi strani, zdaj ko vemo, da se arbitraža pojavlja, bi se lahko vprašali, kako bi povišali učinkovitost trga. Potrebno bi bilo najti vzroke, zaradi katerih dejansko sploh pride do arbitraž - ali je to prihod informacij na trg ali zgolj splet okoliščin. Nadalje bi bila možna uvedba sistemskih sprememb in regulativ. Alternativno, se lahko čaka, da trg sam najde ravnovesje. Glede na to, da so v [9] pokazali, da sta se količina in čas obstoja arbitraže občutno zmanjšala, odkar se povečuje uporaba algoritmičnega trgovanja, morda vendarle nismo daleč od dejanske učinkovitosti trgov. Do takrat pa moramo pri trgovanju upoštevati neučinkovitost.

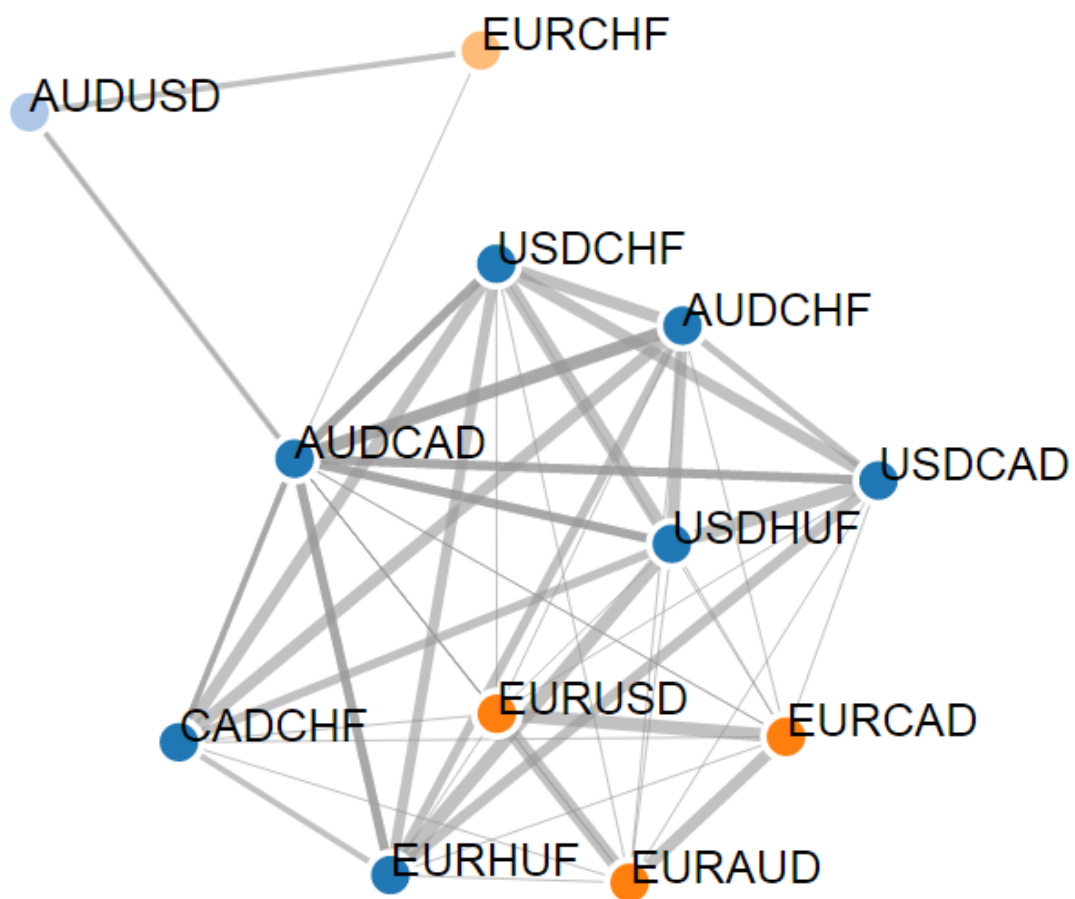
Literatura

- [1] E.F. Fama, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance*, Vol. 25, Issue 2 (1970), 383 – 417.
