

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Barbka Podbregar

Sferični zleпки

Magistrsko delo

Mentor: izred. prof. dr. Marjetka Krajnc

Ljubljana, 2016

Podpisana Barbka Podbregar izjavljam:

- da sem delo diplomskega seminarja z naslovom *Sferični zleпки* izdelala samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Marjetke Krajnc in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 11.6.2016

Podpis:

Zahvaljujem se mentorici, izred. prof. dr. Marjetki Krajnc, za nasvete pri pisanju magistrske naloge in programov potrebnih za izdelavo slik, za lektoriranje in izjemno potrpežljivost.

Hvala Gumiplastu d.o.o., Comtradeu d.o.o. in Ekipi2 d.o.o. za zaposlitev med študijem.
Brez njih in staršev mi finančno ne bi uspelo.

Iskrena zahvala gre staršem, ki so mi študij omogočili. Hvala celotni družini in vsem prijateljem za spodbudo, razumevanje in potrpežljivost.

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	EEG	2
1.2	Geopotencial	3
2	Sferični polinomi	5
2.1	Sferični trikotniki	5
2.2	Sferične baricentrične koordinate	6
2.3	Sferični Bernsteinovi bazni polinomi	10
2.4	Sferična B-forma	11
2.5	Sferični polinomi na delih sferičnih trikotnikov	22
2.6	Višanje stopnje sferičnim polinomom	23
2.7	Skrčitve sferičnih polinomov na robove	24
2.8	Homogeni polinomi treh spremenljivk	26
2.9	Sferične harmonične funkcije	29
2.10	Sferične krpe	31
3	Odvodi sferičnih polinomov	37
3.1	Smerni odvodi funkcij na sferi	37
3.2	Smerni odvodi sferičnih B polinomov	38
3.3	Gladek prehod dveh sferičnih polinomov preko robov sferičnih trikotnikov	42
3.4	Interpolacija	45

4	Sferične triangulacije	50
5	Prostori sferičnih zlepkov	53
5.1	Problem dimenzije prostora sferičnih zlepkov	53
5.2	Zvezni sferični zlepki	55
5.3	Prostori gladih sferičnih zlepkov	57

PROGRAM DELA

V magistrskem delu opišite sferične polinome, njihove lastnosti in stabilen izračun s pomočjo de Casteljaujevega algoritma. Obravnavajte tudi sferične zlepke nad triangulacijami ter pogoje za gladkost. Teorijo ponazorite z numeričnimi primeri.

Osnovna literatura: Ming-Jun Lai in Larry L. Schumaker: Spline functions on triangulations. Cambridge University Press, 2007

Ljubljana, 11.6.2016

Mentorica: izred. prof. dr. Marjetka Krajnc

Sferični zleпки

POVZETEK

V magistrskem delu bomo obravnavali osnovno teorijo prostorov sferičnih zlepkov, definiranih na triangulacijah enotske sfere S v $\mathbb{R}^3$. Prostor sferičnih zlepkov so analogi dobro poznanih prostorov zlepkov dveh spremenljivk in so sestavljeni iz delov homogenih polinomov treh spremenljivk zoženih na sfero S . Kot bomo videli, se nanje prenese praktično vsa teorija zlepkov dveh spremenljivk nad ravninskimi triangulacijami, seveda z nekaterimi pomembnimi razlikami. Sferični zleпки se uporabljajo za interpolacijo/aproksimacijo podatkov na sferi v medicini, računalniški grafiki, animaciji, robotiki, geodeziji, astronomiji, itn.

Spherical splines

ABSTRACT

In this thesis we will discuss the basic theory of spherical spline spaces, defined on triangulations of the unit sphere S in $\mathbb{R}^3$. The spherical spline spaces are natural analogs of the well known bivariate spline spaces and are made up of pieces of trivariate homogeneous polynomials restricted to a sphere S . As we shall see, virtually the entire theory of bivariate polynomial splines on planar triangulations carries over, although there are several significant differences. Spherical splines are used for spherical data interpolation/approximation in medicine, graphics, animation, robotics, geodesy, astronomy, etc.

Math. Subj. Class. (2010): 65D07, 65D17

Ključne besede: sferični trikotnik, sferične baricentrične koordinate, sferični Bernsteinovi bazni polinomi, sferična krpa, sferična triangulacija

Keywords: spherical triangle, spherical barycentric coordinates, spherical Bernstein basis polynomials, spherical patch, spherical triangulation

Poglavje 1

Uvod

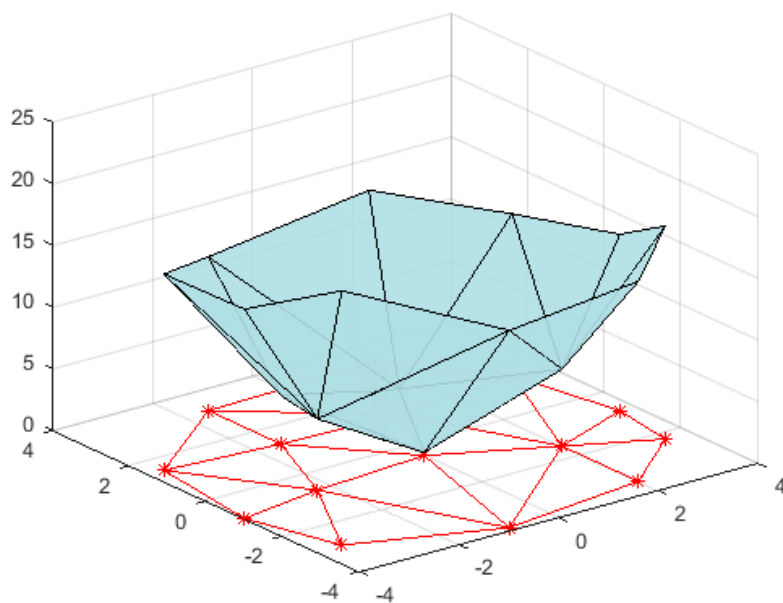
Bernsteinovi bazni polinomi dveh spremenljivk so zelo znani in se uporabljajo pri interpolaciji podatkov oz. aproksimaciji funkcij nad domeno v ravnini, ki jo razdelimo na trikotnike. Nad vsakim trikotnikom s pomočjo polinomov, sestavljenih iz Bernsteinovih baznih polinomov, skonstruiramo posamezno interpolacijo oz. aproksimacijo. Skupku dobljenih interpolacij oz. aproksimacij nad vsemi trikotniki pravimo zlepek. Običajno seveda predpišemo tudi, kakšna mora biti globalna gladkost zlepka. Slika 1.1 prikazuje ravninsko triangulacijo s pripadajočo aproksimacijo. Ker pa domene niso vedno ravninske, bi radi analogno strukturo definirali še na drugačnih površinah, v našem primeru na sferi.

Zakaj so zlepki tako močno orodje za interpolacijo oz. aproksimacijo? Razlogi so sledeči.

- Zlepki so enostavni za računanje, imamo stabilne in učinkovite algoritme za izračun njihovih vrednosti, odvodov in integralov.
- Oblika zlepka in njegovi koeficienti so močno povezani.
- Zlepki dobro aproksimirajo gladke funkcije in lahko se določi natančno razmerje med gladkostjo funkcije in redom njene aproksimacije.

V tem delu bomo spoznali celotno teorijo prostorov zlepkov, definiranih nad sferičnimi triangulacijami, ki so jih študirali Alfeld, Neamtu in Schumaker v [3, 4, 5, 6]. Ti prostori so pomembni za aproksimacijo funkcij definiranih na sferi.

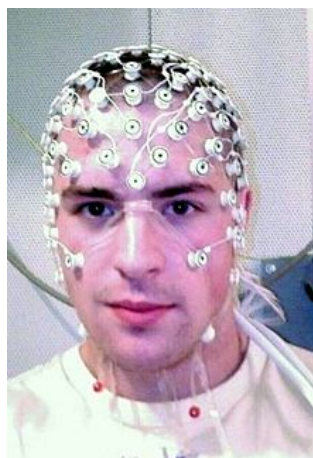
Interpolacija s sferičnimi zlepci se uporablja v robotiki in računalniški grafiki, medicini, atmosferskih vedah, geodeziji, geofiziki, itn.



Slika 1.1: Ravninska triangulacija s pripadajočo odsekoma linearno aproksimacijo.

1.1 EEG

Slika 1.2 prikazuje merjenje možganske električne aktivnosti z elektrodami na površini glave (EEG). Sodobni EEG uporablja 129 elektrod s 128 ojačevalnimi kanali, ki merijo 128 napetosti V_i glede na posamezno elektrodo.



Slika 1.2: Merjenje možganske električne aktivnosti na površini glave.

Da lahko potenciale predstavimo grafično, potrebujemo interpolacijsko shemo, s katero ocenimo potenciale med elektrodami. Slika 1.3 prikazuje primer interpolacije izmerjenih

potencialov s sferičnimi zlepkami za različne stopnje interpolacije (1, 2 in 3). Več o tem najde bralec v [10].



Slika 1.3: Interpolacija izmerjenih potencialov s sferičnimi zlepkami stopnje m .

1.2 Geopotencial

Geopotencial je potencial gravitacijskega polja Zemlje. Slika 1.4 prikazuje lokacije, na katerih se meri geopotencial.



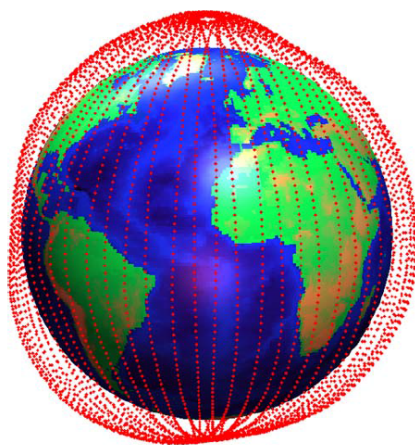
Slika 1.4: Lokacije na katerih merimo geopotencial.

Na sliki 1.5 je predstavljena uniformna triangulacija sfere, to je triangulacija, pri kateri sfero najprej razdelimo na osem skladnih sferičnih trikotnikov (vsak oktant sfere je en sferični trikotnik), nato pa povežemo središča stranic vseh sferičnih trikotnikov. S tem vsak sferični trikotnik razdelimo na štiri nove sferične trikotnike. Postopek ponavljamo dokler želimo.

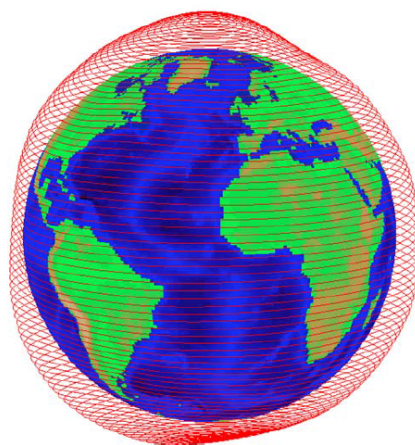
Sliki 1.6 in 1.7 predstavljata normalizirane geopotencialne vrednosti in interpolacijsko površje $\mathcal{C}^1$ sferičnega zlepka stopnje 5. Več o tem najde bralec v [11].



Slika 1.5: Uniformna triangulacija sfere.



Slika 1.6: Normalizirane geopotencialne vrednosti.

Slika 1.7: Interpolacijski C^1 sferični zlepek stopnje 5.

Poglavje 2

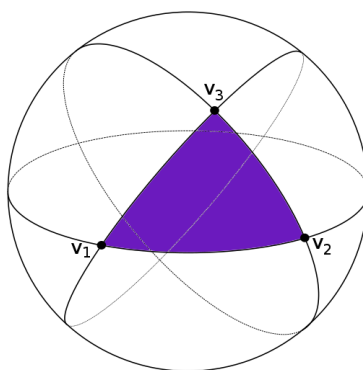
Sferični polinomi

V tem poglavju bomo govorili o ključnih sestavnih delih sferičnih zlepkov, to so sferični polinomi. Z v bomo označili točko na enotski sferi $S \subset \mathbb{R}^3$ (oziroma včasih pripadajoči enotski vektor). Preden definiramo sferične polinome, moramo definirati sferične trikotnike in sferične baricentrične koordinate.

2.1 Sferični trikotniki

Naj bosta v_1, v_2 točki na sferi, ki ne ležita na isti premici skozi izhodišče. Tedaj ti dve točki razdelita krožnico na sferi, ki gre skozi v_1, v_2 na dva različno dolga *krožna loka*. Krajši lok označimo z $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Sferični trikotnik ni nič drugega kot trikotnik, ki leži na sferi. Predpostavimo le, da njegova oglišča ležijo strogo v eni polobli. S tem se izognemo primeru, ko bi vsa oglišča ležala na ekvatorju, saj v tem primeru ne dobimo trikotnika, pač pa kar celo poloblo.



Slika 2.1: Sferični trikotnik.

Slika 2.1 prikazuje sferični trikotnik. Povejmo še formalno definicijo.

Definicija 1. Naj bodo v_1, v_2 in v_3 točke na enotski sferi S , ki ležijo strogo v eni polobli. Potem definiramo sferični trikotnik $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ kot množico točk na S , ki ležijo v območju omejenem s tremi krožnimi loki $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, 3$, pri čemer v_4 identificiramo z v_1 .

Pravimo, da je sferični trikotnik T neizrojen, če ima neničelno ploščino.

Točkam v_1, v_2, v_3 pravimo oglišča sferičnega trikotnika T , krožnim lokom $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ pa robovi sferičnega trikotnika T .

Če ne bo rečeno drugače, bomo predpostavili, da so oglišča sferičnega trikotnika T urejena v smeri urinega kazalca, gledano iz središča sfere.

2.2 Sferične baricentrične koordinate

Baricentrične koordinate v ravninskem trikotniku so koeficienti b_1, b_2, b_3 , s katerimi lahko vsako točko v , ki leži v trikotniku, zapišemo kot linearno kombinacijo njegovih oglišč v_1, v_2, v_3 ,

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3.$$

Te koeficiente lahko izračunamo po formulah

$$b_1 = \frac{pl(v, v_2, v_3)}{pl(v_1, v_2, v_3)},$$

$$b_2 = \frac{pl(v_1, v, v_3)}{pl(v_1, v_2, v_3)},$$

$$b_3 = \frac{pl(v_1, v_2, v)}{pl(v_1, v_2, v_3)},$$

kjer je $pl(v_i, v_j, v_k)$ ploščina trikotnika z oglišči v_i, v_j, v_k . Videli bomo, da sferične baricentrične koordinate definiramo analogno in da dobimo analogne formule za njihov izračun.

Definicija 2. Naj bo $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ neizrojen sferični trikotnik. Za točko $v \in S$ naj bodo koeficienti $b_i := b_i(v)$ taki, da lahko točko v zapišemo kot

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3. \quad (2.1)$$

Potem b_1, b_2, b_3 imenujemo sferične baricentrične koordinate točke v glede na sferični trikotnik T .

Trditev 3. *Sferične baricentrične koordinate točke $v \in S$ glede na neizrojen sferični trikotnik $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ so enolično določene.*

Dokaz. Označimo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Potem lahko enakost (2.1) zapišemo v matrični obliki in dobimo

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Determinanta matrike v (2.2) je enaka šestkratnemu volumnu tetraedra $t_0 := \langle 0, v_1, v_2, v_3 \rangle$. Ker je sferični trikotnik T neizrojen, bosta volumen tetraedra in posledično determinanta matrike različna od 0, kar pomeni, da je rešitev res enolična. Po Cramerjevem pravilu dobimo sledeče formule za sferične baricentrične koordinate

$$b_1(v) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ z & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad b_2(v) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ z_1 & z & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad b_3(v) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}. \quad (2.3)$$

□

Izrek 4. *Naj bo T neizrojen sferični trikotnik. Potem velja:*

- 1) $b_i(v_j) = \delta_{ij}$ za vse $i, j = 1, 2, 3$, kjer je δ_{ij} Kronecherjev delta.
- 2) b_i je enaka 0 na robu T , nasprotnem oglišču v_i za vse $i = 1, 2, 3$.
- 3) b_1 je enak kvocientu $\frac{\text{vol}(t_1)}{\text{vol}(t_0)}$ predznačenih volumnov tetraedrov $t_1 = \langle 0, v, v_2, v_3 \rangle$ in $t_0 = \langle 0, v_1, v_2, v_3 \rangle$. Podobno velja za b_2 in b_3 .
- 4) $b_1(v), b_2(v), b_3(v) \geq 0$ za vse $v \in T$.

Dokaz. Dokažimo vsako točko izreka posebej.

