UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Karakterizacija dinamskega odziva centrifugalno vzbujanega sistema

Zaključna naloga Razvojno raziskovalnega programa I. stopnje Strojništvo

Andrej Müller

Ljubljana, september 2017

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Karakterizacija dinamskega odziva centrifugalno vzbujanega sistema

Zaključna naloga Razvojno raziskovalnega programa I. stopnje Strojništvo

Andrej Müller

Mentor: prof. dr. Miha Boltežar, univ. dipl. inž.
Somentor: doc. dr. Gregor Čepon, univ. dipl. inž.

Ljubljana, september 2017

VLOGA ZA PREVZEM TEME ZAKLJUČNE NALOGE

Univerzitetni študijski program I. stopnje STROJNIŠTVO – Razvojno raziskovalni program

Št. zaključne naloge *(izpolni Študentski referat)*: UN I/899

Datum prejema vloge v ŠR: 16.8.2017

Podatki o študentu:

Ime in priimek: Andrej Müller Vpisna št. 23160157

Datum, kraj rojstva: 4.12.1995, Ljubljana

Podatki o zaključni nalogi:
Naslov zaključne naloge (slovenski):

Karakterizacija dinamskega odziva centrifugalno vzbujanega sistema

Naslov zaključne naloge (angleški):

Characterization of dynamic response of centrifugal caused system.

Mentor na FS: prof. dr. Miha Boltežar, univ. dipl. inž.

Somentor na FS: doc. dr. Gregor Čepon, univ. dipl. inž.

Veljavnost naslova teme je 6 mesecev od oddaje Vloge za prevzem.

Podpis študenta: Müller

Podpis mentorja:

Spodaj podpisani/-a Andrej Müller študent/-ka Fakultete za strojništvo Univerze v Ljubljani, z vpisno številko 23140147, avtor/-ica pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Karakterizacija dinamskega odziva centrifugalno vzbujanega sistema,

IZJAVLJAM,

1.* a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;

b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;

5. da soglašam z uporabo elektronske oblike pisnega zaključnega dela študija za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija;

8. da dovoljujem uporabo mojega rojstnega datuma v zapisu COBISS.

V Ljubljani, 22. 8. 2017 Podpis avtorja/-ice: ____________________

* Obkrožite varianto a) ali b).

Izvleček

UDK 531.3:534.1(043.2)

Tek. štev.: UN I/899

Karakterizacija dinamskega odziva centrifugalno vzbujanega sistema

Andrej Müller

Ključne besede: nihanje
centrifugalno vzbujanje
sistem več prostostnih stopenj
gibalne enačbe
ravninski model
odziv sistema

V zaključnem delu je karakteriziran dinamski odziv sistema vzbujanega z centrifugalno motnjo. Kot sistem je obravnavan poenostavljen model manjšega vibracijskega transporterja. Predstavljene so teoretične osnove, ki so bile pomembne za razumevanje principa delovanja vibracijskega transporterja. V nadaljevanju je postavljen enostaven fizikalni in matematični model, na osnovi katerih so naknadno postavljene gibalne enačbe, ki so zapisane na osnovi Newtonovih zakonov. Sledilo je preizkušanje vplivov na odziv sistema in njihov popis. Izvedena je primerjava različnih vplivov na odziv sistema.

Abstract

UDC 531.3:534.1(043.2)

No.: UN I/899

Characterization of dynamic response of centrifugally excited system

Andrej Müller

Key words:
oscillation
centrifugal excitation
system with multiple degrees od freedom
equations of motion
plain model
system response

In this work we characterized a dynamic response of a system, which was excited with a centrifugal excitation force. We defined the system as a small simplified vibrating conveyor. We started with the theoretical basis, which were important to understand the working principal of our system. We then continued with forming movement equations based on Newton second law. At the end we tested a variety of different parameters on the system response. After observation and conduction of responses, we compared them and present our findings.

Kazalo

Kazalo slik

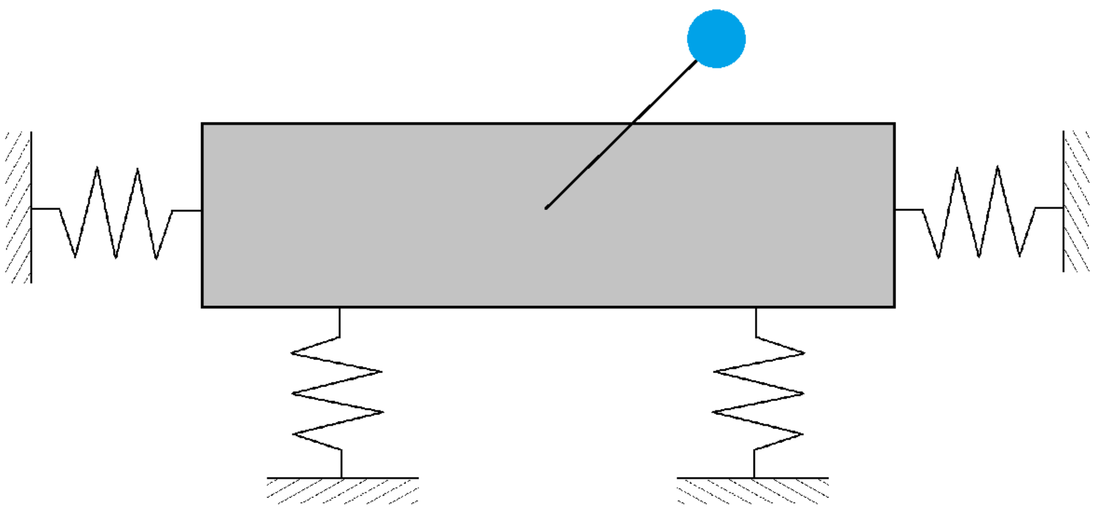
Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
a_r^i	m/s^2	radialni pospešek *i*-tega telesa
d	Ns/m	faktor dušenja
e	m	ekscentričnost mase m_2
F_0	N	amplituda vzbujevalne sile
$F(t)$	N	vzbujevalna sila v odvisnosti os časa
F_C	N	amplituda vzbujevalne centrifugalne sile
F_i	N	*i*-ta sila
F_V	N	sila v vzmeti
g	m/s^2	gravitacijski pospešek
k	N/m	karakteristika vzmeti
L	m	ekscentričnost mase m_2
m_1	kg	masa celotnega nihala
m_2	kg	masa ekscentra
m_i	kg	masa *i*-tega telesa
n	/	število vplivov
t	s	čas
v_0	m/s	začetna hitrost telesa
x	m	odmik od ravnovesne lege, položaj *i*-te točke v horizontalni smeri
X	m	amplituda odziva
x_0	m	začetna pozicija telesa, začetna dolžina vzmeti
X_0	m	amplituda odziva v primeru delovanja sile F_0
$\dot{x}_i$	m/s	hitrost *i*-te točke v horizontalni smeri
$\ddot{x}_i$	m/s^2	pospešek *i*-te točke v horizontalni smeri
$x_P(t)$	m	partikularna rešitev diferencialne enačbe ob času **t**
$x_S(t)$	m	splošna rešitev diferencialne enačbe ob času t
x_{st}	m	statična deformacija
XY	/	absolutni koordinatni sistem
$X_{Ti}Y_{Ti}$	/	težiščni koordinatni sistem *i*-tega telesa
y	m	odmik od ravnovesne lege, položaj *i*-te točke v vertikalni smeri
$\dot{y}_i$	m/s	hitrost *i*-te točke v vertikalni smeri
$\ddot{y}_i$	m/s^2	pospešek *i*-te točke v vertikalni smeri
β	/	dinamični faktor
δ	/	razmernik dušenja
φ	rad	zasuk, fazni zaostanek
$\dot{\varphi}$	rad/s	odvod zasuka po času, kotna hitrost
$\ddot{\varphi}$	rad/s^2	drugi odvod zasuka po času, kotni pospešek
ω	rad/s	kotna hitrost
ω_0	rad/s	lastna krožna frekvenca