- [2] B. Malkiel, Efficient market hypothesis, *New Palgrave Dictionary of Money and Finance* London: Macmillan (1992).
- [3] Market Efficiency – Definition and Tests, dostopno na http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/invemgmt/effdefn.html, [ogled 20.9.2014].
- [4] J.C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, 7th Edition, New Yersey: Pearson Prentice Hall (2009).
- [5] Z. Bodie, A. Kane, A.J. Marcus, Investments, 10th Edition, New York: McGraw-Hill Education (2014), 799–803.
- [6] M.S. Joshi, The Concepts and Practice of Mathmatical Finance, Second Edition, Cambridge: Cambridge University Press (2008), str. 26.
- [7] Bank for International Settlements, Foreign exchange turnover in April 2013: preliminary global, *Triennial Central Bank Survey*, 2013.
- [8] B.R. Marshall, S. Treepongkaruna, M. Young, Exploitable Arbitrage Opportunities Exist in the Foreign Exchange Market, Discussion Paper, Massey University, Palmerston North (2007).
- [9] T. Ito, K. Yamada, M. Takayusu, H. Takayusu, Free Lunch! Arbitrage Opportunities in the Foreign Exchange Markets, Working Paper, National Bureau of Economic Research, Cambridge (2012).
- [10] R. Kozhan, W.W. Tham, Execution risk in High-frequency Arbitrage, *Management Science*, Vol. 58, No. 11, 2131 – 2149 (2012).
- [11] Coordinated Universal Time, dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Coordinated_Universal_Time, [ogled 14.11.2014].

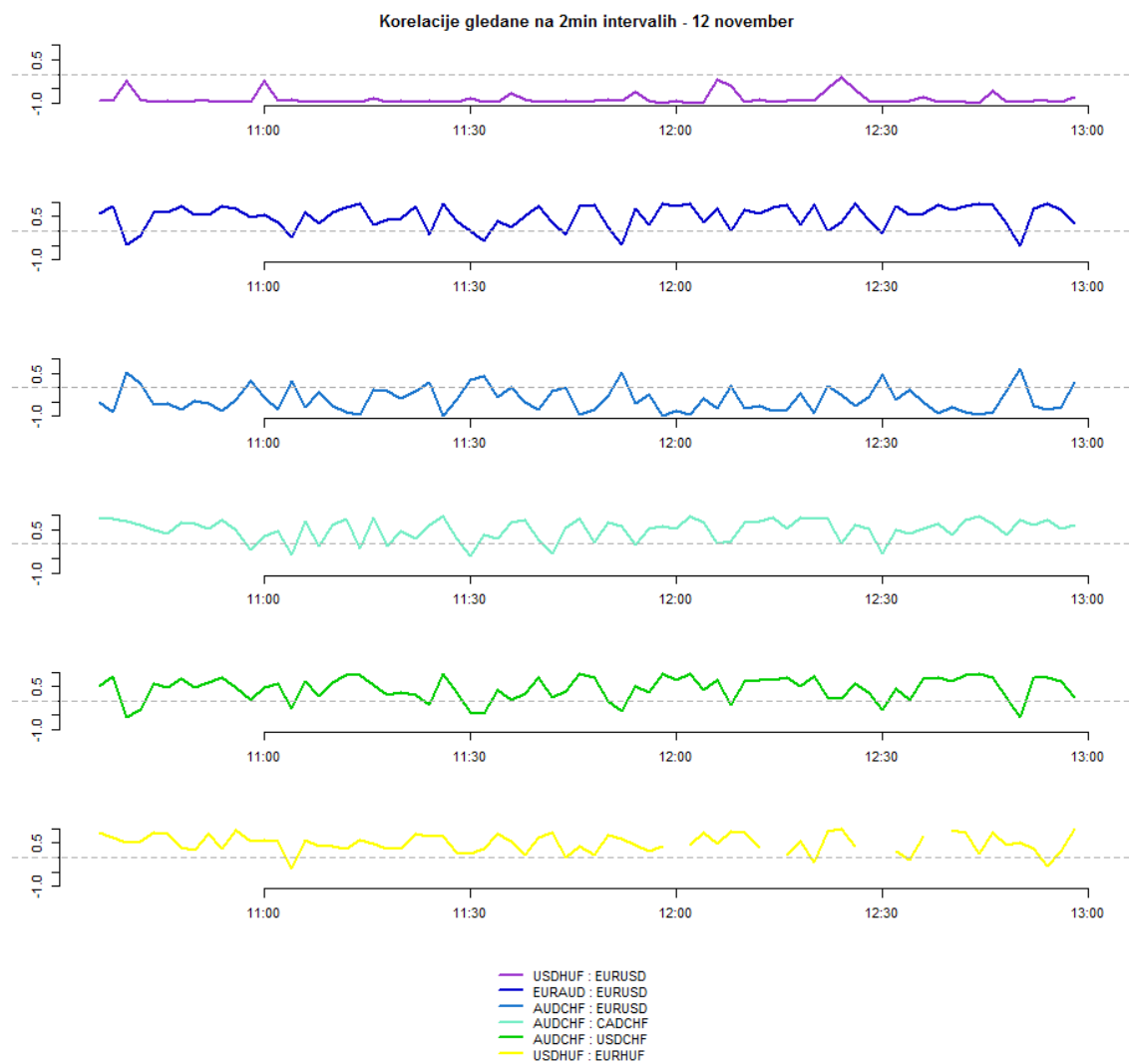