- 1) Točko v_1 zapišemo kot

$$v_1 = b_1(v_1)v_1 + b_2(v_1)v_2 + b_3(v_1)v_3 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3,$$

torej je $b_1(v_1) = 1$, $b_2(v_1) = 0$ in $b_3(v_1) = 0$. Analogno preverimo za točki v_2 in v_3 .

- 2) Na loku, ki povezuje v_1 in v_2 bo b_3 očitno enaka 0, saj so vse točke tega loka linearne kombinacije v_1 in v_2 . Analogno za ostala robova.
- 3) Trditev sledi iz enakosti (2.3) in povezave med determinanto in volumnom tetraedra (volumen tetraedra je enak $\frac{1}{6}$ absolutne vrednosti determinante).
- 4) Vemo, da je determinanta

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \geq 0,$$

kadar so v_1, v_2, v_3 pozitivno orientirani. Pri sferičnem trikotniku je to res, saj smo predpostavili, da oglišča označimo v smeri urinega kazalca, če gledamo iz izhodišča sfere. Determinanta

$$\det \begin{pmatrix} v & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

bo zagotovo večja ali enaka nič, če vzamemo v iz sferičnega trikotnika T , saj bodo takrat v, v_2, v_3 zagotovo pozitivno orientirani. Torej je $b_1(v) \geq 0$ za vsako točko $v \in T$. Analogni premislek velja za $b_2(v)$ in $b_3(v)$.

□

Ker se volumni tetraedrov ne spremenijo, če jih rotiramo, sledi, da so sferične baricentrične koordinate točke v glede na sferični trikotnik T *rotacijsko invariantne*. To pomeni, da se ne spremenijo, če zavrtimo točko v in oglišča sferičnega trikotnika T za enak kot. To lahko vidimo tudi direktno. Spomnimo se, da je rotacija na sferi opisana s 3×3 ortogonalno matriko, ki ima determinanto $\det(M) = 1$ in velja $M^T M = I$.

Izrek 5. Naj bo $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sferični trikotnik in $\tilde{T} = \langle Mv_1, Mv_2, Mv_3 \rangle$, kjer je M rotacijska matrika. Za dan $v \in S$ naj bodo b_1, b_2, b_3 sferične baricentrične koordinate glede na T , b_1^M, b_2^M, b_3^M pa sferične baricentrične koordinate glede na $\tilde{T}$. Potem velja

$$b_i^M(Mv) = b_i(v), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dokaz. Če množimo enačbo (2.1) z M , dobimo $Mv = b_1 Mv_1 + b_2 Mv_2 + b_3 Mv_3$, kar dokazuje izrek. □

Videli smo, da imajo sferične baricentrične koordinate večino lastnosti, ki jih imajo običajne ravninske baricentrične koordinate. Ena od pomembnih razlik je ta, da se sferične baricentrične koordinate ne seštevajo v 1, razen v ogliščih sferičnega trikotnika T .

Lema 6. Za poljuben neizrojen sferični trikotnik $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ velja

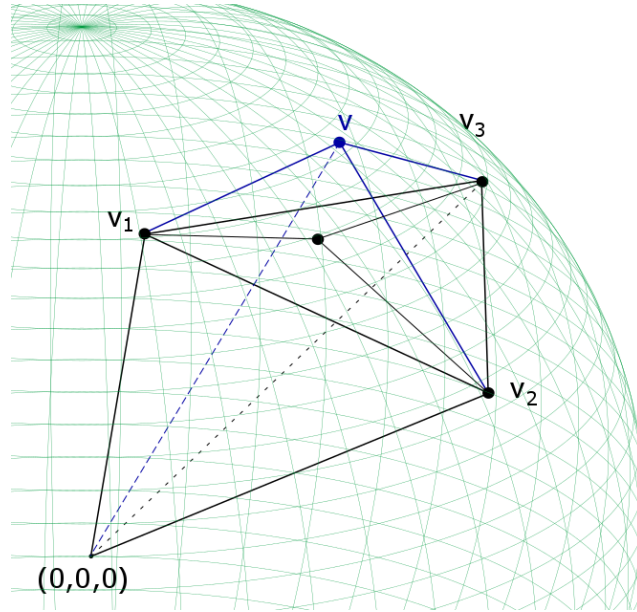
$$b_1(v) + b_2(v) + b_3(v) > 1$$

za vsak $v \in T \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$.

Dokaz. Z upoštevanjem (2.3) dobimo

$$b_1(v) + b_2(v) + b_3(v) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ z & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ z_1 & z & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Vidimo, da je števec enak šestkratni uniji volumnov tetraedrov $\langle 0, v, v_2, v_3 \rangle$, $\langle 0, v_1, v, v_3 \rangle$ in $\langle 0, v_1, v_2, v \rangle$, imenovalac pa šestkratnemu volumnu tetraedra $\langle 0, v_1, v_2, v_3 \rangle$.



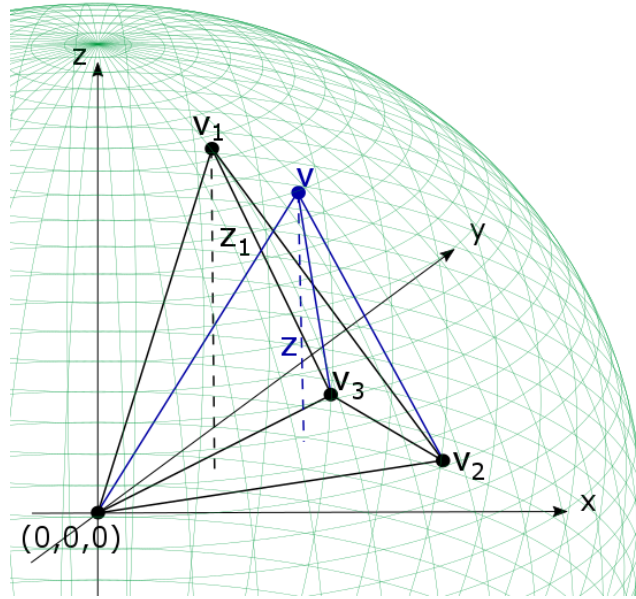
Slika 2.2: Prikaz dobljenih tetraedrov glede na pozicijo točke v .

Če bi točka v ležala v ravninskem trikotniku $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, bi bila števec in imenovalac enaka. Ker pa v leži na sferi (glej sliko 2.2), bo števec večji od imenovalca in posledično $b_1(v) + b_2(v) + b_3(v) > 1$ za vsak $v \in T \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$. Če je v oglišče sferičnega trikotnika, je očitno $b_1(v) + b_2(v) + b_3(v) = 1$. $\square$

Če je v točka v ravninskem trikotniku T , potem so ravninske baricentrične koordinate glede na T omejene z 1. Če pa je točka v v sferičnem trikotniku T , potem so sferične baricentrične koordinate lahko poljubno velike, razen če vnaprej predpišemo velikost sferičnega trikotnika T . Namreč, če so oglišča sferičnega trikotnika $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ taka, da gre ravninski trikotnik z istimi oglišči zelo blizu izhodišča, potem je volumen tetraedra $\langle 0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ lahko poljubno majhen.

Lema 7. Naj bo $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sferični trikotnik, ki je dovolj majhen, da ga lahko zarotiramo v en oktant enotske sfere. Potem za vsak $v \in T$ velja $0 \leq b_i(v) \leq 1$ za $i = 1, 2, 3$.

Dokaz. Zadošča, da lemo dokažemo za b_1 . Recimo, da T zarotiramo tako, da leži v oktantu $x, y, z \geq 0$ in da oglišči v_2 in v_3 ležita v ravnini x, y . Naj bo $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Potem je volumen tetraedra $t = \langle 0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ podan z $\text{vol}(t) = \frac{Az_1}{3}$, kjer je A ploščina ravninskega trikotnika z oglišči $0, v_2, v_3$. Podobno je volumen tetraedra $t_1 = \langle 0, v, v_2, v_3 \rangle$ enak $\text{vol}(t_1) = \frac{Az}{3}$, kjer je $v = (x, y, z)$.



Slika 2.3: Prikaz višin trikotnikov glede na pozicijo točke v .

Ker v leži v sferičnem trikotniku T , velja $z \leq z_1$ (glej sliko 2.3). Sledi, da je

$$b_1 = \frac{\text{vol}(t_1)}{\text{vol}(t)} = \frac{z}{z_1} \leq 1.$$

Očitno pa je tudi $b_1 \geq 0$. □

Z uporabo prve točke izreka 4 in leme 6 hitro vidimo, da se konstantne funkcije 1 ne da zapisati kot linearno kombinacijo b_1, b_2, b_3 . Da pa se jo zapisati kot linearno kombinacijo funkcij $\{b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3\}$, kar bomo videli v nadaljevanju v lemi 24.

2.3 Sferični Bernsteinovi bazni polinomi

Sferične Bernsteinove bazne polinome definiramo analogno kot klasične Bernsteinove bazne polinome, to je kot produkte baricentričnih koordinatnih funkcij b_1, b_2 in b_3 .

Definicija 8. Za sferični trikotnik T in število d , definiramo sferične Bernsteinove bazne polinome stopnje d kot

$$B_{ijk}^d := \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k, \quad i + j + k = d.$$

Čeprav so direktni analogi Bernsteinovih baznih polinomov, sferični Bernsteinovi bazni polinomi niso algebraični polinomi, pač pa sferične harmonične funkcije, kar bomo videli v poglavju 2.9.

Enostavno je preveriti, da sferični Bernsteinovi bazni polinomi B_{ijk}^d zadoščajo isti rekurzivni zvezi kot klasični Bernsteinovi bazni polinomi, to je

$$B_{ijk}^d = b_1 B_{i-1,j,k}^{d-1} + b_2 B_{i,j-1,k}^{d-1} + b_3 B_{i,j,k-1}^{d-1}, \quad (2.4)$$

za vse $i + j + k = d$. Tu predpostavimo, da so izrazi z negativnimi indeksi enaki 0. Za kasnejšo uporabo potrebujemo omejitve sferičnih Bernsteinovih baznih polinomov $B_{ijk}^d(v)$, na točke na sferičnem trikotniku.

Lema 9. Naj bodo $\{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$ sferični Bernsteinovi bazni polinomi sferičnega trikotnika T , ki ga lahko zarotiramo tako, da leži v enem oktantu enotske sfere. Potem za vsak $v \in T$ velja

$$0 \leq B_{ijk}^d(v) \leq \frac{d!}{i!j!k!}, \quad i + j + k = d,$$

in

$$\sum_{i+j+k=d} B_{ijk}^d(v) \leq 3^d.$$

Dokaz. Prva trditev sledi direktno iz leme 7, druga pa iz trinomske razširitve

$$\sum_{i+j+k=d} B_{ijk}^d = (b_1 + b_2 + b_3)^d.$$

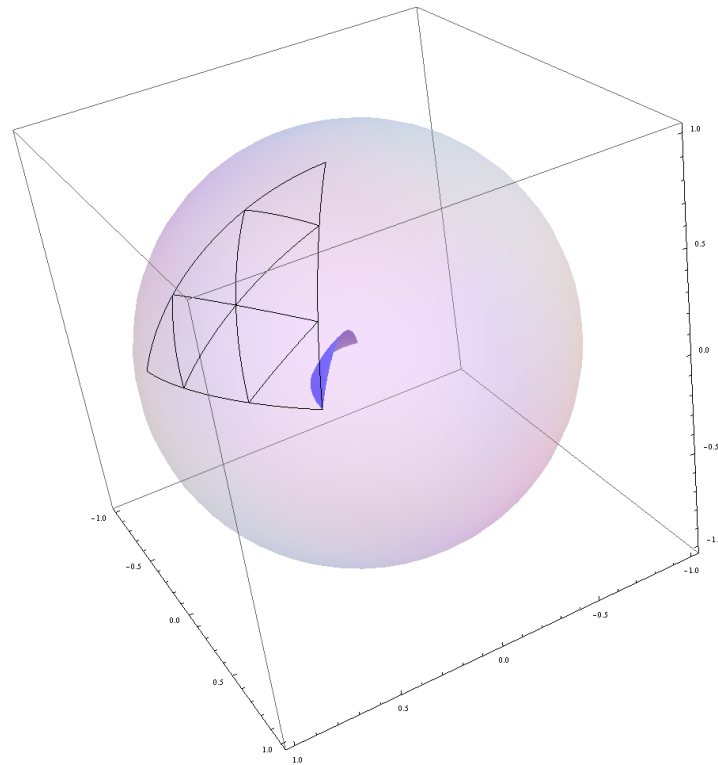
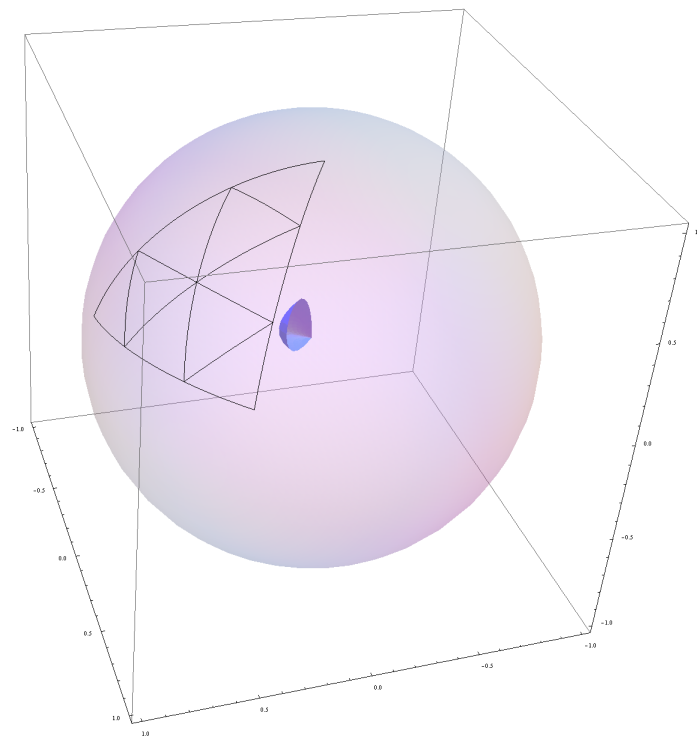
□

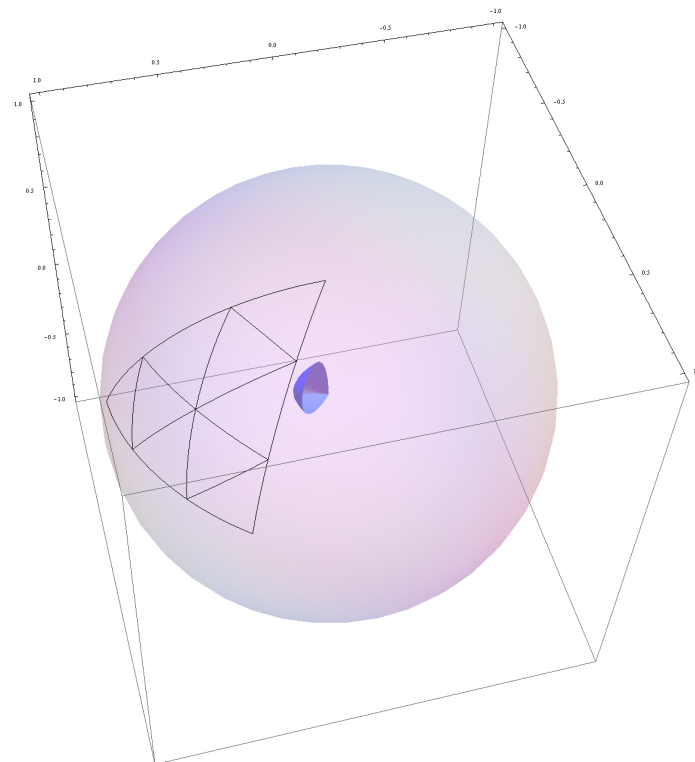
Graf sferičnih baznih polinomov je definiran kot množica točk $\{v B_{ijk}^d(v), v \in T\}$. Na slikah 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 so izrisani grafi sferičnih Bernsteinovih baznih polinomov stopnje 3.