1. Uvod

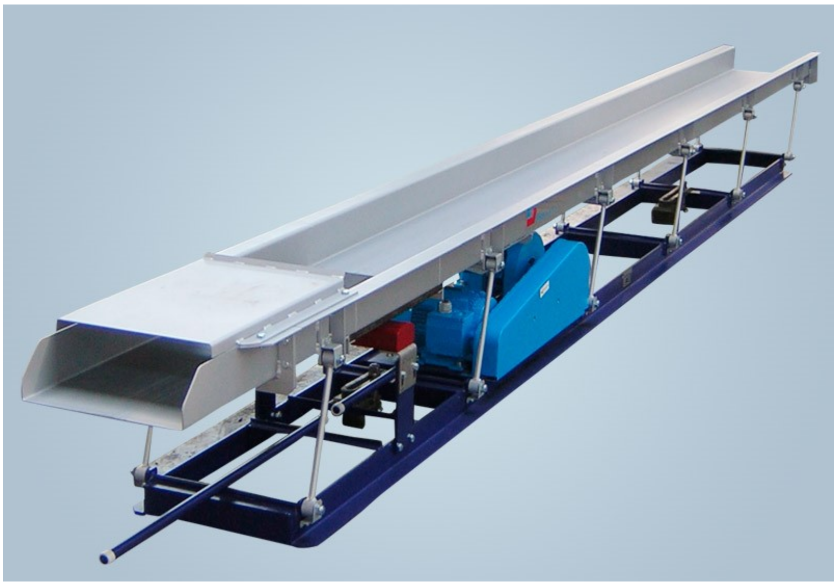
1.1. Opredelitev problema

V industriji in obrtnih delavnicah se pogosto pojavi težava enakomernega transportiranja oz. podajanja materiala, saj velikokrat pride do potrebe po konstantnem dodajanju snovi. Slednje nam omogočajo vibracijski transporterji, zaradi enakomernega oddajanja vibracij [2].



Slika 1.1: Poenostavljen model transporterja

V zaključni nalogi bomo obravnavali primer vibracijskega transporterja, poenostavljenega v enostaven centrifugalno vzbujan sistem s tremi prostostnimi stopnjami. Sistem je sestavljen iz štirih vzmeti enakih togosti, izvora vibracij in telesa z določeno maso [1]. Na sliki 1.1 je predstavljen poenostavljen fizikalni model transporterja, med tem ko je na sliki 1.2 prikazan realen transporter.



Slika 1.2: Transporter v prehrambeni industriji [3]

1.2. Cilji naloge

V zaključni nalogi bomo vibracijski transporter obravnavali kot poenostavljen sistem nihala z več prostostnimi stopnjami. Preučili bomo teoretično podlago, ki je potrebna za uspešno in pravilno analizo.

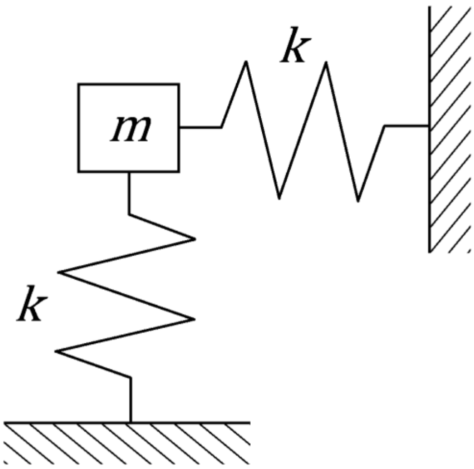
Za postavljen sistem bomo v nadaljevanju predpostavili fizikalni model in nato iz njega zapisali še matematični model, ki temelji na gibalnih enačbah, s katerimi bomo prišli do končne rešitve odziva sistema.

Nato bomo izvedli časovno integracijo gibalnih enačb, pri različnih vrednostih vhodnih parametrov, tj. togosti vzmeti, mase sistema in vzbujevalne mase. Rezultat integracije je odziv sistema iz katerega lahko ugotovimo vpliv posameznega parametra.

Glavni cilj naloge pa je torej ugotovitev in razumevanje vpliva vhodnih parametrov na odziv centrifugalno vzbujenega sistema.

2. Teoretične osnove

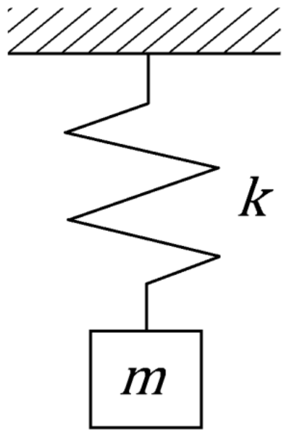
Model vibracijskega transporterja v zaključnem delu obravnavamo kot kombinacijo dveh nedušenih linearnih oscilatorjev v horizontalni in vertikalni smeri (slika 2.1). Predpostavili bomo teorijo o togih telesih, ki nihajo vsiljeno zaradi centrifugalne motnje. Vsa v nadaljevanju predstavljena teoretična izhodišča so povzeta po [1].



Slika 2.1: Kombinacija dveh vzmeti in mase oscilatorja.

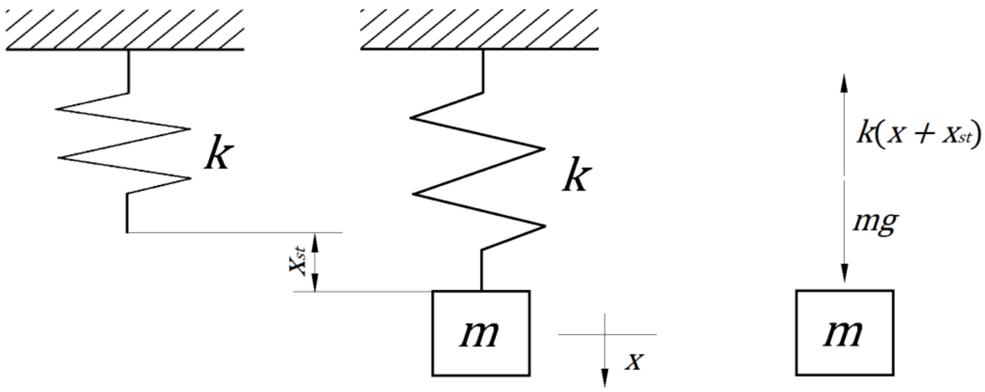
2.1. Teorija linearnega oscilatorja

Linearni oscilator predstavlja sistem z eno prostostno stopnjo, ki ga sestavljata togo telo z maso m in brezmasna vzmet z začetno dolžino x_0 in togostjo k. Vzmet povezuje nepomično podlago in togo telo (slika 2.2).



Slika 2.2: Model linearnega oscilatorja

Na začetku opazovanja je vzmet vpeta samo na podlago in prosto visi. Ker je vzmet zanemarljive mase, se le ta ne deformira. Nato na vzmet obesimo togo telo z maso m. Zaradi telesa z maso m se vzmet deformira za x_{st} kot je prikazano na sliki 2.3.



Slika 2.3: Prikaz sil, ki vplivajo na telo.