- [12] H. Mader, S.C. Coles, G.P. Nason, Statistics in Volcanology, *Geological Society of London*, Chapter 11: Stationary and non-stationary time series (2006).
- [13] R.F. Engle, C.W.J. Granger, Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, *Econometrica*, Vol. 55 (1987), 251 – 276.
- [14] M.P. Murray, A Drunk and Her Dog: An Illustration of Cointegration and Error Correction, *The American Statistician*, Vol. 48 (1994), No. 1.
- [15] N.S. Jiang, L.-H. Lim, Y. Yao, Y. Ye, Statistical Ranking and Combinatorial Hodge Theory, *Mathematical Programming*, Series B, Vol. 127 (2008), No. 1, 211 – 217.
- [16] N.S. Chok, Pearson's Versus Spearman's and Kendall's Correlation Coefficients for Continuous Data, *M.Sc. Thesis*, University of Pittsburgh: Pennsylvania, ZDA, 2010.
- [17] Cycle space, dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_Rank, [ogled 11.12.2014].

Priloga A

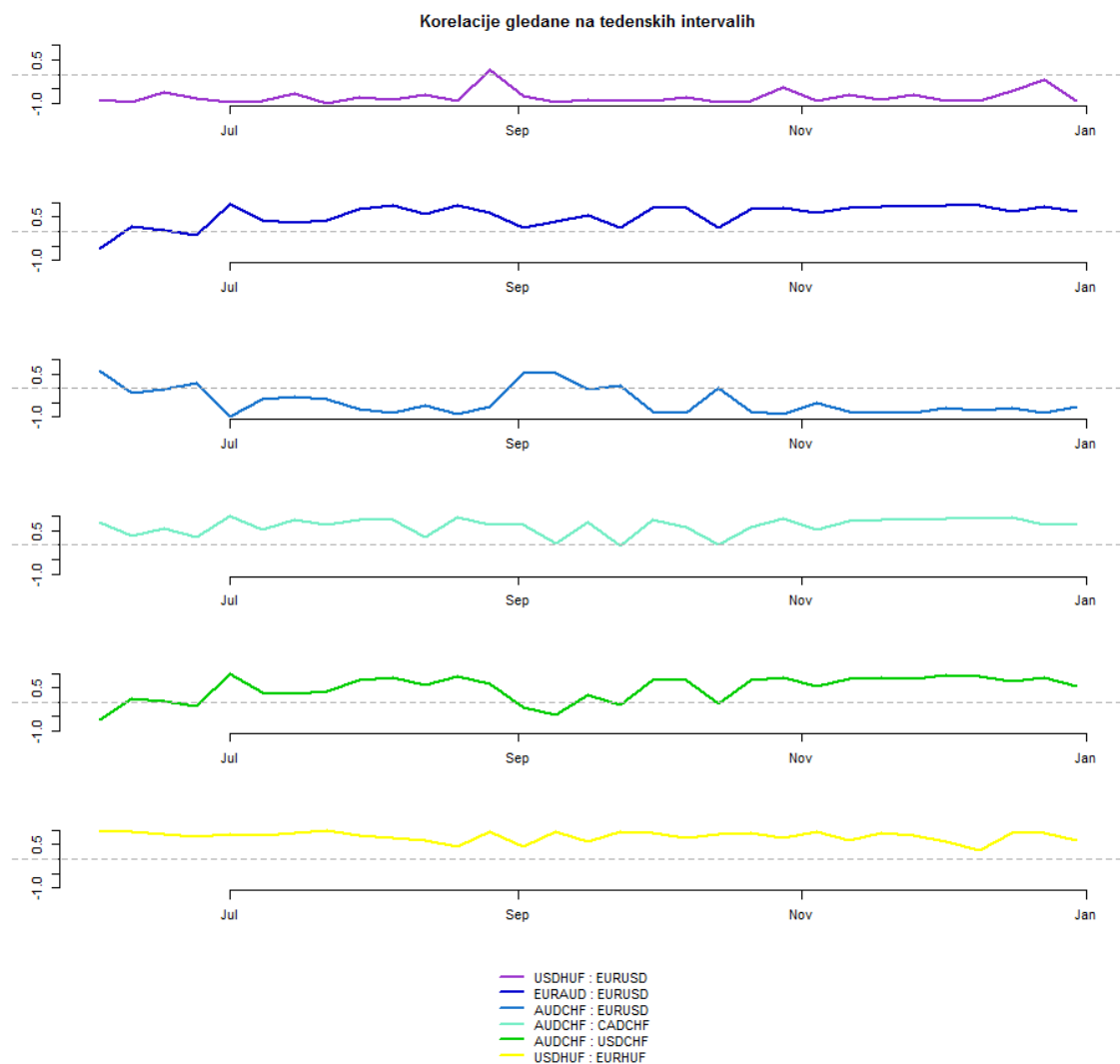
Dodatni grafični prikaz rezultatov



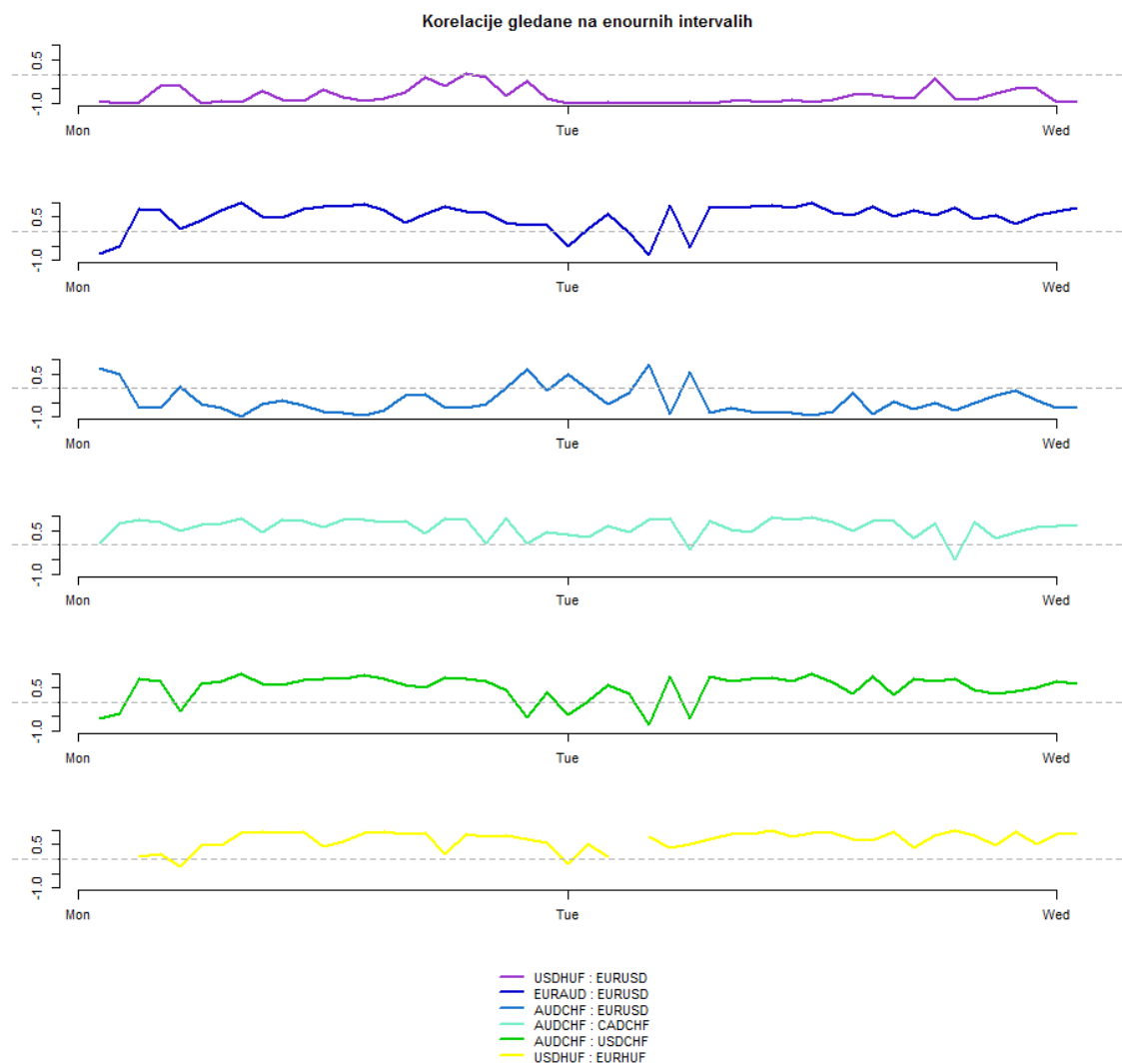