2.4 Sferična B-forma

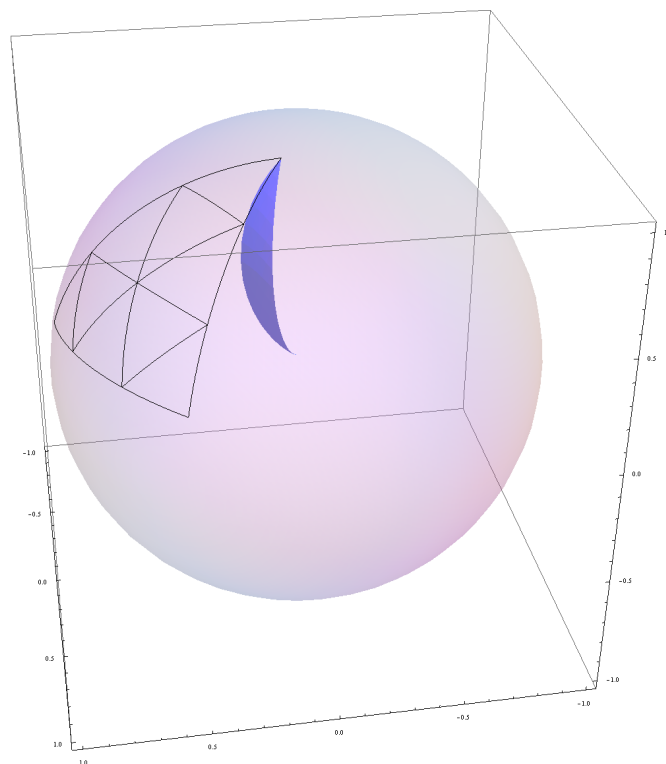
Naj bo $\mathcal{B}_d := \text{Lin}\{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$. V posledici 23 bomo pokazali, da so $\{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$ linearno neodvisni. Zato lahko vsak sferični polinom $p \in \mathcal{B}_d$ zapišemo enolično kot

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d. \quad (2.5)$$

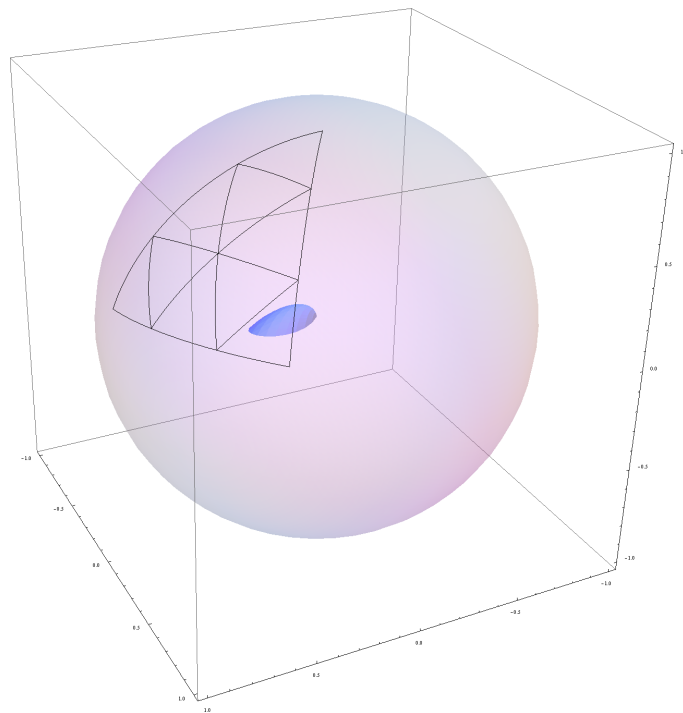
Slika 2.4: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{003}^3 .Slika 2.5: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{102}^3 .



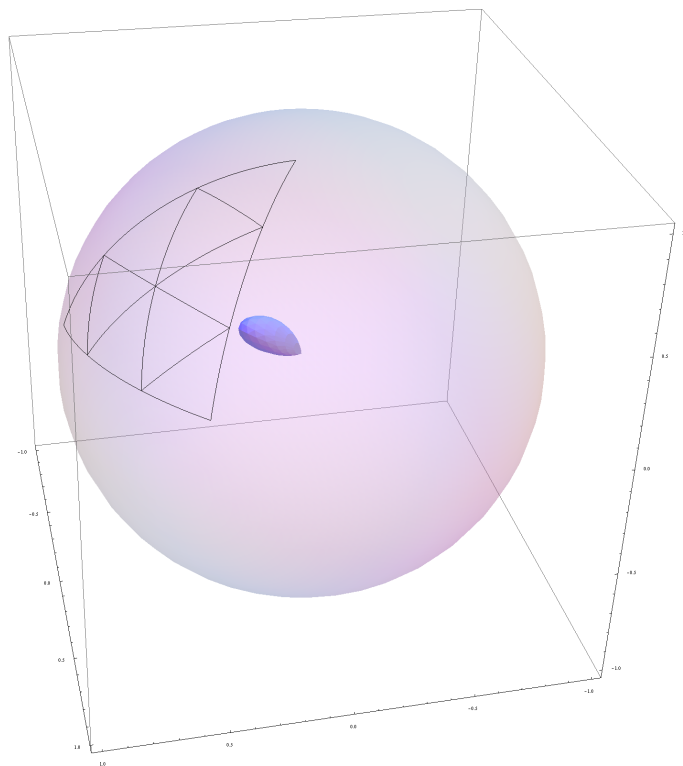
Slika 2.6: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{201}^3 .



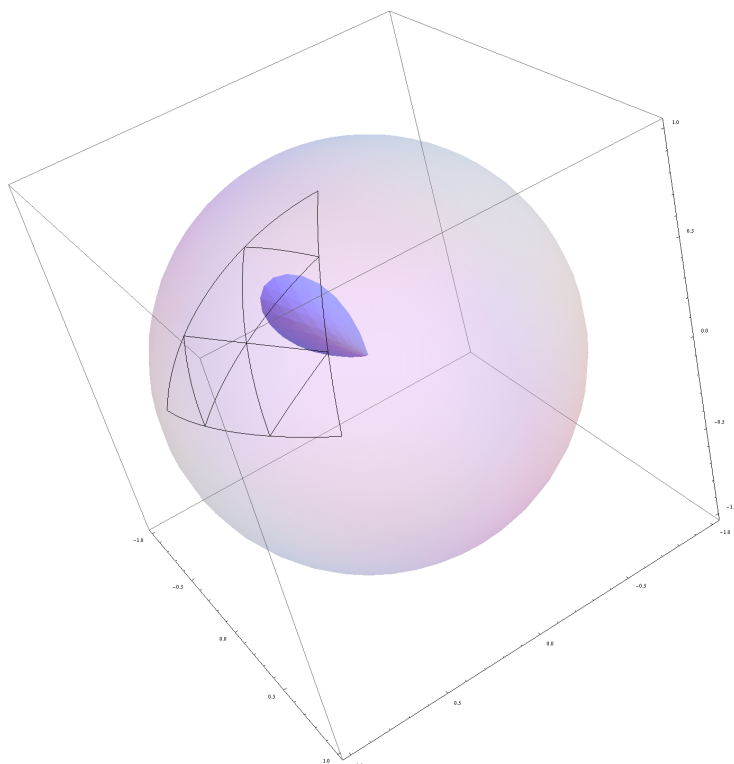
Slika 2.7: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{300}^3 .



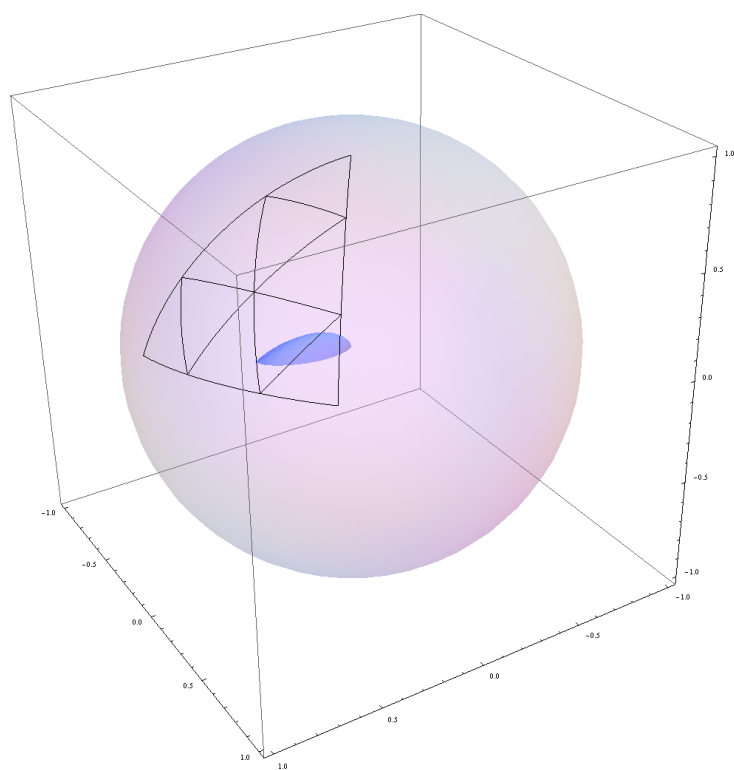
Slika 2.8: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{012}^3 .



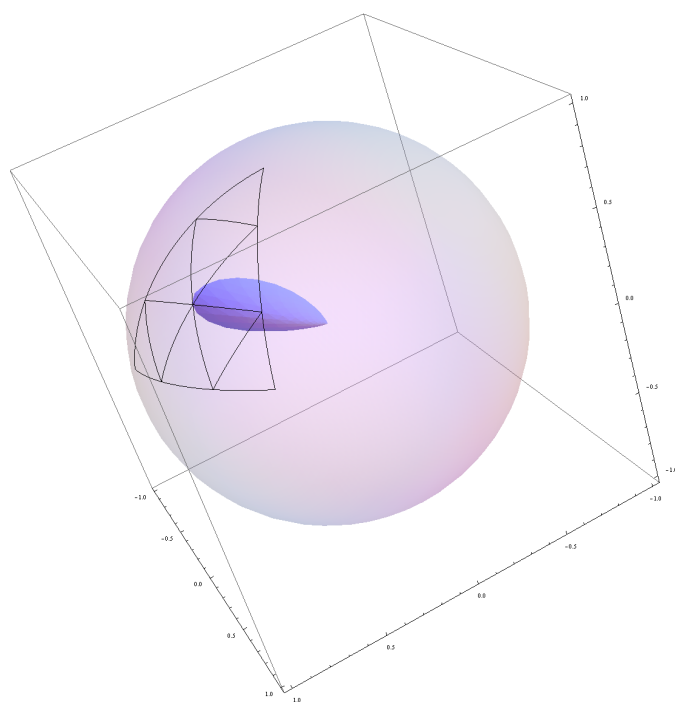
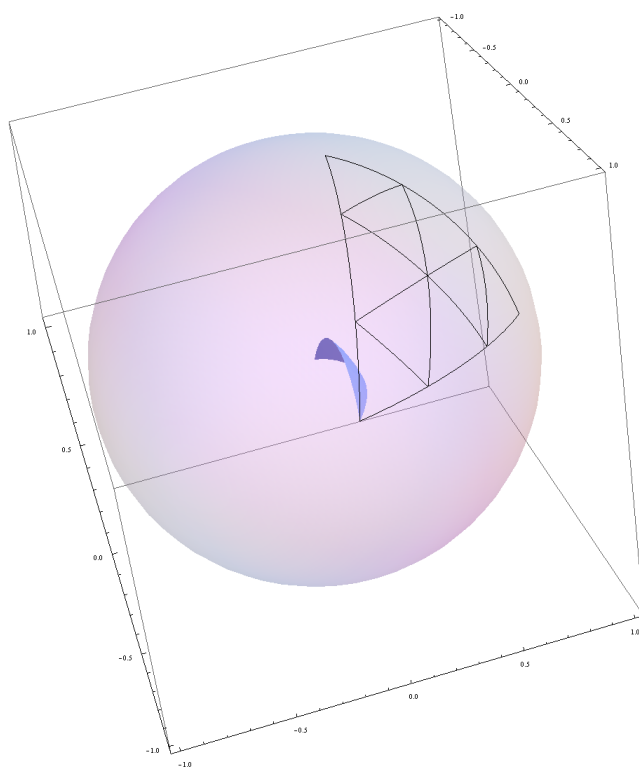
Slika 2.9: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{111}^3 .



Slika 2.10: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{210}^3 .



Slika 2.11: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{021}^3 .

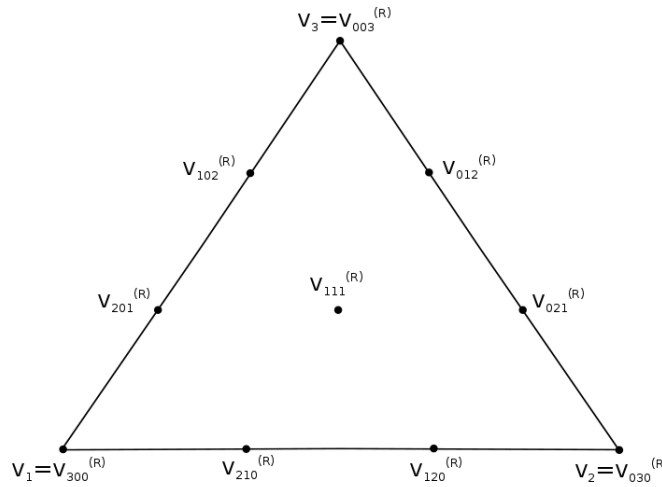
Slika 2.12: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{120}^3 .Slika 2.13: Sferični Bernsteinov bazni polinom B_{030}^3 .

Definicija 10. Vektorski prostor $\mathcal{B}_d$ imenujemo prostor sferičnih polinomov stopnje d . Za vsak $p \in \mathcal{B}_d$ pravimo, da je (2.5) sferična B-forma sferičnega polinoma p , koeficiente c_{ijk} pa imenujemo sferični B-koeficienti sferičnega polinoma p .

V ravninskem primeru definiramo domenske točke trikotnika kot

$$v_{ijk}^{(R)} = \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3}{d}, \quad i + j + k = d.$$

Dobimo $\binom{d+2}{2}$ točk. Slika 2.14 prikazuje ravninske domenske točke za $d = 3$.



Slika 2.14: Ravninske domenske točke za $d = 3$.

Domenske točke v sferičnem trikotniku $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ označimo z v_{ijk} in jih definiramo kot

$$v_{ijk} := \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3}{\|iv_1 + jv_2 + kv_3\|}, \quad i + j + k = d. \quad (2.6)$$

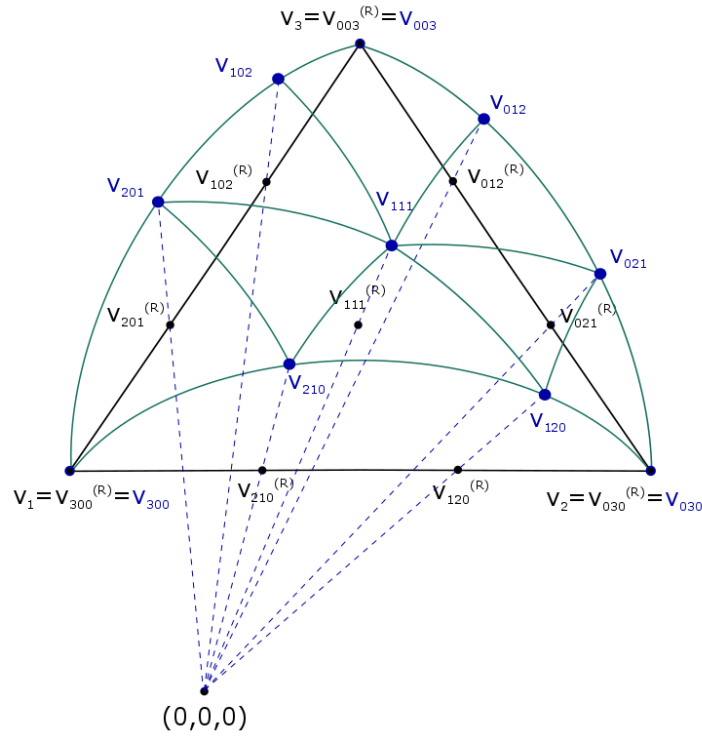
Predstavljajo radialne projekcije točk $v_{ijk}^{(R)}$, ki jih dobimo glede na ravninski trikotnik z oglišči v_1, v_2, v_3 , na sfero S . Slika 2.15 prikazuje sferične domenske točke za $d = 3$.

Pri ravninskem trikotniku z delitvijo z domenskimi točkami dobimo skladne trikotnike, na sferi pa dobljeni trikotniki ne bodo skladni. Za $d > 1$ namreč ne obstaja taka delitev ravninskega trikotnika, da bi bili dobljeni trikotniki na sferičnem trikotniku skladni.