Velikost statične deformacije določimo s statičnim ravnotežjem sil:

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F_{ix}} = 0 = k \cdot x_{st} = mg \tag{2.1}$$

Kot je razvidno iz slike 2.3, na telo delujeta dve sili in sicer sila teže ter sila vzmeti, ki nastane kot posledica deformacije vzmeti. Sila teže in sila vzmeti sta ves čas tekom nihanja v ravnotežju.

Vemo, da je vsota vseh sil, ki delujejo na obravnavano telo, enaka produktu mase telesa in njegovega pospeška. Zapišimo sedaj dinamske sile, ki delujejo na telo:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m\ddot{x} = -k(x + x_{st}) + mg \tag{2.2}$$

Ker je vzmet element, ki vedno nasprotuje gibanju, lahko ob upoštevanju enačb (2.1) in (2.2), zapišemo urejeno gibalno enačbo enodimenzijskega linearnega oscilatorja:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

Odziv sistema torej predstavlja koordinata x(t), ki je funkcija časa t in jo dobimo ob rešitvi gibalne enačbe (2.3) in ob upoštevanju začetnih pogojev pomikov in hitrosti, ki so $x(0) = x_0$ in $\dot{x}(0) = v_0$
Ena od osnovnih lastnosti linearnih oscilatorjev je lastna krožna frekvenca ω_0. Ta je odvisna od mase oscilatorja in karakteristike vzmeti. Če torej enačbo (2.4) delimo z maso, dobimo:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.4}$$

In nadalje:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{2.5}$$

Ko imamo gibalno enačbo popolnoma definirano, lahko določimo funkcijo poti iz gibalne enačbe. Za rešitev določimo nastavek:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) \tag{2.6}$$

Spremenljivki A_1 in A_2 sta konstanti, ki jih je potrebno določiti. Določimo ju iz zgoraj navedenih začetnih pogojev. Za določitev konstante A_1 upoštevamo prvi začetni pogoj:

$$x(0) = A_1 \cos(\omega_0 0) + A_2 \sin(\omega_0 0) = A_1 = x_0 \tag{2.7}$$

Enačbo (2.6) odvajamo po času tako, da izrazimo hitrost sistema:

$$\dot{x}(t) = -A_1 \sin(\omega_0 t) \cdot \omega_0 + A_2 \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0 \tag{2.8}$$

In ob upoštevanju drugega začetnega pogoja dobimo:

$$\dot{x}(0) = -A_1 \sin(\omega_0 0) \cdot \omega_0 + A_2 \cos(\omega_0 0) \cdot \omega_0 = A_2 \cdot \omega_0 = v_0 \tag{2.9}$$

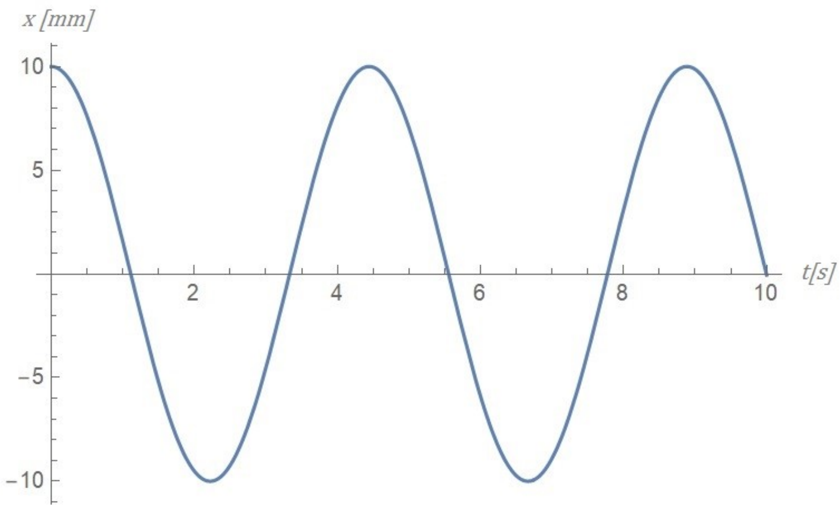
Vrednost konstante A_2 je torej:

$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \tag{2.10}$$

Nastavek za rešitev gibalne enačbe imamo sedaj dvakrat odvajan in s tem določeni nepoznani konstanti. Potrebno je le še vstaviti dobljene vrednosti konstant nazaj v prvotni nastavek za rešitev:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{2.11}$$

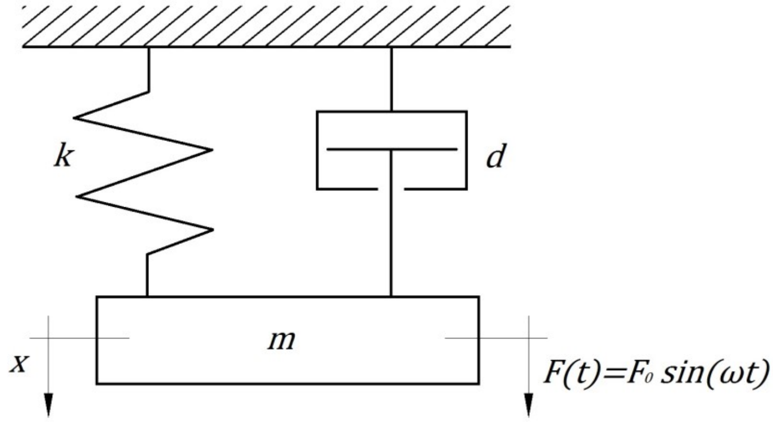
Enačba (2.11) nam podaja gibanje nedušenega linearnega enoprostostnega mehanskega oscilatorja. Na sliki 2.4 pa je prikazana še pot težišča togega telesa v horizontalni smeri v odvisnosti od časa.



Slika 2.4: Pot težišča v odvisnosti od časa.

2.2. Vsiljeno nihanje sistema

Če bi z oscilatorjem, opisanem v podpoglavju 2.1, naredili eksperiment, bi hitro opazili, da bi po določenem času sistem prenehal z nihanjem. To se zgodi zaradi upora zraka in izgube energije, ki je posledica predvsem dušenja. Če torej želimo, da sistem niha s konstantno amplitudo, mu moramo stalno dovajati energijo. To pomeni, da sistem niha vsiljeno. Vsiljeno nihanje sistema se torej pojavi, kadar nanj stalno deluje neka dodatna zunanja sila F(t) (slika 2.5).



Slika 2.5: Model sistema, ki je harmonično vzbujan.