Slika A.1: Korelacija valutnih parov. Različne barve predstavljajo različne gruče, debelina povezave pa je linearno odvisna od moči korelacije.



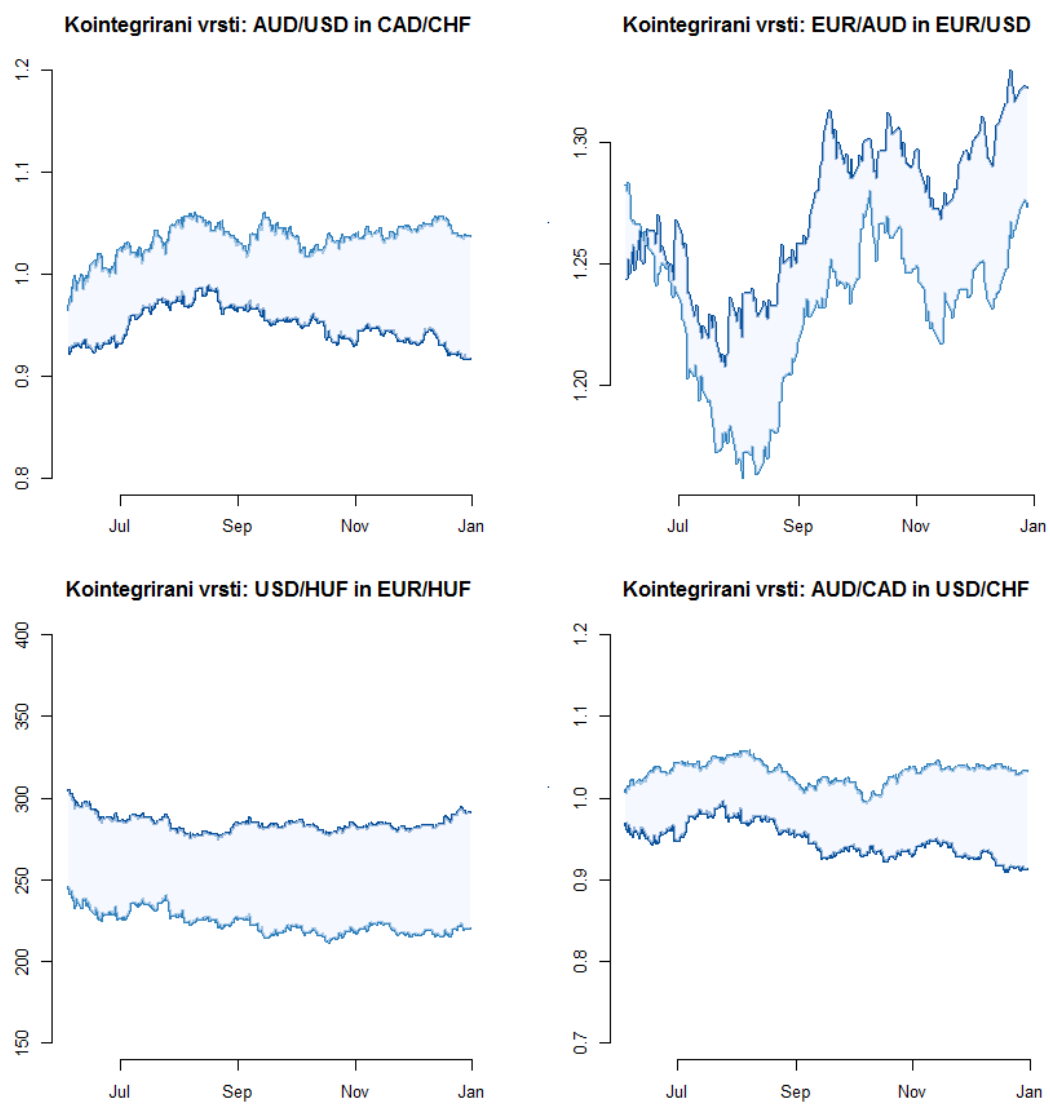
Slika A.2: Korelacije menjalnih tečajev, gledane na dvominutnih intervalih



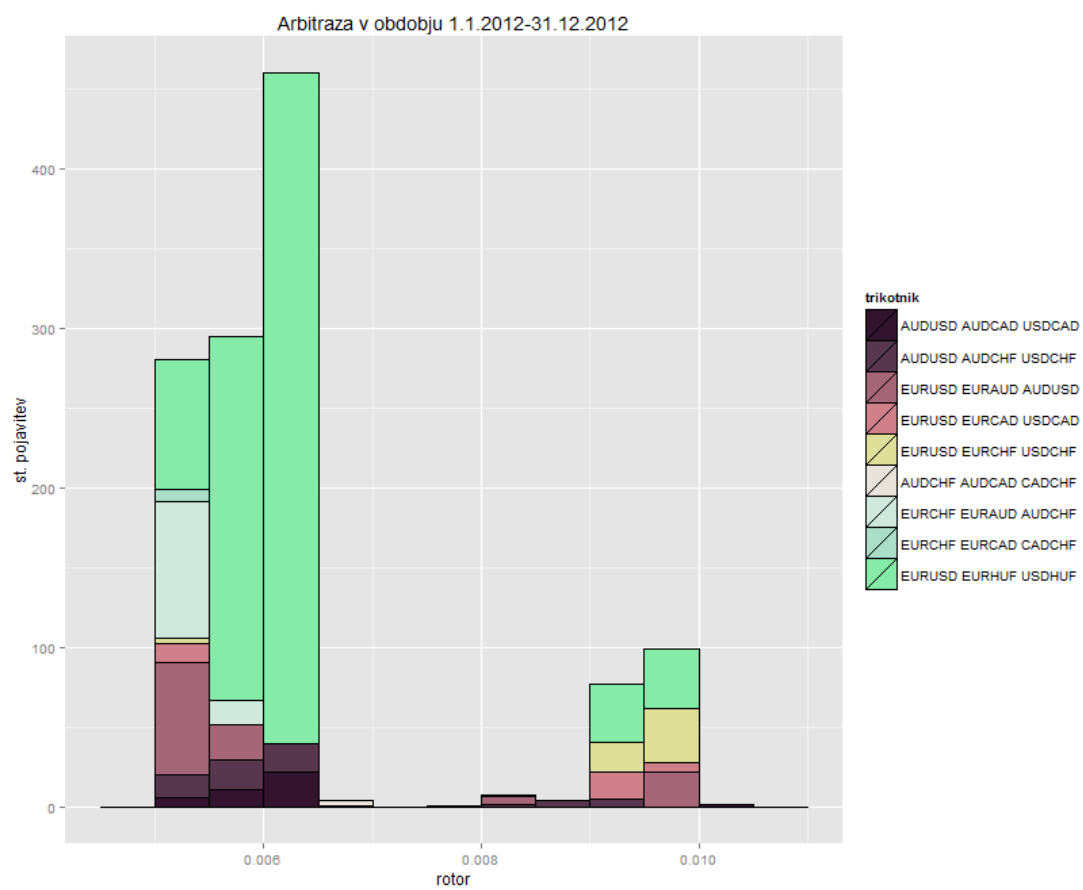
Slika A.3: Korelacije menjalnih tečajev, gledane na tedenskih intervalih



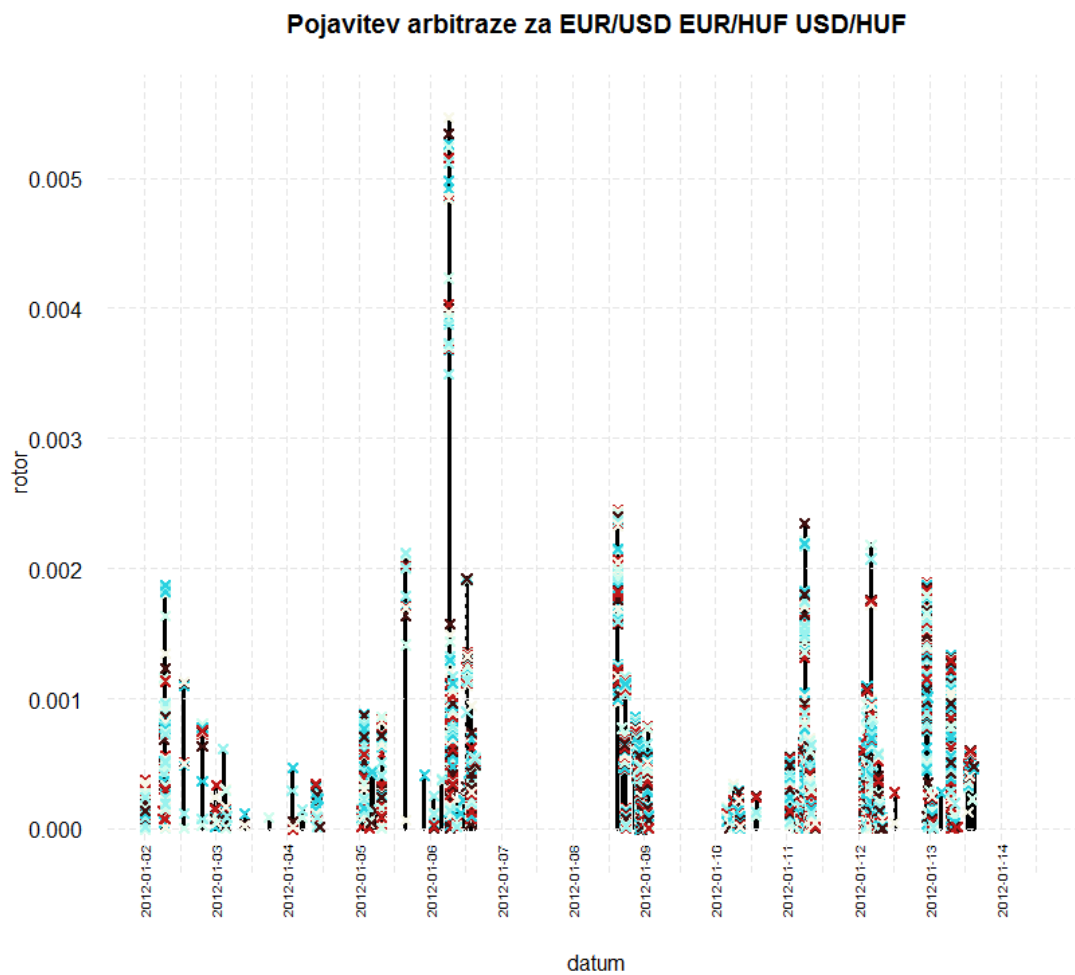
Slika A.4: Korelacije menjalnih tečajev, gledane na enournih intervalih