Definicija 11. Množico $\mathcal{D}_{d,T} := \{v_{ijk}\}_{i+j+k=d}$ imenujemo množica domenskih sferičnih točk glede na T in d .

Izrek 12. Naj bo p sferični polinom, zapisan v sferični B-formi (2.5) s koeficienti

$$c_{ijk}^{(0)} := c_{ijk}, \quad i + j + k = d,$$

Slika 2.15: Sferične domenske točke za $d = 3$.

in naj ima $v \in S$ sferične baricentrične koordinate $b := (b_1, b_2, b_3)$. Za vsak $\ell = 1, \dots, d$ naj bo

$$c_{ijk}^{(\ell)} := b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + b_2 c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + b_3 c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}$$

za $i + j + k = d - \ell$. Potem velja

$$p = \sum_{i+j+k=d-\ell} c_{ijk}^{(\ell)} B_{ijk}^{d-\ell}(v) \quad (2.7)$$

za vsak $0 \leq \ell \leq d$. V posebnem primeru je $p(v) = c_{000}^{(d)}$.

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na ℓ . Enakost (2.7) očitno velja za $\ell = 0$. Predpostavimo, da velja za $\ell - 1$. Potem z uporabo rekurzivne zveze (2.4) za Bernsteinove polinome stopnje $d - \ell + 1$ dobimo

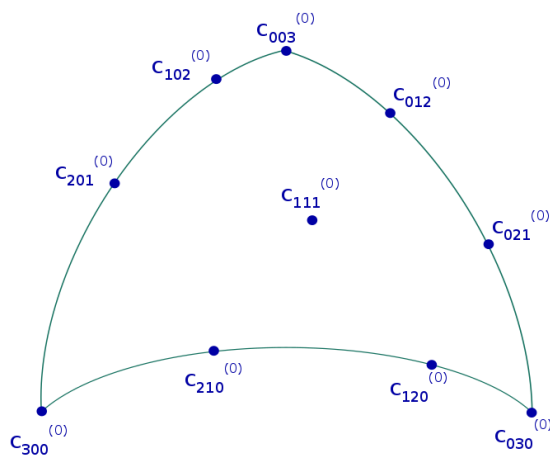
$$\begin{aligned} p(v) &= \sum_{i+j+k=d-\ell+1} c_{ijk}^{(\ell-1)} B_{ijk}^{d-\ell+1}(v) = \\ &= \sum_{i+j+k=d-\ell+1} c_{ijk}^{(\ell-1)} (b_1 B_{i-1,j,k}^{d-\ell}(v) + b_2 B_{i,j-1,k}^{d-\ell}(v) + b_3 B_{i,j,k-1}^{d-\ell}(v)) = \\ &= \sum_{i+j+k=d-\ell} B_{ijk}^{d-\ell}(v) (b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + b_2 c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + b_3 c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}) = \\ &= \sum_{i+j+k=d-\ell} c_{ijk}^{(\ell)} B_{ijk}^{d-\ell}(v). \end{aligned}$$

Za $\ell = d$ dobimo

$$p(v) = \sum_{i+j+k=0} c_{ijk}^{(d)} B_{000}^0(v) = c_{000}^{(d)}.$$

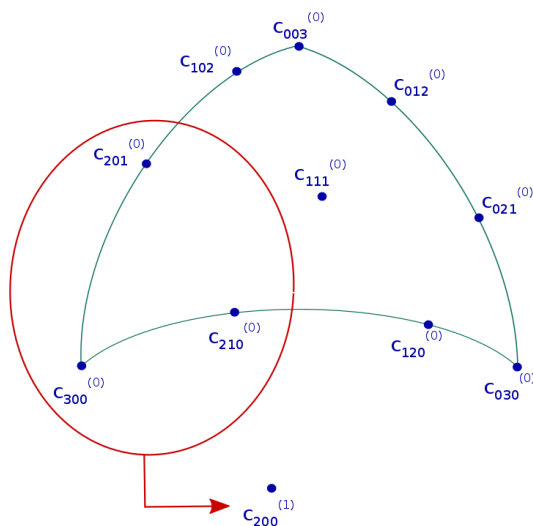
□

Primer 13 (Računanje vrednosti sferičnega polinoma na sferičnem trikotniku v poljubni točki za $d = 3$). Kot vhodni argument dobimo 10 koeficientov $c_{ijk} = c_{ijk}^{(0)}$, $i + j + k = 3$ (glej sliko 2.16).



Slika 2.16: Vhodni koeficienti $c_{ijk}^{(0)}$ za $d = 3$.

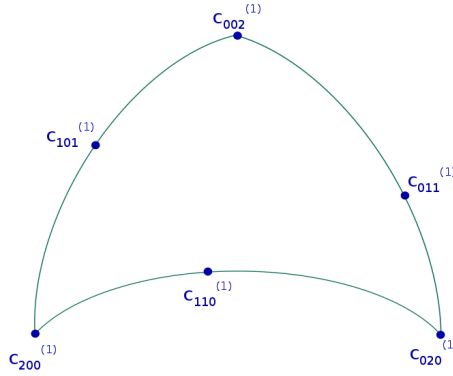
Koeficient $c_{200}^{(1)}$ dobimo iz treh koeficientov nižjega reda $c_{300}^{(0)}$, $c_{210}^{(0)}$ in $c_{201}^{(0)}$, kot prikazuje slika 2.17.



Slika 2.17: Koeficient višjega reda dobimo iz treh koeficientov nižjega reda.

Po izreku 12 izračunamo vseh 6 koeficientov prvega reda, prikazuje jih slika 2.18:

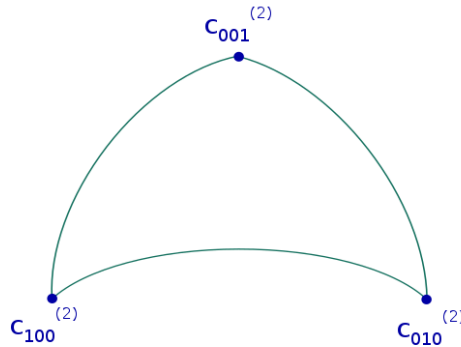
$$\begin{aligned} c_{200}^{(1)} &= b_1 c_{300}^{(0)} + b_2 c_{210}^{(0)} + b_3 c_{201}^{(0)}, & c_{110}^{(1)} &= b_1 c_{210}^{(0)} + b_2 c_{120}^{(0)} + b_3 c_{111}^{(0)}, \\ c_{020}^{(1)} &= b_1 c_{120}^{(0)} + b_2 c_{030}^{(0)} + b_3 c_{021}^{(0)}, & c_{101}^{(1)} &= b_1 c_{201}^{(0)} + b_2 c_{111}^{(0)} + b_3 c_{102}^{(0)}, \\ c_{011}^{(1)} &= b_1 c_{111}^{(0)} + b_2 c_{021}^{(0)} + b_3 c_{012}^{(0)}, & c_{002}^{(1)} &= b_1 c_{102}^{(0)} + b_2 c_{012}^{(0)} + b_3 c_{003}^{(0)}. \end{aligned}$$



Slika 2.18: Koeficienti prvega reda za $d = 3$.

V naslednjem koraku dobimo 3 koeficiente drugega reda, prikazuje jih slika 2.19:

$$\begin{aligned} c_{001}^{(2)} &= b_1 c_{101}^{(1)} + b_2 c_{011}^{(1)} + b_3 c_{002}^{(1)}, \\ c_{100}^{(2)} &= b_1 c_{200}^{(1)} + b_2 c_{110}^{(1)} + b_3 c_{101}^{(1)}, \\ c_{010}^{(2)} &= b_1 c_{110}^{(1)} + b_2 c_{020}^{(1)} + b_3 c_{011}^{(1)}. \end{aligned}$$



Slika 2.19: Koeficienti drugega reda za $d = 3$.

Nazadnje dobimo koeficient tretjega reda $c_{000}^{(3)}$, ki predstavlja vrednost sferičnega polinoma na sferičnem trikotniku v poljubni točki, prikazuje ga slika 2.20:

$$c_{000}^{(3)} = b_1 c_{100}^{(2)} + b_2 c_{010}^{(2)} + b_3 c_{001}^{(2)}.$$

$$c_{000}^{(3)}$$

Slika 2.20: Koeficient tretjega reda za $d = 3$.

Iz izreka 12 direktno sledi de Casteljaujev algoritem za izračun vrednosti sferičnega polinoma p v B-formi.

Algoritem 14 (de Casteljau)

Vhodni podatki: $c_{ijk}^{(0)}$, $i + j + k = d$.

Za $\ell = 1, \dots, d$

Za vse $i + j + k = d - \ell$

$$c_{ijk}^{(\ell)} = b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + b_2 c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + b_3 c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}$$

Izhod: $c_{000}^{(d)}$.

Trditev 15. Za koeficient v de Casteljaujevem algoritmu in v (2.7) velja formula, ki je analogna formuli za klasične Bernsteinove bazne polinome:

$$c_{ijk}^{(\ell)} = \sum_{\nu+\mu+\kappa=\ell} c_{i+\nu,j+\mu,k+\kappa} B_{\nu\mu\kappa}^{\ell}(v), \quad i + j + k = d - \ell.$$

Dokaz. Najprej prepišemo enačbo

$$c_{ijk}^{(1)} = b_1 c_{i+1,j,k} + b_2 c_{i,j+1,k} + b_3 c_{i,j,k+1}, \quad i + j + k = d - 1,$$

v enakost

$$c_{ijk}^{(1)} = (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) c_{ijk},$$

kjer velja $E_1 c_{ijk} = c_{i+1,j,k}$, $E_2 c_{ijk} = c_{i,j+1,k}$ in $E_3 c_{ijk} = c_{i,j,k+1}$. Potem lahko formulo v algoritmu prepišemo v

$$c_{ijk}^{(\ell)} = (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) c_{ijk}^{(\ell-1)}.$$

Isti postopek uporabimo $(\ell - 1)$ -krat in dobimo

$$\begin{aligned} c_{ijk}^{(\ell)} &= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3)^{\ell} c_{ijk} \\ &= \sum_{\nu+\mu+\kappa=\ell} B_{\nu\mu\kappa}^{\ell}(v) E_1^{\nu} E_2^{\mu} E_3^{\kappa} c_{ijk} \\ &= \sum_{\nu+\mu+\kappa=\ell} c_{i+\nu,j+\mu,k+\kappa} B_{\nu\mu\kappa}^{\ell}(v). \end{aligned}$$

□

2.5 Sferični polinomi na delih sferičnih trikotnikov

Naj bo p sferični polinom, zapisan v sferični B-formi (2.5) sferičnega trikotnika $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in w točka v notranjosti trikotnika T . Točka w razdeli T na tri sferične podtrikotnike

$$T_1 = \langle w, v_2, v_3 \rangle, \quad T_2 = \langle w, v_3, v_1 \rangle, \quad T_3 = \langle w, v_1, v_2 \rangle.$$

Naslednji izrek pove, kako zapisati p v sferični B-formi na vsakem podtrikotniku.

Izrek 16. *Naj bodo $a = (a_1, a_2, a_3)$ sferične baricentrične koordinate točke w v notranjosti T . Za vsak $\ell = 1, 2, 3$ naj bo $B_{ijk}^{T_\ell, d}$ sferični Bernsteinov bazni polinom za T_ℓ . Potem je*

$$p(v) = \begin{cases} \sum_{i+j+k=d} c_{0jk}^{(i)} B_{ijk}^{T_1, d}(v), & v \in T_1 \\ \sum_{i+j+k=d} c_{i0k}^{(j)} B_{ijk}^{T_2, d}(v), & v \in T_2 \\ \sum_{i+j+k=d} c_{ij0}^{(k)} B_{ijk}^{T_3, d}(v), & v \in T_3 \end{cases},$$

kjer so $c_{ijk}^{(\nu)} := c_{ijk}^{(\nu)}(a)$ koeficienti, dobljeni v ν -tem koraku de Casteljaujevega algoritma z začetnim členom $c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk}$.

Dokaz. Naj bo $v \in T_1$ in $\tilde{b}_1(v)$, $\tilde{b}_2(v)$, $\tilde{b}_3(v)$ sferične baricentrične koordinate točke v glede na trikotnik T_1 . Če vstavimo točko $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ v enačbo $v = \tilde{b}_1(v)w + \tilde{b}_2(v)v_2 + \tilde{b}_3(v)v_3$ dobimo

$$v = \tilde{b}_1 a_1 v_1 + (\tilde{b}_1 a_2 + \tilde{b}_2) v_2 + (\tilde{b}_1 a_3 + \tilde{b}_3) v_3.$$

Torej je

$$\begin{aligned} B_{\nu\beta\gamma}^{T, d}(v) &= \frac{d! (\tilde{b}_1 a_1)^\nu (\tilde{b}_1 a_2 + \tilde{b}_2)^\beta (\tilde{b}_1 a_3 + \tilde{b}_3)^\gamma}{\nu! \beta! \gamma!} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\beta} \sum_{\kappa=0}^{\gamma} B_{\nu+\mu+\kappa, \beta-\mu, \gamma-\kappa}^{T_1, d}(v) B_{\nu\mu\kappa}^{T, \nu+\mu+\kappa}(w), \end{aligned}$$

za vse $\nu + \beta + \gamma = d$. Ko $B_{\nu\beta\gamma}^{T, d}(v)$ vstavimo v enačbo

$$p(v) = \sum_{\nu+\beta+\gamma=d} c_{\nu\beta\gamma} B_{\nu\beta\gamma}^{T, d}(v),$$

dobimo

$$p(v) = \sum_{\nu+\beta+\gamma=d} c_{\nu\beta\gamma} \sum_{\mu=0}^{\beta} \sum_{\kappa=0}^{\gamma} B_{\nu+\mu+\kappa, \beta-\mu, \gamma-\kappa}^{T_1, d}(v) B_{\nu\mu\kappa}^{T, \nu+\mu+\kappa}(w).$$

Izberemo $\beta = j + \mu$, $\gamma = k + \kappa$ in $\nu + \mu + \kappa = i$ in dobimo, da je koeficient pri $B_{ijk}^{T_1, d}$ enak

$$\sum_{\nu+\mu+\kappa=i} c_{\nu, j+\mu, k+\kappa} B_{\nu\mu\kappa}^{T, i}(w),$$

kar je po trditvi 15 ravno $c_{0jk}^{(i)}$. Analogno dokažemo formuli za $v \in T_2$ in $v \in T_3$. $\square$

2.6 Višanje stopnje sferičnim polinomom

Naj bo B_{ijk}^d sferični Bernsteinov bazni polinom stopnje d . Če ga pomnožimo z

$$1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \beta_{011}b_2b_3 + \beta_{101}b_1b_3 + \beta_{110}b_1b_2, \quad (2.8)$$

kjer so β -te kot v lemi 24, vidimo, da B_{ijk}^d lahko zapišemo kot linearno kombinacijo sferičnih Bernsteinovih baznih polinomov stopnje $d+2$ in da velja

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_4 \subset \dots$$

in

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_5 \subset \dots$$

Torej lahko vsak sferični polinom stopnje d zapišemo kot sferični polinom stopnje $d+2$.

Izrek 17. *Naj bo p sferični polinom v B -formi (2.5) glede na sferični trikotnik $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Potem lahko p zapišemo kot*

$$p = \sum_{i+j+k=d+2} \bar{c}_{ijk} B_{ijk}^{d+2},$$

kjer so

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijk} = \frac{1}{(d+1)(d+2)} & (i(i-1)c_{i-2,j,k} + ij\beta_{110}c_{i-1,j-1,k} + j(j-1)c_{i,j-2,k} + \\ & + ik\beta_{101}c_{i-1,j,k-1} + k(k-1)c_{i,j,k-2} + jk\beta_{011}c_{i,j-1,k-1}) \end{aligned}$$

in β_{011}, β_{101} in β_{110} kot v lemi 24.