Če sedaj primerjamo sliko 2.1 in sliko 2.5 vidimo, da je tu dodan še faktor dušenja d in dodatna vzbujevalna sila F(t), ki je odvisna od amplitude vzbujevalne sile F_0 in frekvence vzbujanja ω. S pomočjo drugega Newtonovega zagona lahko sedaj zapišemo vsoto sil:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \tag{2.12}$$

Sedaj, ko smo gibalno enačbo (2.12) sistema postavili, nas zanima še odziv. Ker je gibalna enačba dif. enačba drugega reda in je nehomogena, je njena rešitev seštevek splošne x_s(t) in partikularne rešitve x_p(t):

$$x(t) = x_s(t) + x_p(t) \tag{2.13}$$

Za sisteme, ki nihajo lastno dušeno velja, da gre odziv s časom proti nič [1]. To pomeni, da lahko splošno rešitev zanemarimo in iščemo le partikularno:

$$x(t) = x_p(t) \tag{2.14}$$

Ker sistemi, ki nihajo vsiljeno, s svojo frekvenco sledijo vzbujevalni, lahko postavimo nastavek za partikularno rešitev v ustaljenem stanju. Predvidimo, da bo sistem nihal z neko novo amplitudo *X*, frekvenco odziva ω in faznim zaostankom φ:

$$x(t) = X\sin(\omega t - \varphi) \tag{2.15}$$

Da bi zgornji nastavek lahko uporabili v osnovni gibalni enačbi, ga moramo dvakrat po času odvajati:

$$\dot{x}(t) = X\omega\cos(\omega t - \varphi) \tag{2.16}$$

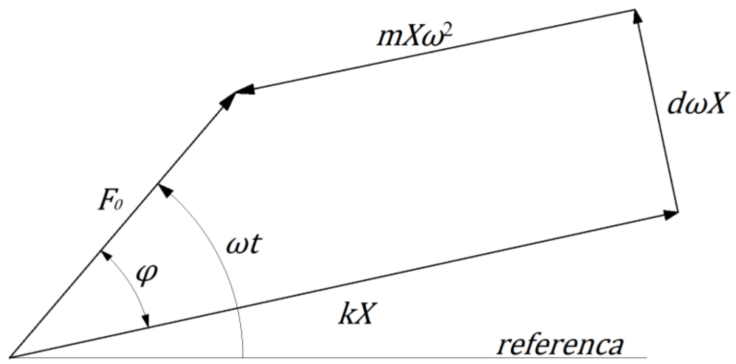
Izračunamo še drugi odvod:

$$\ddot{x}(t) = -X\omega^2\sin(\omega t - \varphi) \tag{2.17}$$

Sedaj lahko enačbi (2.16) in (2.17) uporabimo in ju vstavimo v osnovno gibalno enačbo našega sistema (2.12):

$$-mX\omega^2\sin(\omega t - \varphi) + d\omega X\cos(\omega t - \varphi)\,\omega + kX\sin(\omega t - \varphi) = F_0\sin(\omega t) \tag{2.18}$$

Na sliki 2.6 je prikazan diagram dinamičnega ravnotežja sil, ki delujejo na sistem.



Slika 2.6: Diagram dinamičnih sil na sistem.

Amplituda *X* se na levi strani enačbe (2.18) pojavi pri vseh treh členih. Če jo izpostavimo in enačbo še nadalje uredimo, lahko ob upoštevanju zvez med kotnimi funkcijami ter dinamičnega ravnotežja sil na sistemu dobimo enačbo amplitude *X* (slika 2.6):

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (d\omega)^2}} \tag{2.19}$$

Če si sedaj pobližje pogledamo dobljeno enačbo (2.19), hitro opazimo, da amplituda odziva narašča z amplitudo vzbujevalne sile in pada z večanjem vzbujevalne frekvence. Enako lahko določimo še fazni zaostanek φ (slika 2.6):

$$\varphi = \arctan\frac{d\omega}{k - m\omega^2} \tag{2.20}$$

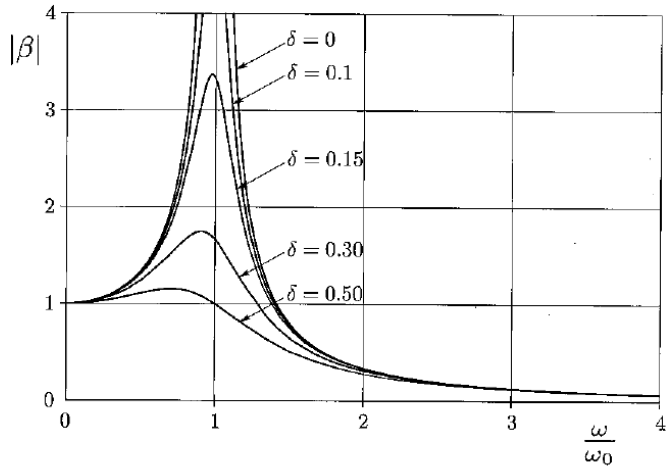
Izraza za odziv po navadi v praksi zapišemo brezdimenzijsko. Desni strani obeh delimo s togostjo k in upoštevamo povezave:

$$\frac{m\omega^2}{k} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \; in \; \frac{d\omega}{k} = \frac{d\omega}{k}\frac{d_{kr}}{d_{kr}} = 2\delta\frac{\omega}{\omega_0} \tag{2.21}$$

Če sedaj izraza iz enačbe (2.21) vnesemo v enačbi (2.19) in (2.20), dobimo:

$$\frac{X}{X_0} = \beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{2.22}$$

Izraz, dobljen v enačbi (2.22), nam opredeljuje dinamični faktor β sistema. Ta nam pove kako se spreminja statični faktor glede na razmerje frekvenc in razmernika dušenja δ. Razmernik dušenja je definiran kot količnik med realnim in kritičnim faktorjem dušenja sistema. Na sliki 2.7 je prikazano kako vpliva odvisnost med dinamičnim faktorjem in razmerja med vzbujevalno ter lastno frekvenco sistema na razmernik dušenja.

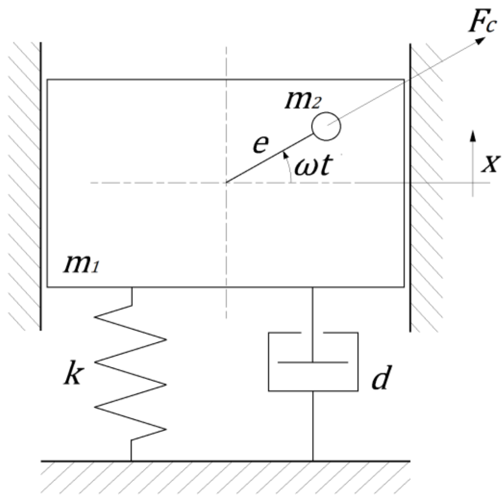


Slika 2.7: Vpliv dinamičnega faktorja in razmerja frekvenc na razmernik dušenja [1]

Vidimo, da pri določeni vrednosti razmernika dušenja ob povečevanju vzbujevalne frekvence sistema glede na lastno, dinamični faktor najprej narašča in nato spet pada (slika 2.7).

2.3. Vsiljeno nihanje sistema zaradi centrifugalne motnje

V realnih sistemih je vzbujevalna frekvenca večinoma centrifugalnega izvora npr. motor z odmično gredjo. To predstavimo s telesom mase m_2 in ekscentrom e, ki je pripeto na opazovano telo z maso m_1 slika (2.8). Manjše telo torej kroži z določeno hitrostjo ω okoli osi, ki poteka skozi težišče opazovanega telesa, in tako skupaj tvorita sistem, ki ga opazujemo. Če bi v nekem trenutku analizirali deviacijske masne vztrajnostne momente mase m_2 glede na os vrtenja, bi hitro ugotovili, da so različni od nič, kar pa privede do vibracij.