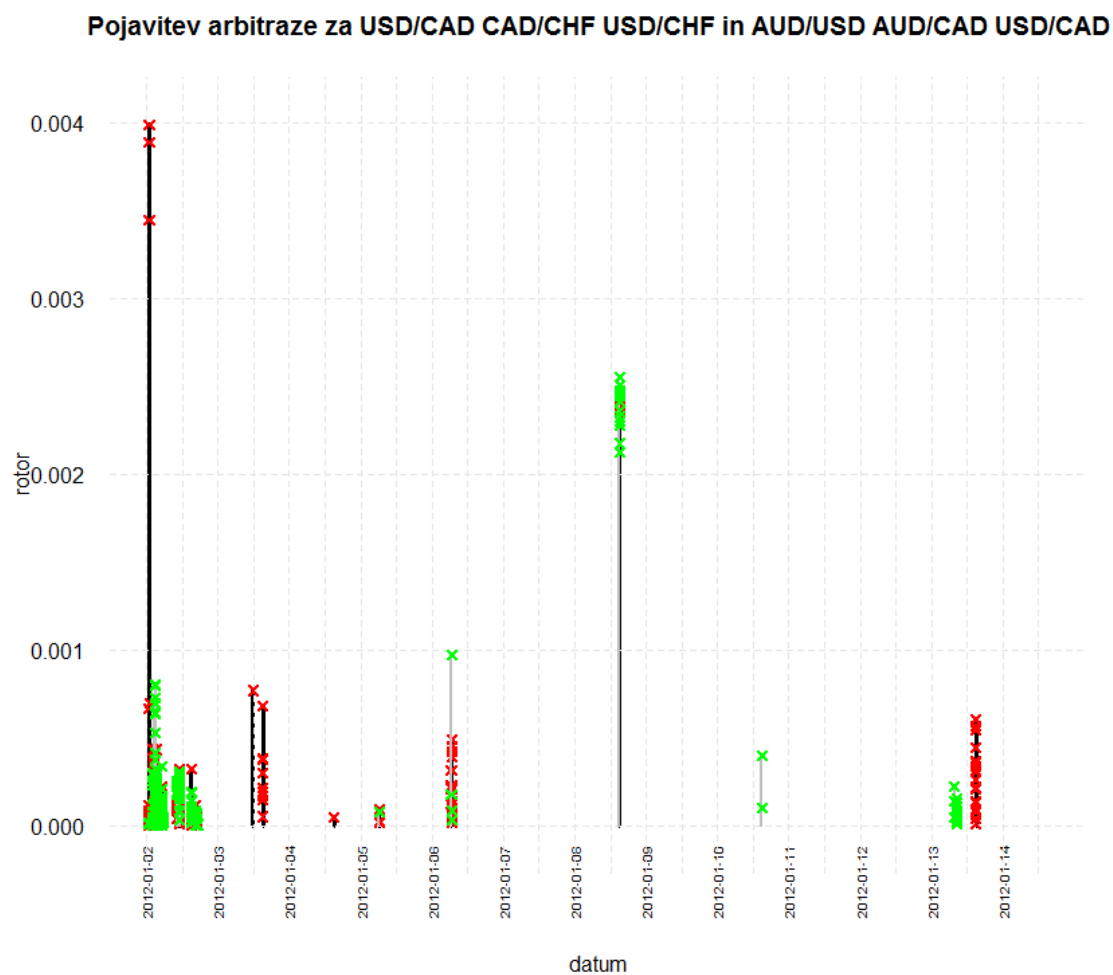
Slika A.5: Grafi kointegriranih vrst



Slika A.6: Histogram pojavitev arbitraže; prikazane so samo vrednosti večje od 0.005



Slika A.7: Graf pojavitve arbitraže na trikotniku $EUR - USD - HUF$ v januarju 2012



Slika A.8: Graf pojavitve arbitraže na trikotnikih $USD - CAD - CHF$ in $USD - CAD - AUD$ v januarju 2012. Arbitraža $USD - CAD - CHF$ je označena z rdeče-črno kombinacijo, $USD - CAD - AUD$ pa z zeleno-sivo. V nekaterih primerih sta se pojavljali sočasno.