Dokaz. Naj bo p linearna kombinacija sferičnih Bernsteinovih baznih polinomov stopnje d :

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d.$$

Če pomnožimo p z (2.8) in vstavimo B_{ijk}^d dobimo

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \beta_{011}b_2b_3 + \beta_{101}b_1b_3 + \beta_{110}b_1b_2)$$

oziroma

$$\begin{aligned} p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} \frac{d!}{i!j!k!} & (b_1^{i+2} b_2^j b_3^k + b_1^i b_2^{j+2} b_3^k + b_1^i b_2^j b_3^{k+2} + \beta_{011} b_1^i b_2^{j+1} b_3^{k+1} + \beta_{101} b_1^{i+1} b_2^j b_3^{k+1} + \\ & + \beta_{110} b_1^{i+1} b_2^{j+1} b_3^k). \end{aligned}$$

Po prestavitvi indeksov dobimo

$$p = \sum_{i+j+k=d+2} \frac{1}{(d+2)(d+1)} \left(c_{i-2,j,k} \frac{(d+2)!}{(i-2)!j!k!} + c_{i,j-2,k} \frac{(d+2)!}{i!(j-2)!k!} + \right. \\ \left. + c_{i,j,k-2} \frac{(d+2)!}{i!j!(k-2)!} + c_{i,j-1,k-1} \frac{(d+2)!}{i!(j-1)!(k-1)!} \beta_{011} + \right. \\ \left. + c_{i-1,j,k-1} \frac{(d+2)!}{(i-1)!j!(k-1)!} \beta_{101} + c_{i-1,j-1,k} \frac{(d+2)!}{(i-1)!(j-1)!k!} \beta_{110} \right) b_1^i b_2^j b_3^k.$$

Upoštevamo $B_{ijk}^{d+2} = \frac{(d+2)!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k$, $i+j+k=d+2$, in dobimo

$$p = \sum_{i+j+k=d+2} \frac{1}{(d+2)(d+1)} (i(i-1)c_{i-2,j,k} + j(j-1)c_{i,j-2,k} + k(k-1)c_{i,j,k-2} + \\ + jkc_{i,j-1,k-1}\beta_{011} + ikc_{i-1,j,k-1}\beta_{101} + ijc_{i-1,j-1,k}\beta_{110}) B_{ijk}^{d+2}.$$

Vidimo, da so novi koeficienti res enaki

$$\bar{c}_{ijk} = \frac{1}{(d+1)(d+2)} (i(i-1)c_{i-2,j,k} + ij\beta_{110}c_{i-1,j-1,k} + j(j-1)c_{i,j-2,k} + \\ + ik\beta_{101}c_{i-1,j,k-1} + k(k-1)c_{i,j,k-2} + jk\beta_{011}c_{i,j-1,k-1})$$

□

2.7 Skrčitve sferičnih polinomov na robove

Naj bo p sferični polinom, zapisan v sferični B-formi (2.5) glede na sferični trikotnik $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in $g = p|_e$ skrčitev p na rob $e = \langle v_1, v_2 \rangle$. Ker je baricentrična koordinatna funkcija $b_3(v)$ enaka 0 za vsako točko v na robu e , velja

$$g(v) = \sum_{i+j=d} c_{ij0} \frac{d!}{i!j!} b_1^i b_2^j = \sum_{i=0}^d c_{i,d-i,0} \frac{d!}{i!(d-i)!} b_1^i b_2^{d-i}. \quad (2.9)$$

Definicija 18. Funkcije oblike (2.9), definirane na krožnih lokih, imenujemo krožni Bernstein-Beziérov polinomi.

Krožni Bernstein-Beziérov polinomi niso algebraični pač pa trigonometrični polinomi. Naj bo C enotska krožnica in e krožni lok, ki povezuje točki $v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T$ in $v_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T$ na C . Potem lahko vsako točko $v \in C$, $v = (\cos \theta, \sin \theta)^T$, enolično zapišemo kot $v = b_1 v_1 + b_2 v_2$. V matričnem zapisu dobimo

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Števili b_1 in b_2 imenujemo *krožni baricentrični koordinati* točke v . Eksplicitno sta podani z

$$b_1(\theta) = \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}, \quad b_2(\theta) = \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (2.11)$$

Definicija 19. *Funkcije*

$$B_i^d(\theta) := \binom{d}{i} b_1(\theta)^i b_2(\theta)^{d-i}, \quad i = 0, \dots, d,$$

imenujemo krožni Bernsteinovi bazni polinomi.

Izrek 20. *Krožni Bernsteinovi bazni polinomi $\{B_i^d(\theta)\}_{i=0}^d$ tvorijo bazo podprostora trigonometričnih polinomov stopnje d ,*

$$\mathcal{T}_d := \text{Lin}\{\sin^i(\theta) \cos^{d-i}(\theta)\}_{i=0}^d.$$

Dokaz. Iz enačb (2.11) vidimo, da sta $b_1(\theta)$ in $b_2(\theta)$ linearni kombinaciji $\cos(\theta)$ in $\sin(\theta)$. Zato produkti $b_1(\theta)^i b_2(\theta)^{d-i}$ ležijo v $\mathcal{T}_d$ za vsak $i = 0, \dots, d$. Iz tega sledi, da krožni Bernsteinovi bazni polinomi ležijo v $\mathcal{T}_d$. Linearno neodvisnost B_i^d pokažemo z indukcijo na stopnjo d . Recimo, da $\{B_i^{d-1}\}_{i=0}^{d-1}$ tvorijo bazo za $\mathcal{T}_{d-1}$. Pokažimo, da $\{B_i^d\}_{i=0}^d$ tvorijo bazo za $\mathcal{T}_d$. Pokazati moramo, da se da vsak člen $\sin^i(\theta) \cos^{d-i}(\theta)$ zapisati kot linearna kombinacija $\{B_i^d\}_{i=0}^d$ za vsak $i = 0, \dots, d$. Fiksirajmo i . Z upoštevanjem induksijske predpostavke in (2.10) dobimo

$$\begin{aligned} \sin^i(\theta) \cos^{d-i}(\theta) &= \sin^i(\theta) \cos^{d-1-i}(\theta) \cos(\theta) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \binom{d-1}{j} b_1(\theta)^j b_2(\theta)^{d-1-j} \right) (\cos(\theta_1) b_1(\theta) + \cos(\theta_2) b_2(\theta)) = \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \binom{d-1}{j} \cos(\theta_1) b_1(\theta)^{j+1} b_2(\theta)^{d-1-j} + \\ &\quad \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \binom{d-1}{j} \cos(\theta_2) b_1(\theta)^j b_2(\theta)^{d-j} \end{aligned}$$

za neke koeficiente β_j . Po zamenjavi indeksa j z $k = j + 1$ v prvem členu dobimo

$$\begin{aligned} \sin^i(\theta) \cos^{d-i}(\theta) &= \sum_{k=1}^d \beta_{k-1} \binom{d-1}{k-1} \cos(\theta_1) b_1(\theta)^k b_2(\theta)^{d-k} + \\ &\quad \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \binom{d-1}{j} \cos(\theta_2) b_1(\theta)^j b_2(\theta)^{d-j}. \end{aligned}$$

Če v prvi vsoti vzamemo $k = 0$, v drugi pa $j = d$, dobimo ničelni člen, zato lahko zapišemo

$$\sin^i(\theta) \cos^{d-i}(\theta) = \sum_{k=0}^d \left[\left(\beta_{k-1} \binom{d-1}{k-1} \cos(\theta_1) + \beta_k \binom{d-1}{k} \cos(\theta_2) \right) \frac{1}{\binom{d}{k}} \right] B_k^d(\theta).$$

S tem je izrek dokazan. $\square$

V [9] je dokazano, da velja

$$\mathcal{T}_d = \begin{cases} \text{Lin}\{1, \cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(4\theta), \sin(4\theta), \dots, \cos(d\theta), \sin(d\theta)\}, & d \text{ sod}, \\ \text{Lin}\{\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(3\theta), \sin(3\theta), \dots, \cos(d\theta), \sin(d\theta)\}, & d \text{ lih}. \end{cases}$$

2.8 Homogeni polinomi treh spremenljivk

V tem poglavju bomo pokazali, da so sferični polinomi skrčitve določenih homogenih polinomov treh spremenljivk na sfero S .

Definicija 21. Za poljubno naravno število k pravimo, da je funkcija f , definirana na $\mathbb{R}^3$ homogena reda k , če velja $f(rx, ry, rz) = r^k f(x, y, z)$ za vsak $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in vsak $r \in \mathbb{R}$.

Naj bo $\mathcal{H}_d := \{p \in \mathcal{P}_d, p \text{ je homogen polinom reda } d\}$, kjer je $\mathcal{P}_d$ prostor polinomov treh spremenljivk skupne stopnje d . Potem $\mathcal{H}_d$ imenujemo prostor homogenih polinomov treh spremenljivk reda d .

Po definiciji je polinom treh spremenljivk p stopnje d homogen natanko tedaj, ko ga lahko zapišemo kot

$$p(x, y, z) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Ker so monomi očitno linearno neodvisni, je dimenzija $\mathcal{H}_d$ enaka $\binom{d+2}{2}$. Skonstruirajmo alternativno bazo za prostor $\mathcal{H}_d$.

Naj bo T sferični trikotnik z oglišči $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ in $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Naj bodo $h_1(v), h_2(v), h_3(v)$ enolične rešitve sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

to je

$$h_1(v) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ z & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad h_2(v) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ z_1 & z & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad h_3(v) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Če točka v leži na enotski sferi S , potem so $(h_1, h_2, h_3) = (h_1(v), h_2(v), h_3(v))$ kar sferične baricentrične koordinate iz (2.3). Vidimo, da so funkcije $h_i(v)$ homogeni polinomi reda 1.

Izrek 22. *Funkcije*

$$H_{ijk}^d := \frac{d!}{i!j!k!} h_1^i h_2^j h_3^k, \quad i + j + k = d,$$

sestavljajo bazo prostora $\mathcal{H}_d$.

Dokaz. Ker so h_i homogeni polinomi reda 1, sledi $H_{ijk}^d \in \mathcal{H}_d$. Da dokažemo, da H_{ijk}^d tvorijo bazo prostora $\mathcal{H}_d$, je dovolj pokazati, da tvorijo linearno ogrinjačo za $\mathcal{H}_d$, to je, da se da vsak monom oblike $x^\nu y^\mu z^\kappa$ z $\nu + \mu + \kappa = d$, zapisati kot linearno kombinacijo $\{H_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$. Za $d = 0$ izrek očitno velja. Za $d = 1$ trditev sledi iz dejstva, da je $x = h_1(v)x_1 + h_2(v)x_2 + h_3(v)x_3$ in analognih formul za y in z . Splošni primer dokažemo z indukcijo na stopnjo d . Dokazati moramo, da velja

$$x^\nu y^\mu z^\kappa = \sum_{i+j+k=d} \beta_{ijk} H_{ijk}^d(v), \quad \nu + \mu + \kappa = d,$$

za neke koeficiente β_{ijk} . Recimo, da trditev velja za vse stopnje, manjše od d . Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} x^\nu y^\mu z^\kappa &= x(x^{\nu-1} y^\mu z^\kappa) = x \left(\sum_{i+j+k=d-1} \alpha_{ijk} H_{ijk}^{d-1}(v) \right) \\ &= (h_1(v)x_1 + h_2(v)x_2 + h_3(v)x_3) \sum_{i+j+k=d-1} \alpha_{ijk} \frac{(d-1)!}{i!j!k!} h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^k(v) \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=d \\ i \neq 0}} x_1 \alpha_{i-1,j,k} \frac{(d-1)!}{(i-1)!j!k!} h_1^{i-1}(v) h_2^j(v) h_3^k(v) + \\ &\quad \sum_{\substack{i+j+k=d \\ j \neq 0}} x_2 \alpha_{i,j-1,k} \frac{(d-1)!}{i!(j-1)!k!} h_1^i(v) h_2^{j-1}(v) h_3^k(v) + \\ &\quad \sum_{\substack{i+j+k=d \\ k \neq 0}} x_3 \alpha_{i,j,k-1} \frac{(d-1)!}{i!j!(k-1)!} h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^{k-1}(v), \end{aligned}$$

za neke koeficiente α_{ijk} , $i + j + k = d - 1$. Definirajmo $\alpha_{-1,j,k} = 0$, $\alpha_{i,-1,k} = 0$ in $\alpha_{i,j,-1} = 0$. Potem lahko vsote združimo in dobimo

$$\begin{aligned} x^\nu y^\mu z^\kappa &= \sum_{i+j+k=d} (x_1 i \alpha_{i-1,j,k} + x_2 j \alpha_{i,j-1,k} + x_3 k \alpha_{i,j,k-1}) \frac{(d-1)!}{i!j!k!} h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^k(v) = \\ &= \sum_{i+j+k=d} \frac{(x_1 i \alpha_{i-1,j,k} + x_2 j \alpha_{i,j-1,k} + x_3 k \alpha_{i,j,k-1})}{d} H_{ijk}^d(v). \end{aligned}$$

Iskani koeficienti β_{ijk} so torej enaki

$$\frac{(x_1 i \alpha_{i-1,j,k} + x_2 j \alpha_{i,j-1,k} + x_3 k \alpha_{i,j,k-1})}{d}.$$

□

Prostor sferičnih polinomov $\mathcal{B}_d$ je tesno povezan s prostorom $\mathcal{H}_d$. Velja namreč $\mathcal{B}_d = \mathcal{H}_d|_S$. Z uporabo te zveze in izreka 22 lahko sedaj dokažemo linearno neodvisnost sferičnih Bernsteinovih baznih polinomov.

Posledica 23. *Prostor $\mathcal{B}_d$ ima dimenzijo $\binom{d+2}{2}$ in sferični Bernsteinovi bazni polinomi $\{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$ tvorijo njegovo bazo.*

Dokaz. Zadošča pokazati, da so B_{ijk}^d linearno neodvisni. Za vsak $i + j + k = d$ je B_{ijk}^d skršitev homogenega polinoma H_{ijk}^d na sfero S . Predpostavimo, da velja

$$\sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d(v) = 0$$

za vsak $v \in S$. Iz tega sledi, da je $\sum_{i+j+k=d} c_{ijk} H_{ijk}^d(v) = 0$ za vsak $v \in \mathbb{R}^3$. Po prejšnjem izreku so $c_{ijk} = 0$, kar pomeni, da so B_{ijk}^d res linearno neodvisni. $\square$

Lema 24. *Naj bo $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in za vsak $i = 1, 2, 3$ naj bo a_i dolžina loka roba T , ki je nasproten oglišču v_i . Potem velja*

$$1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \beta_{011} b_2 b_3 + \beta_{101} b_1 b_3 + \beta_{110} b_1 b_2,$$

kjer so

$$\beta_{011} = 2 \cos a_1, \quad \beta_{101} = 2 \cos a_2, \quad \beta_{110} = 2 \cos a_3$$

in (b_1, b_2, b_3) sferične baricentrične koordinate poljubne točke sferičnega trikotnika.

Dokaz. Iz rezultatov za homogene polinome sledi, da lahko za (x, y, z) na sferi funkcijo

$$1 = x^2 + y^2 + z^2$$

zapišemo kot linearno kombinacijo funkcij

$$\{b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_1 b_2, b_1 b_3, b_2 b_3\}.$$

Koeficiente dobimo iz linearne sistema, ki ustreza interpolaciji oglišč in vmesnih točk na robovih sferičnega trikotnika T . Iščemo torej koeficiente c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 in c_6 , ki zadoščajo enačbi

$$1 = c_1 b_1^2 + c_2 b_2^2 + c_3 b_3^2 + c_4 b_2 b_3 + c_5 b_1 b_3 + c_6 b_1 b_2. \quad (2.13)$$

Če vzamemo sferične baricentrične koordinate $(b_1, b_2, b_3) = (1, 0, 0)$, ki pripadajo točki v_1 in jih vstavimo v enačbo (2.13), dobimo $c_1 = 1$. Če vzamemo sferične baricentrične koordinate točk v_2 in v_3 vidimo, da sta tudi koeficienta c_2 in c_3 enaka 1. Izračunajmo še koeficient c_6 . Naj bo C enotska krožnica, ki povezuje točki $v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T$ in

$v_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T$. Vzemimo točko v , ki leži na sredini krožnega loka med točkami v_1 in v_2 . Potem v zapišemo kot $v = (\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})^T$. Vemo, da lahko točko v zapišemo kot linearno kombinacijo v_1 in v_2 (b_3 je na robu $\langle v_1, v_2 \rangle$ enak 0), torej kot $v = b_1 v_1 + b_2 v_2$. Ker je polmer sfere enak 1 je kot med vektorjema v_1 in v_2 enak dolžini krožnega loka med njima, to je $a_3 = \theta_2 - \theta_1$. Izračunajmo koeficient $b_1(\theta)$:

$$b_1(\theta) = \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\sin(\frac{a_3}{2})}{\sin(a_3)} = \frac{1}{2 \cos(\frac{a_3}{2})}.$$

Hitro vidimo, da je $b_2(\theta) = b_1(\theta)$. Vstavimo dobljeno v enačbo (2.13) in dobimo

$$1 = b_1^2 + b_2^2 + c_6 b_1 b_2,$$

$$1 = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{a_3}{2})} + c_6 \frac{1}{4 \cos^2(\frac{a_3}{2})},$$

oziroma

$$c_6 = \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2(\frac{a_3}{2})}\right) 4 \cos^2(\frac{a_3}{2}) = 2 \left(\cos^2(\frac{a_3}{2}) - \sin^2(\frac{a_3}{2})\right) = 2 \cos(a_3).$$

Koeficienta c_4 in c_5 dobimo analogno. □

2.9 Sferične harmonične funkcije

V tem poglavju bomo pokazali, da ima prostor $\mathcal{B}_d$ bazo, sestavljeno iz klasičnih sferičnih harmoničnih funkcij.