Slika 2.8: Centrifugalno vzbujan sistem

Na sliki 2.8 sila F_c predstavlja amplitudo vzbujevalne frekvence. Odvisna je od mase m_2, ekscentra e in kotne hitrosti sistema. Zapišemo enačbo radialnega pospeška za kroženje togega telesa:

$$a_r{}^{m_2} = e\,\omega^2 \tag{2.23}$$

Uporabimo povezavo med silo in pospeškom iz drugega Newtonovega zakona:

$$a_r{}^{m_2} = \frac{F_c}{m_2} \tag{2.24}$$

In na koncu uporabimo še izraze (2.23) in (2.24), ter izraz radialne sile F_c:

$$F_c = m_2\, e\, \omega^2 \tag{2.25}$$

Enačbo (2.25) sedaj vstavimo v gibalno enačbo (2.12) in F_0 zamenjamo z F_c:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = m_2\, e\, \omega^2 \tag{2.26}$$

Ker gre pri centrifugalni motnji le za vrsto vsiljenega nihanja, lahko zopet uporabimo nastavek za rešitev kot v enačbi (2.15). Rešitev gibalne enačbe sistema (2.26) iščemo ob enaki predpostavki kot prej. Torej v stacionarnem stanju zapišemo:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \varphi) \tag{2.27}$$

Za določitev faznega zaostanka in amplitude sistema lahko uporabimo enačbi (2.19) in (2.20). Zapišemo torej izraz za amplitudo sistema vzbujanega s centrifugalno motnjo in F_0 zamenjamo z izrazom za F_c:

$$X = \frac{m_2\, e\, \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (d\omega)^2}} \tag{2.28}$$

In faza glede na enačbo (2.20):

$$\varphi = \arctan \frac{d\omega}{k - m\omega^2} \tag{2.29}$$

Da bi lahko različne sisteme lažje primerjali med seboj in jih vrednotili, v praksi izraza (2.25) in (2.26) zapišemo brezdimenjzijsko:

$$\frac{X}{\frac{m_2\, e}{m_1}} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{2.30}$$

In v enačbi (2.29) izrazimo še fazo:

$$\varphi = \arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.31}$$

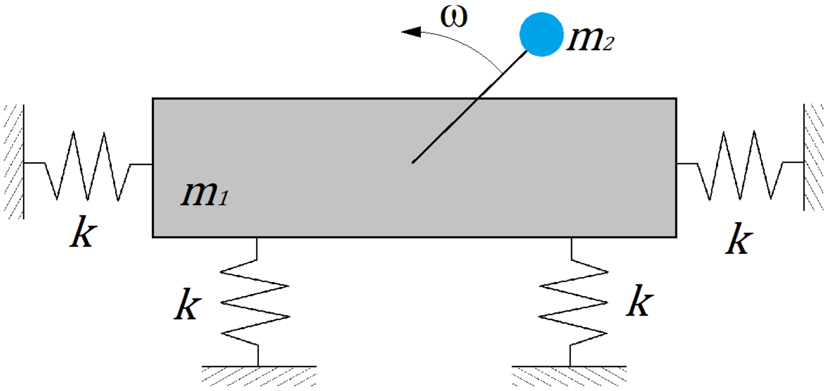
Iz zgoraj zapisanih oblik enačb lahko sedaj razberemo kaj vpliva na odziv sistema. S povečevanjem mase manjšega telesa in njegovega ekscentra, se povečuje tudi amplituda odziva sistema. Na enak način vpliva razmerje frekvenc, obratno pa na odziv vpliva masa večjega telesa. Če sedaj pogledamo še enačbo za fazni zaostanek (2.26), se povečuje ob povečevanju razmernika dušenja. Ravno nasprotno kot pri amplitudi na fazo vpliva razmerje frekvenc. Pri večanju vzbujevalne frekvence se faza vedno bolj zmanjšuje. Teoretično faznega zaostanka, ko je razmerje frekvenc enako neskončno, ni. V realnosti pa je to nemogoče. To pa zato, ker imamo vedno opravka s potovanjem motnje skozi material od izvira do točke, kjer ta motnja povzroča vibracije. Pri nas je to vzmet.

3. Dinamski odziv vibracijskega transporterja

Z uporabo predpostavk, katere smo določili v drugem poglavju in na podlagi teorije o vsiljenem centrifugalnem nihanju sistema, bomo določili gibalne enačbe obravnavanega poenostavljena modela vibracijskega transporterja. Nato bomo izvedli časovno integracijo, ter s tem določili odziv transporterja. Pogledali bomo kako in katere spremenljivke vplivajo na naš sistem in na koncu izvedli še optimizacijo. Poizkusili bomo torej določiti primerne vrednosti spremenljivk, da bi sistem imel čim večji izkoristek in s tem manjšo porabo električne moči.

3.1. Ravninski poenostavljen model sistema

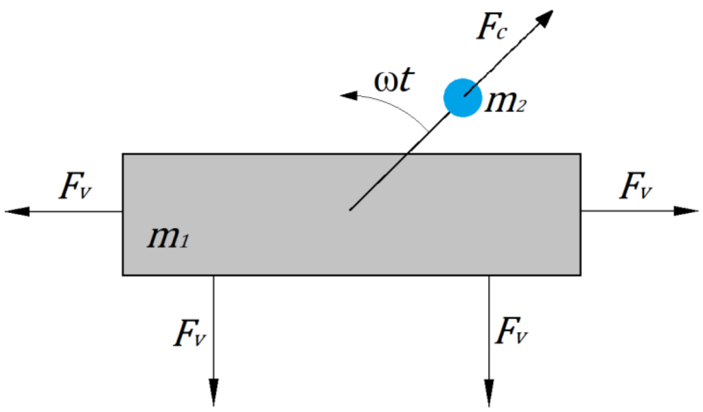
Za reševanje problema transporterja smo določili pravokotnik, ki predstavlja naš transporter z maso m_1. Ta je pritrjen na okolico z štirimi vzmetmi enake togosti. Nato smo telo z mnogo manjšo maso m_2 z majhnim drogom pripeli v težišče pravokotnika, pri tem pa smo maso droga zanemarili (slika 3.1). Za vsa telesa uporabljena pri izgradnji modela velja predpostavka o togih telesih.



Slika 3.1: Shematski prikaz poenostavljenega modela.

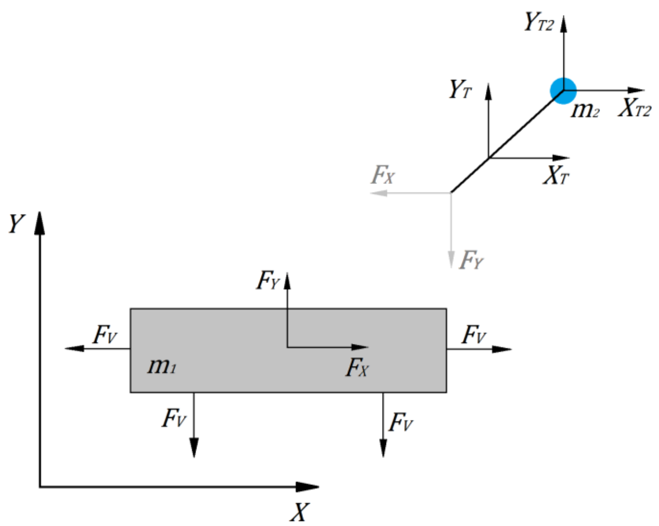
3.1.1. Zapis in rešitev gibalnih enačb

Iz slik 3.1 lahko naredimo prerez sistema in določimo sile, ki delujejo na sistem. Ker so togosti vseh štirih vzmeti enake, pomeni, da bodo na pravokotnik delovale tudi enake sile. Vzbujevalna sila, ki povzroča nihanje sistema, pa vedno deluje iz sistema navzven, in sicer pravokotno na krožnico po kateri se giblje kroglica.



Slika 3.2: Sile, ki delujejo na sistem.

Ker bomo v nadalje probleme reševali z uporabo sil je potrebno sistem togih teles na sliki 3.2 razdeliti in obravnavati vsako telo posebej.



Slika 3.3: Sistem togih teles razdeljen na dve samostojni togi telesi.