Točko $v = (x, y, z)$, ki leži na sferi, lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos(\pi - \theta) \end{bmatrix},$$

kjer je $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Števili θ in ϕ imenujemo *sferični koordinati* točke v .

Definicija 25. *Polinom treh spremenljivk p imenujemo harmonični polinom, če velja $\Delta p \equiv 0$, kjer je Δ Laplaceov operator, definiran kot $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Vektorski prostor*

$$\mathcal{Y}_d := \{p|_S : p \in \mathcal{P}_d, p \text{ harmoničen in homogen reda } d\}$$

imenujemo prostor sferičnih harmoničnih funkcij stopnje d .

Ob danih d in ℓ naj bo

$$P_d^\ell(x) = (1 - x^2)^{\frac{\ell}{2}} \frac{d^\ell}{dx^\ell} P_d(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

Legendrova funkcija stopnje d in reda ℓ , kjer so P_d Legendrovi polinomi, ki zadoščajo rekurzivni zvezi

$$P_d(x) = -\frac{d-1}{d} P_{d-2}(x) + \frac{2d-1}{d} x P_{d-1}(x)$$

z začetnima členoma $P_0(x) = 1$ in $P_1(x) = x$.

Izrek 26. $\mathcal{Y}_d$ je vektorski prostor dimenzije $2d+1$ in funkcije

$$Y_{d,2\ell+1}(\theta, \phi) := \cos(\ell\phi) P_d^\ell(\cos\theta), \quad \ell = 0, \dots, d,$$

$$Y_{d,2\ell}(\theta, \phi) := \sin(\ell\phi) P_d^\ell(\cos\theta), \quad \ell = 1, \dots, d,$$

sestavljajo ortogonalno bazo za $\mathcal{Y}_d$ glede na standardni skalarni produkt na S ,

$$\langle f, s \rangle = \int f g dS.$$

Še več, prostori $\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_d$ so paroma ortogonalni in $\mathcal{P}_d|_S = \mathcal{Y}_d \oplus \mathcal{Y}_{d-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{Y}_0$.

Dokaz izreka je spisan v knjigi [1].

Funkcijo $Y_{d,\ell}$ lahko zapišemo s funkcijami $\sin$ in $\cos$. Formulo za $d = \ell = 0$ preprosto izračunamo:

$$Y_{0,1}(\theta, \phi) = \cos(0) P_0^0(\cos\theta) = (1 - \cos\theta)^0 D_{\cos\theta}^0 P_0(\cos\theta) = 1.$$

Analogno izračunamo še

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = \cos\theta,$$

$$Y_{1,2}(\theta, \phi) = \sin\phi \sin\theta,$$

$$Y_{1,3}(\theta, \phi) = \cos\phi \sin\theta.$$

Z višanjem stopnje d formule postajajo vedno bolj komplicirane. Poglejmo si povezavo med sferičnimi polinomi in sferičnimi harmoničnimi funkcijami.

Izrek 27. Za $d \geq 1$ velja $\dim(\mathcal{P}_d|_S) = (d+1)^2$ in $\mathcal{P}_d|_S = \mathcal{B}_d \oplus \mathcal{B}_{d-1}$. Še več,

$$\mathcal{B}_d = \begin{cases} \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{Y}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{Y}_{2k}, & d = 2k \\ \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{Y}_{2k+1}, & d = 2k+1 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Dokaz. Naj bo $d = 2k$. Pokažimo, da je za vsak $i = 1, \dots, k$, $\mathcal{Y}_{2i}$ podprostor prostora $\mathcal{B}_d$. Naj bo p polinom v $2i + 1$ dimenzionalnem prostoru $\mathcal{Y}_{2i}$. Potem je p polinom stopnje $2i$, ki je homogen reda $2i$. Na S pa je p ekvivalenten polinomu stopnje d , to je $q = (x^2 + y^2 + z^2)^{d-2i}p$, ki je homogen reda d in zato $p \in \mathcal{B}_d$. Iz ortogonalnosti sferičnih harmoničnih funkcij (izrek 26) sledi linearna neodvisnost množice baznih funkcij povezanih z $\cup_{i=0}^k \mathcal{Y}_{2i}$. Za $d = 2k$, formula (2.14) sledi iz dejstva, da je dimenzija prostora $\mathcal{B}_d$ enaka $\binom{d+2}{2} = \sum_{i=0}^k (4i + 1)$. Dokaz za liho število d je podoben.

Enakost $P_d|_S = \mathcal{B}_d \oplus \mathcal{B}_{d-1}$ sledi iz formule $P_d|_S = \mathcal{Y}_d \oplus \mathcal{Y}_{d-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{Y}_0$, ki je navedena v izreku 26. $\square$

Primer 28. Oglejmo si primer, ko je $d = 2$. Hitro vidimo, da je

$$\mathcal{Y}_0 = \text{Lin}\{1\},$$

$$\mathcal{Y}_1 = \text{Lin}\{x, y, z\},$$

$$\mathcal{Y}_2 = \text{Lin}\{xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2\}.$$

Zato je $\mathcal{B}_2 = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{Y}_2$ dimenzije 6, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{Y}_1$ pa dimenzije 3. Torej bo prostor $\mathcal{P}_2|_S$ dimenzije 9. Dimenzija prostora $\mathcal{P}_2$ je enaka 10, ko prostor skrčimo na enotsko sfero S pa se dimenzija zmanjša za 1.

Tabela 2.1 prikazuje dimenzije različnih prostorov za $0 \leq d \leq 5$.

d	$\mathcal{Y}_d$	$\mathcal{B}_d$	$\mathcal{P}_d _S$	$\mathcal{P}_d$
0	1	1	1	1
1	3	3	4	4
2	5	6	9	10
3	7	10	16	20
4	9	15	25	35
5	11	21	36	56

Tabela 2.1: Dimenzije prostorov za $0 \leq d \leq 5$.

2.10 Sferične krpe

Definicija 29. Naj bo p sferični polinom, zapisan v B -formi (2.5). Potem definiramo njegove sferične kontrolne točke kot $\bar{c}_{ijk} = c_{ijk}v_{ijk}$, $i + j + k = d$, kjer so v_{ijk} domenske točke v sferičnem trikotniku (2.6).

Definicija 30. Naj bo p sferični polinom, zapisan v B -formi (2.5), definiran na sferičnem trikotniku $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Sferično krpo definiramo kot površino $P = \{p(v)v; v \in T\}$, ki leži v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 31. Sferično kontrolno mrežo dobimo tako, da povežemo vse sferične kontrolne točke.

Primer 32. Poglejmo si primer sferičnih kontrolnih točk in kontrolne mreže za dan trikotnik. Naj bodo oglišča trikotnika enaka

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(0.1, 0.2, 1)}{\|(0.1, 0.2, 1)\|}, \\ v_2 &= \frac{(4, 0, 1)}{\|(4, 0, 1)\|}, \\ v_3 &= \frac{(2, 3, 1)}{\|(2, 3, 1)\|}. \end{aligned}$$

Za $n = 3$ dobimo 10 domenskih točk v sferičnem trikotniku

$$\begin{aligned} v_{003} &= (0.534522, 0.801784, 0.267261), \\ v_{102} &= (0.444843, 0.68587, 0.575931), \\ v_{201} &= (0.278239, 0.45457, 0.846138), \\ v_{300} &= (0.09759, 0.19518, 0.9759), \\ v_{012} &= (0.75301, 0.592148, 0.286944), \\ v_{111} &= (0.667117, 0.415097, 0.618587), \\ v_{210} &= (0.46334, 0.15521, 0.872483), \\ v_{021} &= (0.913871, 0.296074, 0.277813), \\ v_{120} &= (0.810273, 0.0776049, 0.580892), \\ v_{030} &= (0.970143, 0, 0.242536). \end{aligned}$$

Če si izberemo koeficiente

$$\begin{aligned}
 c_{003} &= 1.9345, \\
 c_{102} &= 1.12724, \\
 c_{201} &= 2.00803, \\
 c_{300} &= 2.63122, \\
 c_{012} &= 0.892535, \\
 c_{111} &= 0.502286, \\
 c_{210} &= 1.60467, \\
 c_{021} &= 0.900301, \\
 c_{120} &= 0.843023, \\
 c_{030} &= 2.22911,
 \end{aligned}$$

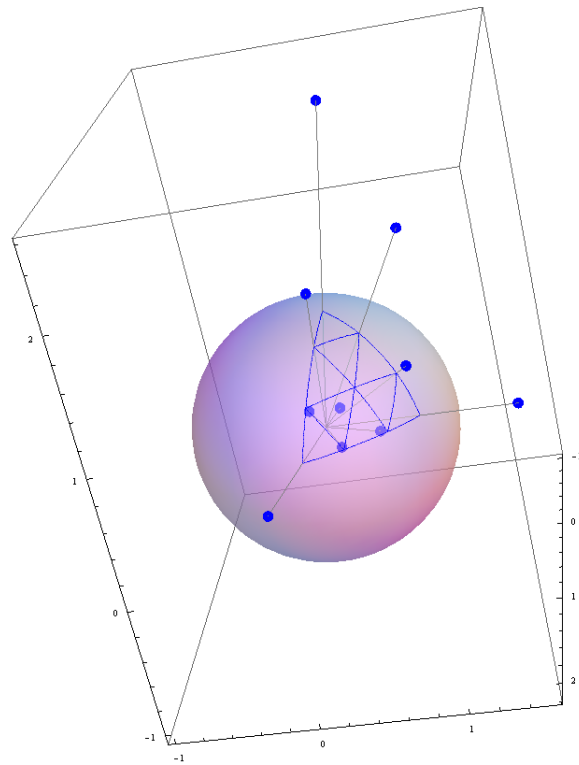
potem so sferične kontrolne točke enake

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{003} &= (1.03404, 1.55105, 0.517018), \\
 \bar{c}_{102} &= (0.501443, 0.773138, 0.64921), \\
 \bar{c}_{201} &= (0.558712, 0.912789, 1.69907), \\
 \bar{c}_{300} &= (0.256781, 0.513562, 2.56781), \\
 \bar{c}_{012} &= (0.672087, 0.528513, 0.256107), \\
 \bar{c}_{111} &= (0.335084, 0.208498, 0.310708), \\
 \bar{c}_{210} &= (0.743507, 0.24906, 1.40004), \\
 \bar{c}_{021} &= (0.822758, 0.266556, 0.250116), \\
 \bar{c}_{120} &= (0.683079, 0.0654227, 0.489705), \\
 \bar{c}_{030} &= (2.16256, 0, 0.540639).
 \end{aligned}$$

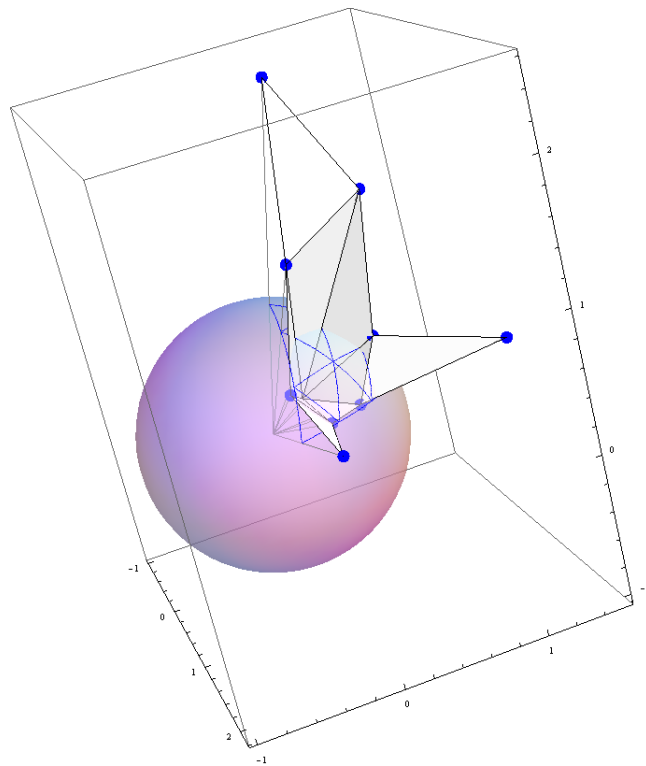
Sferične kontrolne točke prikazuje slika 2.21, sferično kontrolno mrežo pa slika 2.22.

Slika 2.23 prikazuje sferično krpo za dane podatke, na sliki 2.24 pa sta sferična krpa in kontrolna mreža izrisani skupaj.

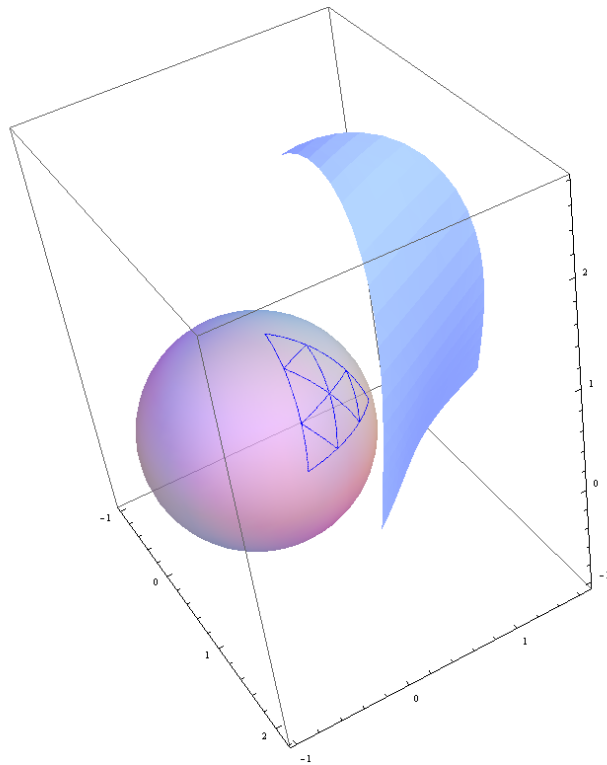
Ker je funkcija $p \equiv 1$ vsebovana v $\mathcal{B}_d$ za vsako sodo število d , lahko za vsako sodo število d in poljubno konstanto a skonstruiramo sferično krpo, ki leži na konstantni višini a nad sferičnim trikotnikom T . Ta krpa je sferični trikotnik, ki ne leži na enotski sferi, pač pa na sferi s polmerom $1 + a$. Naslednji izrek nam pove, da ne moremo konstruirati takih sferičnih krp, če je d liho število.



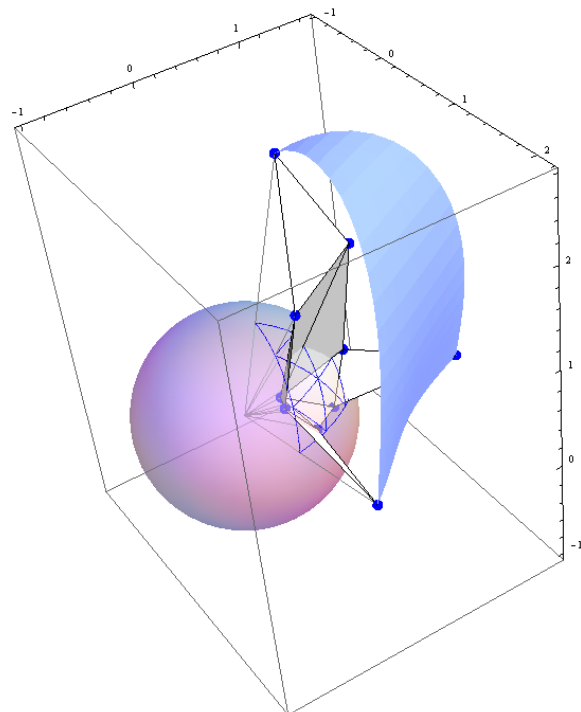
Slika 2.21: Sferične kontrolne točke.



Slika 2.22: Sferična kontrolna mreža.



Slika 2.23: Sferična krpa.



Slika 2.24: Sferična krpa s kontrolno mrežo.

Izrek 33. *Naj bo T sferični trikotnik in d liho število. Potem ne moremo najti polinoma p stopnje d , definiranega na sferičnem trikotniku T , za katerega bi veljalo $p(v) = 1$ za vsak $v \in T$.*

Dokaz. Izrek dokažimo s protislovjem. Recimo, da imamo sferični polinom p stopnje $d = 2k + 1$, ki zadošča enakosti $p(v) = 1$ za vsak $v \in T$. Potem lahko po izreku 20 skrčitev polinoma p na rob e sferičnega trikotnika T zapišemo s krožnimi Bernsteinovimi baznimi polinomi kot

$$p(\theta) = \sum_{j=0}^k (a_j \sin((2j+1)\theta) + b_j \cos((2j+1)\theta)),$$

kjer je $p(\theta) \equiv 1$ na nekem nepraznem intervalu $[\theta_1, \theta_2]$. Če p odvajamo po θ , dobimo

$$0 = \sum_{j=0}^k (a_j(2j+1) \cos((2j+1)\theta) - b_j(2j+1) \sin((2j+1)\theta))$$

na intervalu (θ_1, θ_2) . Ker sta $\sin$ in $\cos$ linearno neodvisni funkciji, iz enačbe sledi, da so $a_j = b_j = 0$ za vse $j = 0, \dots, k$, kar pomeni, da je $p(\theta) = 0$. To pa je v protislovju s predpostavko. $\square$

Poglavje 3

Odводи sferičnih polinomov

V tem poglavju bomo spoznali formule za odvode homogenih in sferičnih polinomov ter opisali pogoje za gladkost sferičnih polinomov preko robov sferičnih trikotnikov.

3.1 Smerni odvodi funkcij na sferi

Naj bo f funkcija, definirana na enotski sferi S . Z v označimo točko na sferi S in vektor, ki se začne v izhodišču sfere in konča v točki v . Naj bo g enotski vektor, pravokoten na vektor v in naj bo Π ravnina skozi točko v , ki jo določata vektorja g in v . Presek te ravnine s sfero določa krožnico, ki poteka skozi točko v . Recimo, da krožnico parametriziramo z $a(\theta)$ glede na njeno dolžino tako, da velja $a(0) = v$. Vektor g določa smer tangentnega vektorja na krožnico a v točki v .

Definicija 34. Če je f dovoljkrat zvezno odvedljiva funkcija na S , definiramo odvod f v točki v v smeri g kot

$$D_g f(v) := \left. \frac{df(a(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=0}.$$

Analogno definiramo odvode višjega reda.

Naslednja lema pove, kako izračunati smerni odvod funkcije f v točki v z običajnim smernim odvodom razširjene funkcije F .

Lema 35. Naj bo F funkcija treh spremenljivk, za katero velja $F|_S = f$. Potem za poljubno točko v na sferi S in poljuben enotski vektor g , pravokoten na vektor v , velja

$$D_g f(v) = D_g F(v),$$

kjer je $D_g F$ običajen smerni odvod funkcije F v smeri g .

Dokaz. Naj bo $a(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))^T$. Potem je $g = (x'(0), y'(0), z'(0))^T$. Po verižnem pravilu dobimo

$$D_g f(v) = \frac{df(a(\theta))}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{dF(a(\theta))}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = g^T \nabla F(v) = D_g F(v).$$

□

Če imamo funkcijo f , definirano na sferi S , lahko funkcijo F iz leme 35 skonstruiramo kot katerokoli homogeno razširitev f na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Iz dokaza leme vidimo, da dobimo isto vrednost za odvod ne glede na to kakšne stopnje je razširitev.

Definiramo lahko tudi smerne odvode višjih redov funkcije f , definirane na sferi S . Za vsako točko $v \in S$ naj bo $g(v)$ vektorsko polje, tangentno na S v točki v in F taka funkcija treh spremenljivk, da velja $F|_S = f$. Naj bo $g(v)^T \nabla F(v)$ neskončnokrat odvedljiva in $h(v)$ normalni vektor tangentne ravnine na sfero S v točki v . Potem lahko definiramo smerni odvod drugega reda. Najprej homogeno razširimo $g(v)^T \nabla F(v)$, vzamemo smerni odvod v smeri h in zoožimo na sfero S . Dobimo

$$D_h D_g f(v) := h(v)^T \nabla [G(v)^T \nabla F(v)] \quad \text{za vse } v \in S,$$

kjer je G neka homogena razširitev g .

3.2 Smerni odvodi sferičnih B polinomov

Smerne odvode sferičnih polinomov lahko izračunamo s pomočjo smernih odvodov njihovih homogenih razširitev. Da izračunamo odvode polinoma

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d,$$

si pomagamo s homogenim polinomom treh spremenljivk

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} H_{ijk}^d. \quad (3.1)$$

Lema 36. *Naj bodo h_1 , h_2 in h_3 enolične rešitve sistema (2.12) in g vektor iz $\mathbb{R}^3$. Potem velja*

$$D_g h_i = h_i(g), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dokaz. Poglejmo si dokaz za $i = 1$. Naj bodo v_1, v_2, v_3 oglišča sferičnega trikotnika T in $v \in \mathbb{R}^3$. Hitro lahko izračunamo

$$\begin{aligned} D_g h_1 &= g^T \nabla h_1 = \\ &= g^T \frac{\frac{\partial \det(v, v_2, v_3)}{\partial x} + \frac{\partial \det(v, v_2, v_3)}{\partial y} + \frac{\partial \det(v, v_2, v_3)}{\partial z}}{\det(v_1, v_2, v_3)} = \\ &= g^T \frac{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\det(v_1, v_2, v_3)} = \\ &= \frac{\det(g, v_2, v_3)}{\det(v_1, v_2, v_3)} = h_1(g) \end{aligned}$$

Enakost analogno dokažemo za $i = 2$ in $i = 3$. □

Z uporabo verižnega pravila in upoštevanjem leme 36 dobimo naslednjo formulo za smerni odvod poljubnega homogenega polinoma.

Lema 37. *Naj bo $p \in \mathcal{H}_d$ homogen polinom stopnje d . Potem velja*

$$D_g p(v) = (h_1(g), h_2(g), h_3(g)) \nabla_h p(v), \quad (3.2)$$

kjer je

$$\nabla_h := \left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \frac{\partial}{\partial h_3} \right)^T.$$

Z uporabo enakosti (3.2) lahko dobimo eksplicitno formulo za smerni odvod poljubnega homogenega polinoma oblike (3.1). Naj bodo $c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk}$ za $i + j + k = d$ in $g_1, g_2, \dots, g_m$ enotski vektorji. Za vsak $\ell = 1, \dots, m$ naj bo

$$c_{ijk}^{(\ell)} = h_1(g_\ell) c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + h_2(g_\ell) c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + h_3(g_\ell) c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}, \quad i + j + k = d - \ell. \quad (3.3)$$

Koeficienti $c_{ijk}^{(\ell)}$ so sicer odvisni od vektorjev $g_1, g_2, \dots, g_\ell$, niso pa odvisni od njihovega vrstnega reda. Slednja izjava sledi direktno iz rekurzivne zveze, pa tudi iz naslednjega izreka.

Izrek 38. *Za poljuben $0 \leq m \leq d$ velja*

$$D_{g_1, g_2, \dots, g_m} p(v) := D_{g_1} D_{g_2} \dots D_{g_m} p(v) = \frac{d!}{(d-m)!} \sum_{i+j+k=d-m} c_{ijk}^{(m)} H_{ijk}^{d-m}(v). \quad (3.4)$$

Dokaz. Izrek dokažemo z indukcijo na m . Naj bo $m = 1$. Z upoštevanjem leme 36 in preureditvijo indeksov dobimo

$$\begin{aligned} D_{g_1} H_{ijk}^d(v) &= D_{g_1} \left(\frac{d!}{i!j!k!} h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^k(v) \right) \\ &= d \left(H_{i-1,j,k}^{d-1}(v) h_1(g_1) + H_{i,j-1,k}^{d-1}(v) h_2(g_1) + H_{i,j,k-1}^{d-1}(v) h_3(g_1) \right), \end{aligned}$$

za $i + j + k = d$. Ko dobljeno vstavimo v enačbo

$$D_{g_1}p(v) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^{(0)} D_{g_1} H_{ijk}^d(v),$$

preuredimo indekse in upoštevamo rekurzivno zvezo (3.3), dobimo

$$\begin{aligned} D_{g_1}p(v) &= \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^{(0)} d \left(H_{i-1,j,k}^{d-1}(v) h_1(g_1) + H_{i,j-1,k}^{d-1}(v) h_2(g_1) + H_{i,j,k-1}^{d-1}(v) h_3(g_1) \right) \\ &= d \sum_{i+j+k=d-1} \left(c_{i+1,j,k}^{(0)} h_1(g_1) + c_{i,j+1,k}^{(0)} h_2(g_1) + c_{i,j,k+1}^{(0)} h_3(g_1) \right) H_{ijk}^{d-1}(v) \\ &= d \sum_{i+j+k=d-1} c_{ijk}^{(1)} H_{ijk}^{d-1}(v), \end{aligned}$$

kar dokazuje izrek za primer, ko je $m = 1$. Recimo, da izrek velja za $m - 1$, torej da velja enakost

$$D_{g_1} D_{g_2} \dots D_{g_{m-1}} p(v) = \frac{d!}{(d-m+1)!} \sum_{i+j+k=d-m+1} c_{ijk}^{(m-1)} H_{ijk}^{d-m+1}(v). \quad (3.5)$$

Izračunajmo smerni odvod

$$\begin{aligned} D_{g_m} H_{ijk}^{d-m+1}(v) &= D_{g_m} \left(\frac{(d-m+1)!}{i!j!k!} h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^k(v) \right) \\ &= \frac{(d-m+1)!}{i!j!k!} \left(i h_1^{i-1}(v) h_2^j(v) h_3^k(v) D_{g_m} h_1(v) + \right. \\ &\quad \left. + j h_1^i(v) h_2^{j-1}(v) h_3^k(v) D_{g_m} h_2(v) + k h_1^i(v) h_2^j(v) h_3^{k-1}(v) D_{g_m} h_3(v) \right) \\ &= (d-m+1) \left(H_{i-1,j,k}^{d-m}(v) h_1(g_m) + H_{i,j-1,k}^{d-m}(v) h_2(g_m) + H_{i,j,k-1}^{d-m}(v) h_3(g_m) \right). \end{aligned}$$

Vstavimo dobljeno v enačbo (3.5). Po preureditvi indeksov in upoštevanju rekurzivne zveze (3.3), dobimo

$$\begin{aligned} D_{g_1} \dots D_{g_m} p(v) &= \frac{d!}{(d-m+1)!} \sum_{i+j+k=d-m+1} c_{ijk}^{(m-1)} D_{g_m} H_{ijk}^{d-m+1}(v) \\ &= \frac{d!}{(d-m)!} \sum_{i+j+k=d-m} \left(c_{i+1,j,k}^{(m-1)} h_1(g_m) + c_{i,j+1,k}^{(m-1)} h_2(g_m) + \right. \\ &\quad \left. + c_{i,j,k+1}^{(m-1)} h_3(g_m) \right) H_{ijk}^{d-m}(v) \\ &= \frac{d!}{(d-m)!} \sum_{i+j+k=d-m} c_{ijk}^{(m)} H_{ijk}^{d-m}(v), \end{aligned}$$

s čimer smo dokazali izrek. □

Naj bo p homogen polinom oblike (3.1). Potem iz lastnosti koordinat h_1, h_2, h_3 sledijo enakosti $p(v_1) = c_{d00}$, $p(v_2) = c_{0d0}$ in $p(v_3) = c_{00d}$. Formule za odvod polinoma p se v

ogliščih sferičnega trikotnika T poenostavimo v

$$\begin{aligned} D_{g_1, \dots, g_m} p(v_1) &= \frac{d!}{(d-m)!} c_{d-m,0,0}^{(m)}, \\ D_{g_1, \dots, g_m} p(v_2) &= \frac{d!}{(d-m)!} c_{0,d-m,0}^{(m)}, \\ D_{g_1, \dots, g_m} p(v_3) &= \frac{d!}{(d-m)!} c_{0,0,d-m}^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Poglejmo si te formule v nerekurzivni obliki. Naj bo g enotski vektor, ki leži v ravnini, ki gre skozi izhodišče in oglišči v_1 in v_2 . Ker je g linearna kombinacija vektorjev v_1 in v_2 , velja $h(v_3) = 0$, enakost (3.6) vsebuje le koeficiente $c_{d,0,0}, \dots, c_{d-m,m,0}$. Izračunajmo prvi odvod v oglišču v_1

$$D_g p(v_1) = \frac{d!}{(d-1)!} c_{d-1,0,0}^{(1)} = d(h_1(g)c_{d,0,0} + h_2(g)c_{d-1,1,0}).$$

Poglejmo si še, kakšno formulo dobimo za drugi odvod v oglišču v_1 :

$$\begin{aligned} D_g^2 p(v_1) &= \frac{d!}{(d-2)!} c_{d-2,0,0}^{(2)} \\ &= d(d-1) \left(h_1(g)c_{d-1,0,0}^{(1)} + h_2(g)c_{d-2,1,0}^{(1)} \right) \\ &= d(d-1) \left(h_1^2(g)c_{d,0,0} + 2h_1(g)h_2(g)c_{d-1,1,0} + h_2^2(g)c_{d-2,2,0} \right). \end{aligned}$$

Poglejmo si še mešan drugi odvod. Naj bo g_1 kot g zgoraj in g_2 enotski vektor v ravnini, ki gre skozi izhodišče in oglišči v_1 in v_3 . V tem primeru je $h_2(g_2) = 0$,

$$\begin{aligned} D_{g_1, g_2} p(v_1) &= \frac{d!}{(d-2)!} c_{d-2,0,0}^{(2)} \\ &= d(d-1) \left(h_1(g_2)c_{d-1,0,0}^{(1)} + h_3(g_2)c_{d-2,0,1}^{(1)} \right) \end{aligned}$$

in formula (3.6) se poenostavi v

$$\begin{aligned} D_{g_1, g_2} p(v_1) &= d(d-1) \left(h_1(g_1)h_1(g_2)c_{d,0,0} + h_1(g_2)h_2(g_1)c_{d-1,1,0} + \right. \\ &\quad \left. h_1(g_1)h_3(g_2)c_{d-1,0,1} + h_2(g_1)h_3(g_2)c_{d-2,1,1} \right). \end{aligned}$$

Poglejmo si odvod homogenega polinoma D_g na robu $e = \langle v_1, v_2 \rangle$ sferičnega trikotnika T , v smeri vektorja g , ki ne leži v ravnini, ki gre skozi izhodišče in točki v_1 in v_2 . Na robu e je $h_3(v) \equiv 0$. Po izreku 38 je za vsak $0 \leq m \leq d$ odvod $D_g^m p$ homogen polinom stopnje $d-m$ na robu e . Na primer, če je p kubični polinom ($d=3$) in $m=1$, potem je $D_g p(v)$ kvadratni polinom

$$D_g p(v) = 3 \left(c_{200}^{(1)} h_1^2(v) + 2c_{110}^{(1)} h_1(v)h_2(v) + c_{020}^{(1)} h_2^2(v) \right), \quad v \in e.$$

3.3 Gladek prehod dveh sferičnih polinomov preko robov sferičnih trikotnikov

V tem poglavju bomo raziskali potrebne in zadostne pogoje za gladek prehod dveh sferičnih polinomov na sosednjih sferičnih trikotnikih preko skupnega roba. Najprej si pogledimo izrek o homogenih polinomih na sosednjih sferičnih trikotnikih.

Izrek 39. *Naj bosta T in $\tilde{T}$ sferična trikotnika z oglišči $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\{v_4, v_3, v_2\}$. Naj bodo a_1, a_2, a_3 sferične baricentrične koordinate oglišča v_4 glede na sferični trikotnik T , torej $v_4 = \sum_{i=1}^3 a_i v_i$. Naj bosta*

$$p(v) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} H_{ijk}^d(v),$$

$$\tilde{p}(v) = \sum_{i+j+k=d} \tilde{c}_{ijk} \tilde{H}_{ijk}^d(v),$$

kjer so $\{H_{ijk}^d\}$ in $\{\tilde{H}_{ijk}^d\}$ homogene Bernsteinove bazne funkcije na trikotnikih T in $\tilde{T}$. Potem se poljuben odvod p reda največ m ujema z ustreznim odvodom $\tilde{p}$ v vsaki točki ravnine, ki poteka skozi izhodišče ter točki v_2 in v_3 natanko tedaj, ko velja

$$\tilde{c}_{njk} = \sum_{\nu+\mu+\kappa=n} c_{\nu,k+\mu,j+\kappa} H_{\nu\mu\kappa}^n(v_4), \quad (3.7)$$

za vse $j+k = d-n$ in $n = 0, \dots, m$.