Na sliki 3.3 je prikazan sistem, ki smo ga razdelili na osnovne komponente in za vsako posebej označili sile, ki delujejo na sistem. Označen je absolutni koordinatni sistem XY, sile in njihove smeri, težiščni koordinatni sistem drugega telesa $X_{T2}Y_{T2}$ in težiščni koordinatni sistem celotnega sistema X_TY_T.

Če sedaj pričnemo s postavljanjem gibalnih enačb, najprej zapišemo vse sile, ki delujejo na pravokotnik v horizontalni:

$$m_1\ddot{x} = -2kx + F_x \tag{3.1}$$

in v vertikalni smeri:

$$m_1\ddot{y} = -2ky + F_y \tag{3.2}$$

Sili F_x in F_y predstavljata horizontalno in vertikalno komponento sile F, ki se pojavi zaradi rotirajoče mase. Določimo ju kot vsoti sil na telo z maso m_2:

$$m_2\ddot{x_T} = -F_x \tag{3.3}$$

in:

$$m_2\ddot{y_T} = -F_y \tag{3.4}$$

Pot težišča sistema v horizontalni smeri x_T in vertikalni smeri y_T, pa določimo kot vsoto trenutne lokacije celotnega sistema in produkta med radijem krožnice, po kateri kroži telo 2, in pripadajočo kotno funkcijo. Torej:

$$x_T = x + L\cos(\varphi) \tag{3.5}$$

in:

$$y_T = y + L\sin(\varphi) \tag{3.6}$$

Da bi lahko prišli do rešitve problema, moramo sedaj enačbi (3.5) in (3.6) dvakrat odvajati:

$$\ddot{x}_T = -L\,\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) - L\,\ddot{\varphi}\sin(\varphi) \tag{3.7}$$

$$\ddot{y}_T = -L\,\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + L\,\ddot{\varphi}\cos(\varphi) \tag{3.8}$$

Če pogledamo dobljena odvoda po enačbah (3.7) in (3.8), opazimo, da se pojavi drugi odvod kota zasuka, torej kotni pospešek. Gibanje transporterja analiziramo v ustaljenem stanju. Predpostavili smo, da se med obratovanjem v stacionarnem stanju kotna hitrost ne spreminja. To pa pomeni, da je kotni pospešek enak 0.

Enačbi (3.7) in (3.8) lahko torej poenostavimo v:

$$\ddot{x}_T = -L\,\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \tag{3.9}$$

in:

$$\ddot{y}_T = -L\,\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \tag{3.10}$$

Sedaj lahko enačbi (3.9) in (3.10) vstavimo v izraza za horizontalno in vertikalno komponento sile, ki jo povzroča rotirajoče telo na pravokotnik. Nato pa še dobljeno vnesemo v gibalni enačbi pravokotnika (3.1) in (3.2). Za *x*-smer velja:

$$m_1\ddot{x} = -2kx + m_2(\ddot{x} + L\,\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) \tag{3.11}$$

za *y*-smer, pa velja:

$$m_1\ddot{y} = -2ky + m_2(\ddot{y} + L\,\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \tag{3.12}$$

Ko smo prišli do gibalnih enačb, jih je potrebno le še urediti:

$$(m_1 - m_2)\ddot{x} + 2kx = m_2\,L\,\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \tag{3.13}$$

Enako storimo še z enačbo v vertikalni smeri in dobimo:

$$(m_1 - m_2)\ddot{y} + 2ky = m_2\,L\,\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \tag{3.14}$$

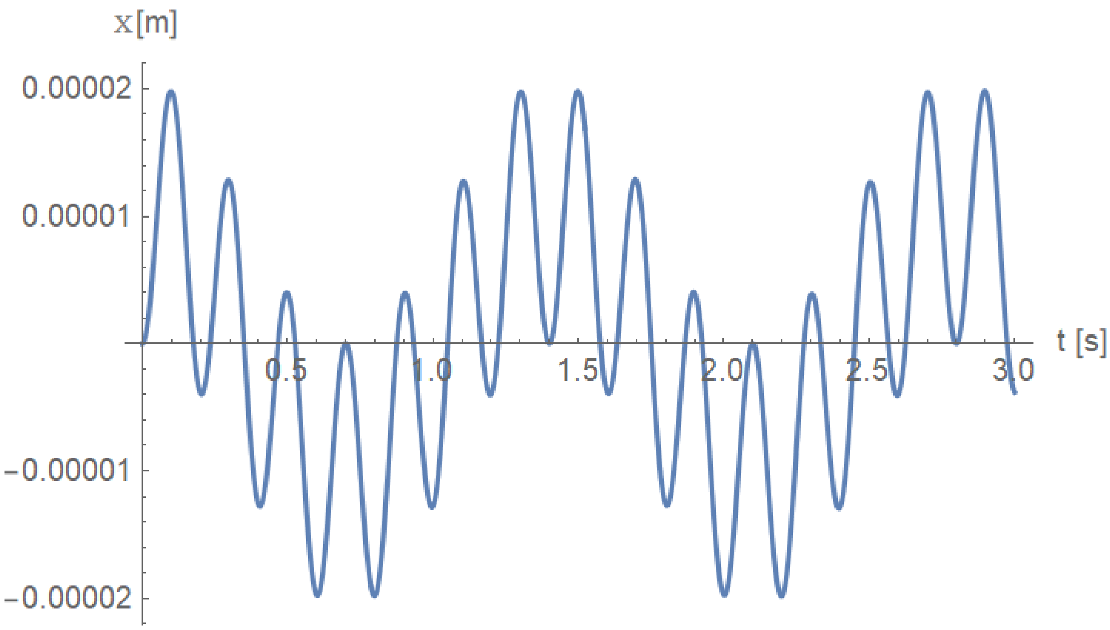
Če sedaj pogledamo enačbi (3.13) in (3.14) opazimo, da imajo enako strukturo kot dobljene enačbe vsiljenega nihanja zaradi centrifugalne motnje [1]. Na levi strani enačb imamo torej prvi faktor mase, drugi je faktor dušenja, ki je v primeru enačbe (3.14) enak 0, in tretji je faktor togosti vzmeti. Če sedaj pogledamo še desne strani enačb opazimo, da e definira oddaljenost ekscentra, ω pa vzbujevalno frekvenco:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = m_2\,e\,\omega^2(\omega t) \tag{3.15}$$

3.1.2. Odziv sistema

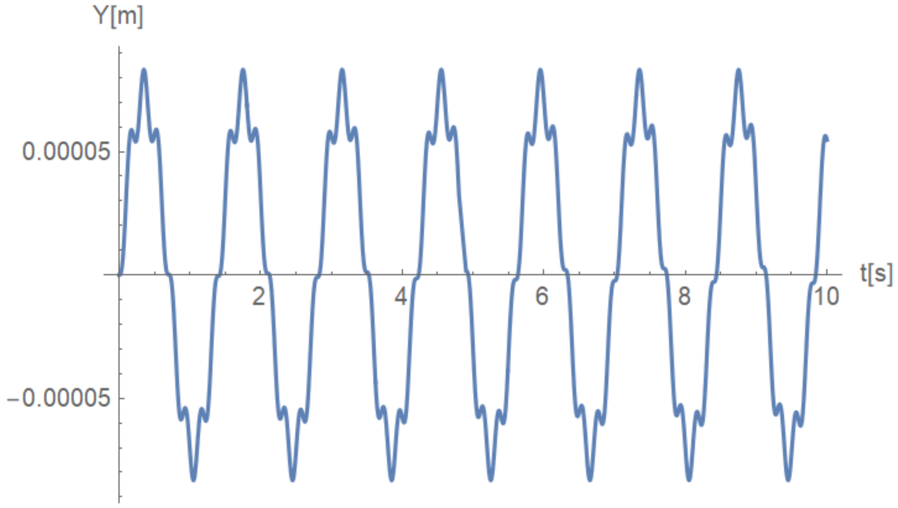
Ko imamo gibalne enačbe enkrat rešene, lahko določimo odziv sistema z uporabo numerične integracije. Za izvedbo numerične integracije je bila uporabljena numerična metoda Runge-Kutta četrtega reda. Ena izmed pomembnejših lastnosti togih teles je, da so sestavljena iz neskončnega števila točk. Vsem tem točkam pa je skupno, da se po določenih zakonih gibajo glede na težišče. Zato bomo v grafih prikazali samo odziv sistema v težišču in si s tem nalogo nekoliko poenostavili.

Na sliki 3.4 je prikazan odziv sistema v horizontalni smeri. Opaziti je, da sistem niha v dveh frekvenčnih območjih. Amplitude obeh območij so konstantne in urejene.



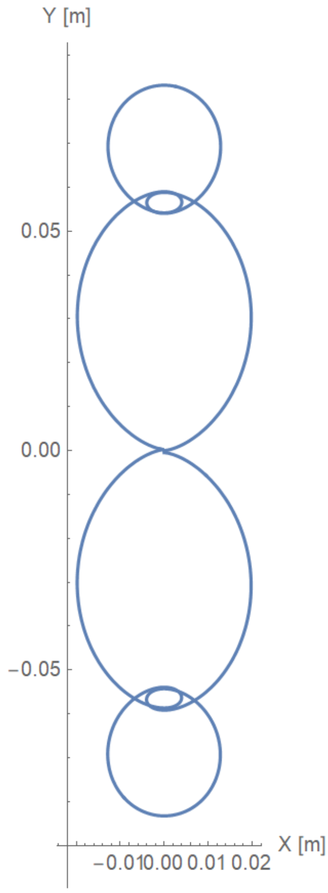
Slika 3.4: Gibanje težišča sistema v horizontalni smeri

Če pogledamo sedaj še odziv sistema v vertikalni smeri, opazimo, da so amplitude približno štirikrat večje kot v horizontalni smeri. Tudi tu se pojavlja nihanje, ki je kombinacija dveh frekvenc (slika 3.5). Opaziti je tudi, da sta časa enega nihaja frekvenc večjih amplitud v obeh smereh približno enaka. To je tudi pričakovan odziv zaradi narave enačb, ki se med seboj razlikujeta le v kotni funkciji. Za kosinus je značilno, da je soda funkcija, med tem ko je sinus liha. To je tudi razvidno iz slik 3.4 in 3.5.



Slika 3.5: Gibanje težišča sistema v vertikalni smeri

Gibanje težišča sistema v ravnini XY in v obdobju enega nihaja je prikazano na sliki 3.6.



Slika 3.6: Odziv sistema v ravnini X-Y

4. Rezultati in diskusija

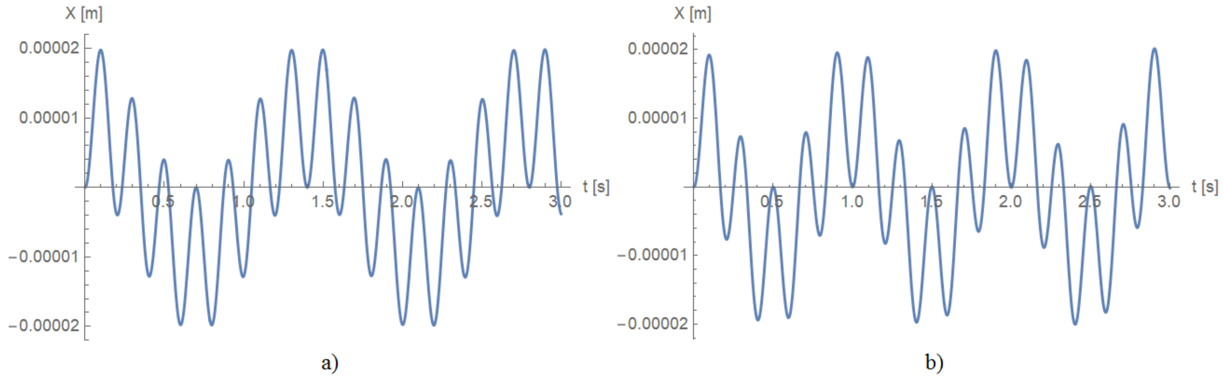
V tem poglavju bodo predstavljeni različni odzivi sistema glede na vhodne parametre. Najprej bomo prikazali kako so lastne frekvence sistema odvisne od izbora vzmeti pri določeni masi. Sledila bosta vpliv vzbujajoče mase in na koncu še vpliv vzbujevalne frekvence. Grafično bomo prikazali različne odzive sistema in skušali ugotoviti kakšen odziv transporterja bi ustrezal.

4.1. Vplivi na odziv sistema

Zahtevana masa našega sistema je 1kg. Glede na ta podatek bomo naprej določevali odzive ob različnih vrednostih ostalih parametrov. Določili bomo kako in kateri parametri najbolj vplivajo na odziv sistema. Zaradi enakega izvora obeh gibalnih enačb in enakih togosti vzmeti bomo prikazali le vplive na sistem v horizontalni smeri. Prikazovanje v smeri *Y* ni potrebno.

4.1.1. Vpliv karakteristike vzmeti

Če togost posamezne vzmeti povečamo, se močno zmanjša nihajni čas sistema. V primerih na sliki 4.1 se je pri dvakratnem povečanju togosti nihajni čas zmanjšal za približno 0,4 sekunde. Amplituda je ostala enaka in se tudi ob povečevanju togosti za nekaj kratni faktor prvotne karakteristike ni bistveno spreminjala (slika 4.1). Iz enačbe (2.30) je razvidno, da v največji meri na vrednost amplitude vplivajo nihajoča masa, vzbujevalna masa in ekscenter. Togost vzmeti se pojavi v enačbi posredno preko lastne frekvence sistema. Ker je ta v razmerju in še pod korenom ima bistveno manjši vpliv kot predhodno našteti parametri.

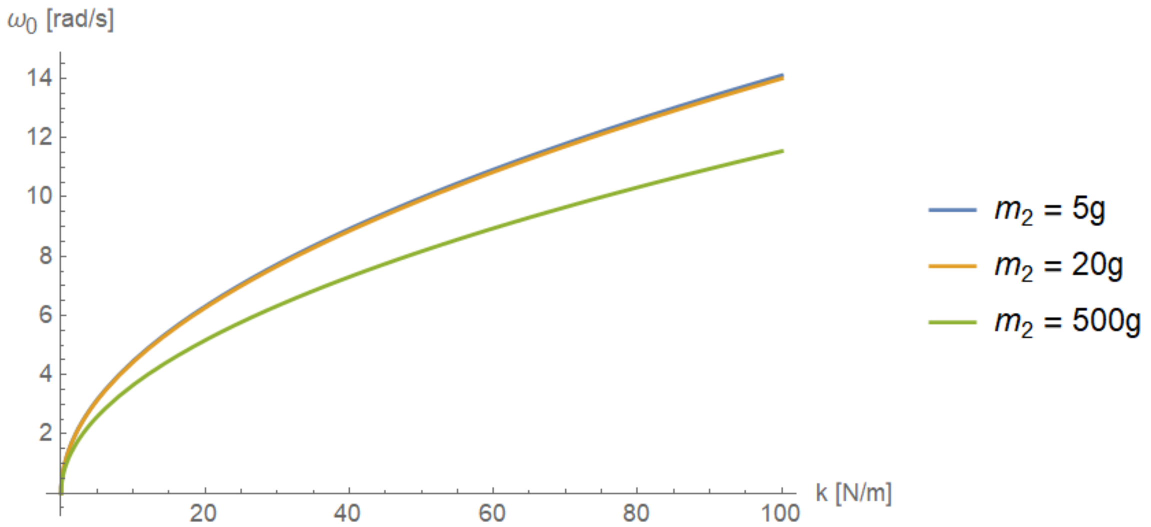


Slika 4.1: Vpliv togosti posamezne vzmeti na sistem; a) Togost k, b) Togost 2k.

4.1.2. Vpliv mase in oddaljenosti ekscentra

Iz enačbe (2.25) je razvidno, da ekscenter pomembno vpliva na amplitudo nihanja. Večja kot je masa ekscentra in bolj kot je oddaljen od središča rotacije, večja bo amplituda odziva sistema. Če torej želimo amplitudo pri nespremenjeni vzbujevalni frekvenci zmanjšati, moramo povečati nihajočo maso transporterja.

Na sliki 4.2 je prikazan vpliv mase ekscentra na lastno frekvenco sistema v horizontalni smeri.



Slika 4.2: Vpliv mase ekscentra in togosti na lastne frekvence sistema

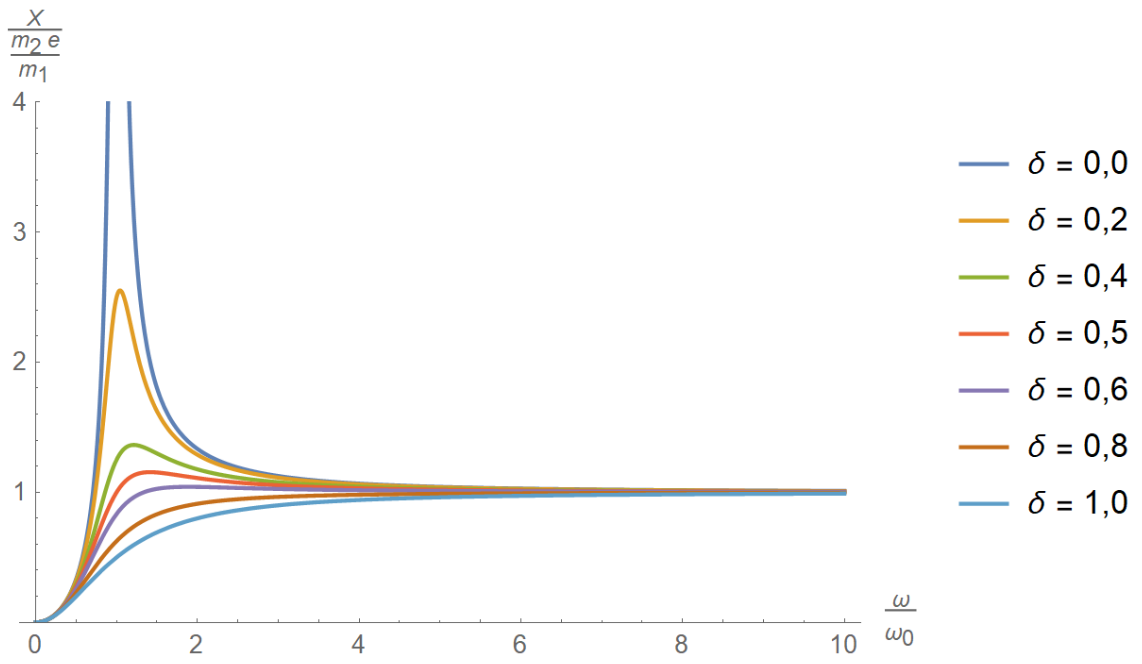
Masa in ekscentričnost telesa, ki povzroča motnjo, torej linearno vplivata na amplitudo. Na lastne frekvence sistema pa oddaljenost ekscentra ne vpliva. Masa ekscentra ima na lastne frekvence zanemarljivo majhen vpliv, saj je opaziti, da se šele pri stokratnem povečanju mase ekscentra, lastna frekvenca sistema zmanjša za približno 15 %.

4.1.3. Vliv vzbujevalne frekvence

Ker je obravnavan sistem vzbujan centrifugalno, je vsiljena frekvenca eden najpomembnejših parametrov. Njen vpliv na odziv sistema je najbolj razviden iz diagrama na sliki 4.3.

Opazimo, da v območju, kjer je sistem vzbujan podresonančno, amplituda z vzbujevalno frekvenco narašča. V področju resonance dobimo največji možen odziv sistema.

Do resonance pride, ko se z vzbujevalno frekvenco bližamo lastni krožni frekvenci. Če nato vzbujevalno frekvenco še nadalje povečujemo in s tem preidemo v nadresonančno vzbujanje, se začne amplituda odziva zmanjševati in kasneje konvergira proti vrednosti ena.



Slika 4.3: Odziv sistema glede na vzbujevalno frekvenco pri različnih razmernikih dušenja

V resonančnem področju in njegovi bližini je odziv odvisen predvsem od razmernika dušenja. Manjši kot je razmernik, večji je odziv pri enaki vzbujevalni frekvenci, pri vrednosti razmernika 0, pa ima amplituda neskončno vrednost. V realnosti to sicer ni možno, saj je vsak sistem dušen. Pri sistemih, ki so vzbujani močno nadresonančno, dušenje praktično ne vpliva več.

5. Zaključki

Tekom naloge smo uspeli prikazati dinamski odziv sistema z več prostostnimi stopnjami. Izhajali smo iz enostavnega modela vibracijskega transporterja. Zasnovali smo teoretično ozadje dinamskega problema, določili gibalne enačbe in zakone, po katerih se sistem giblje. Uspešno smo analizirali in določili kateri so vplivni parametri, ki igrajo poglavitno vlogo pri odzivu sistema. Pokazali smo kako in zakaj se sistem navezuje na predstavljena teoretična izhodišča.
V praksi večina sistemov teži k čim večjemu odzivu glede na vloženo energijo. Optimira se torej izkoristek oziroma učinkovitost sistema. Ker je za gibanje ekscentra potrebna električna energija je torej zelo pomembno zmanjšanje porabe. Da bi lahko npr. transporter material pomikal čim bolj učinkovito, si želimo čim večjo amplitudo. Potrebna je torej pravilna kombinacija izbora mas in hitrosti vrtenja ekscentra, vzmeti itd.

Zgoraj razvit model bi lahko nadgradili in uporabili za nadaljnji razvoj do vibracijskega transporterja. Potrebno bi bilo zasnovati še kontakt med transportiranim materialom in napravo. Zgoraj obravnavan sistem bi bil primeren za transportiranje peska, moke, granulata itd.

6. Literatura

[1] M. Boltežar: *Mehanska nihanja – 1. del (2. popravljena izdaja)*. Univerza v Ljubljani Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010.

[2] A. Ulaga: *Analiza dinamskega odziva vibracijskega transporterja*. Magistrsko delo. Ljubljana, 2016

[3] *SG strojírna s.r.o. Proizvajalec transporterjev.* Dostopno na: http://www.sg-stroj.cz/pictures/trasadl_doprav_1.jpg, ogled: 14. 8. 2017.