Dokaz. Definirajmo polinoma treh spremenljivk

$$P(v) := \sum_{i+j+k+l=d} C_{ijkl} B_{ijkl}^d(v),$$

$$\tilde{P}(v) := \sum_{i+j+k+l=d} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{B}_{ijkl}^d(v),$$

kjer sta

$$C_{ijkl} := \begin{cases} c_{ijk}, & l = 0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},$$

$$\tilde{C}_{ijkl} := \begin{cases} \tilde{c}_{ijk}, & l = 0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

in $B_{ijkl}^d(v)$ B-polinomi treh spremenljivk stopnje d v baricentričnih koordinatah na tetraedru $\{v_1, v_2, v_3, 0\}$, $\tilde{B}_{ijkl}^d(v)$ pa B-polinomi treh spremenljivk stopnje d na tetraedru $\{v_4, v_3, v_2, 0\}$. Po izreku v knjigi [7] je prehod teh polinomov $\mathcal{C}^m$ zvezen natanko tedaj, ko velja

$$\tilde{C}_{ijkl} = \sum_{\nu+\mu+\kappa+\lambda=i} C_{\nu,\kappa+\mu,j+\kappa,l+\lambda} B_{\nu\mu\kappa\lambda}^i(v_4), \quad (3.8)$$

za $i + j + k + l = d$ in $i = 0, \dots, m$. Če izberemo $l = \lambda = 0$, enakost (3.8) velja natanko tedaj ko velja enakost (3.7). Ker velja $P = p$ in $\tilde{P} = \tilde{p}$, je izrek dokazan. $\square$

Zapišimo ta rezultat za sferične polinome.

Izrek 40. Naj bosta $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in $\tilde{T} = \langle v_4, v_3, v_2 \rangle$ sferična polinoma s skupnim robom $e = \langle v_2, v_3 \rangle$. Naj bosta

$$p(v) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d(v),$$

$$\tilde{p}(v) = \sum_{i+j+k=d} \tilde{c}_{ijk} \tilde{B}_{ijk}^d(v),$$

kjer so $\{B_{ijk}^d\}$ in $\{\tilde{B}_{ijk}^d\}$ sferični Bernsteinovi bazni polinomi na trikotnikih T in $\tilde{T}$. Potem se poljuben odvod p reda največ m ujema z ustreznim odvodom $\tilde{p}$ v vsaki točki skupnega roba e natanko tedaj, ko velja

$$\tilde{c}_{njk} = \sum_{\nu+\mu+\kappa=n} c_{\nu,k+\mu,j+\kappa} B_{\nu\mu\kappa}^n(v_4),$$

za vse $j + k = d - n$ in $n = 0, \dots, m$.

Dokaz. Vsak sferični Bernsteinov bazni polinom B_{ijk}^d se da razširiti do homogenega Bernsteinovega baznega polinoma H_{ijk}^d . Rezultat nato sledi direktno iz izreka 39. $\square$

Primer 41. Razpišimo formule iz izreka 40 za $d = 3, 4$ in $n = 1, 2$.

1. Naj bo $d = 3$.

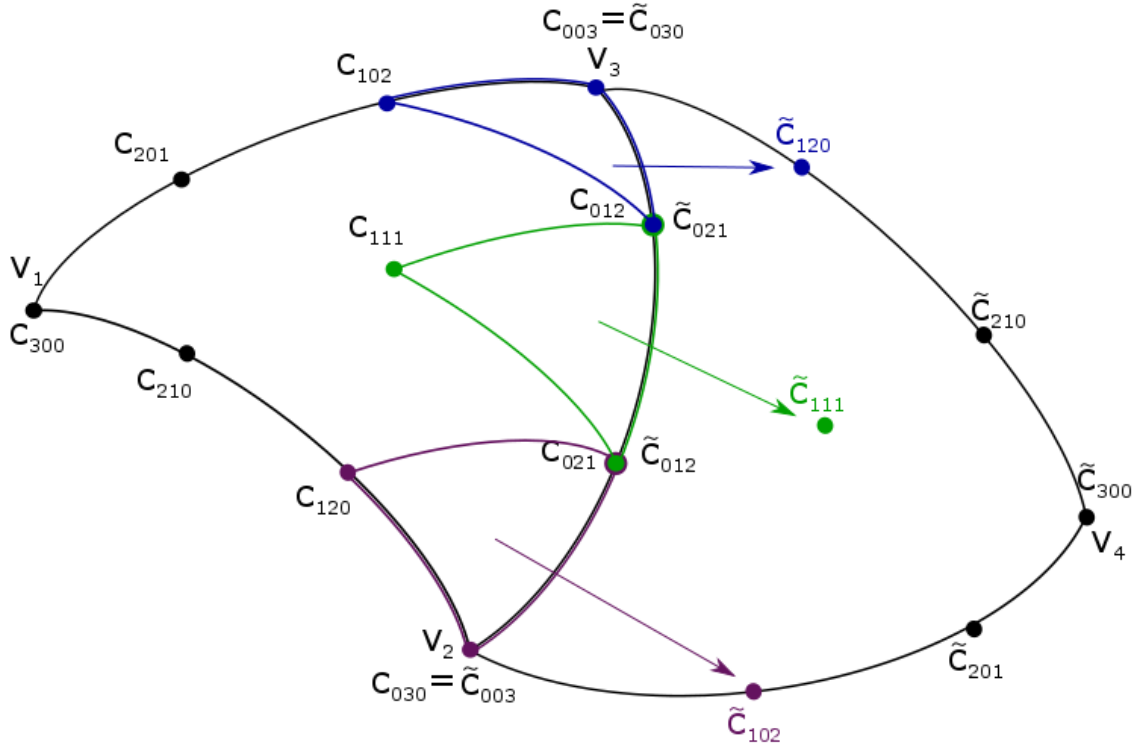
Za $n = 1$ dobimo sledeče formule:

- $\tilde{c}_{120} = c_{102} B_{100}^1(v_4) + c_{012} B_{010}^1(v_4) + c_{003} B_{001}^1(v_4),$
- $\tilde{c}_{111} = c_{111} B_{100}^1(v_4) + c_{021} B_{010}^1(v_4) + c_{012} B_{001}^1(v_4),$
- $\tilde{c}_{102} = c_{120} B_{100}^1(v_4) + c_{012} B_{030}^1(v_4) + c_{021} B_{001}^1(v_4).$

Grafično (glej sliko 3.1) to pomeni, da točke $\tilde{c}_{njk}$ iz sferičnega trikotnika $\tilde{T}$, kjer je $n = 1$, dobimo kot kombinacijo treh točk iz sferičnega trikotnika T .

Za $n = 2$ dobimo sledeči formuli:

- $\tilde{c}_{210} = c_{201} B_{200}^2(v_4) + c_{021} B_{020}^2(v_4) + c_{003} B_{002}^2(v_4) + c_{111} B_{110}^2(v_4) + c_{102} B_{101}^2(v_4) + c_{012} B_{011}^2(v_4),$
- $\tilde{c}_{201} = c_{210} B_{200}^2(v_4) + c_{030} B_{020}^2(v_4) + c_{012} B_{002}^2(v_4) + c_{120} B_{110}^2(v_4) + c_{111} B_{101}^2(v_4) + c_{021} B_{011}^2(v_4).$



Slika 3.1: Povezava med točkami sferičnih trikotnikov $\tilde{T}$ in T za $d = 3$ in $n = 1$, ki določa $\mathcal{C}^1$ zveznost.

Grafično (glej sliko 3.2) to pomeni, da točki $\tilde{c}_{njk}$ iz sferičnega trikotnika $\tilde{T}$, kjer je $n = 2$, dobimo kot kombinacijo šestih točk iz sferičnega trikotnika T .

2. Naj bo $d = 4$.

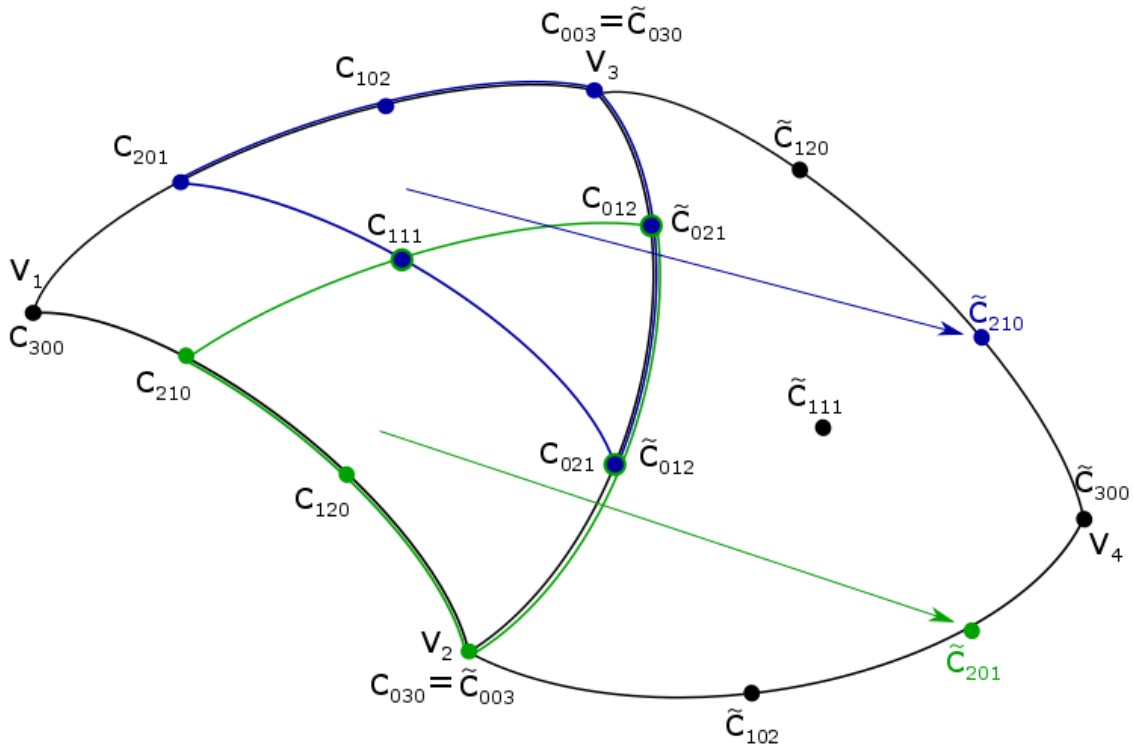
Za $n = 1$ dobimo sledeče formule:

- $\tilde{c}_{130} = c_{103}B_{100}^1(v_4) + c_{013}B_{010}^1(v_4) + c_{004}B_{001}^1(v_4),$
- $\tilde{c}_{121} = c_{112}B_{100}^1(v_4) + c_{022}B_{010}^1(v_4) + c_{013}B_{001}^1(v_4),$
- $\tilde{c}_{112} = c_{121}B_{100}^1(v_4) + c_{031}B_{030}^1(v_4) + c_{022}B_{001}^1(v_4),$
- $\tilde{c}_{103} = c_{130}B_{100}^1(v_4) + c_{040}B_{030}^1(v_4) + c_{031}B_{001}^1(v_4).$

Grafično (glej sliko 3.3) to pomeni, da točke $\tilde{c}_{njk}$ iz sferičnega trikotnika $\tilde{T}$, kjer je $n = 1$, dobimo kot kombinacijo treh točk iz sferičnega trikotnika T .

Za $n = 2$ dobimo sledeče formule:

- $\tilde{c}_{220} = c_{202}B_{200}^2(v_4) + c_{022}B_{020}^2(v_4) + c_{004}B_{002}^2(v_4) + c_{112}B_{110}^2(v_4) + c_{103}B_{101}^2(v_4) + c_{013}B_{011}^2(v_4),$



Slika 3.2: Povezava med točkami sferičnih trikotnikov $\tilde{T}$ in T za $d = 3$ in $n = 2$, ki določa $\mathcal{C}^2$ zveznost.

- $\tilde{c}_{211} = c_{211}B_{200}^2(v_4) + c_{031}B_{020}^2(v_4) + c_{013}B_{002}^2(v_4) + c_{121}B_{110}^2(v_4) + c_{112}B_{101}^2(v_4) + c_{022}B_{011}^2(v_4),$
- $\tilde{c}_{202} = c_{220}B_{200}^2(v_4) + c_{040}B_{020}^2(v_4) + c_{022}B_{002}^2(v_4) + c_{130}B_{110}^2(v_4) + c_{121}B_{101}^2(v_4) + c_{031}B_{011}^2(v_4).$

Grafično (glej sliko 3.4) to pomeni, da točke $\tilde{c}_{njk}$ iz sferičnega trikotnika $\tilde{T}$, kjer je $n = 2$, dobimo kot kombinacijo šestih točk iz sferičnega trikotnika T .

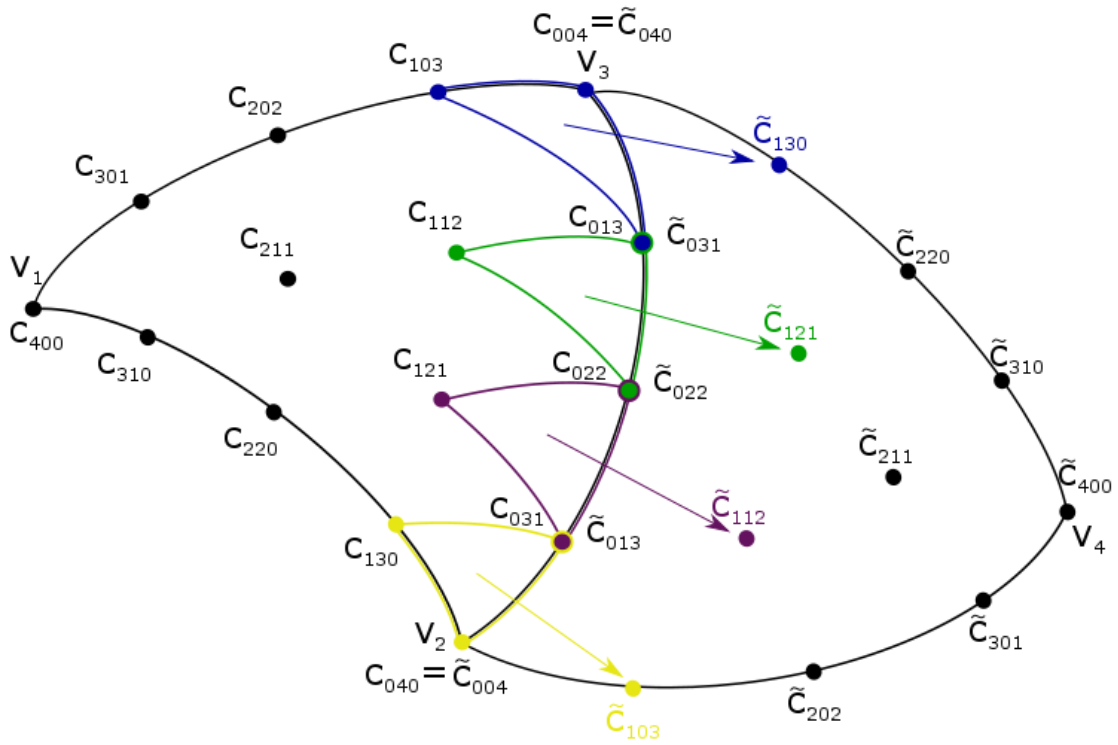
3.4 Interpolacija

V tem poglavju si bomo pogledali, kako interpoliramo dane točke v $\mathbb{R}^3$.

Naj bodo f_{ijk} , $i + j + k = d$, dane vrednosti iz $\mathbb{R}$, v_{ijk} , $i + j + k = d$, pa točke na sferi. Iščemo tak sferični polinom

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d,$$

da bo veljalo $p(v_{ijk}) = f_{ijk}$. Izračunati moramo torej koeficiente c_{ijk} . Te dobimo z rešitvijo



Slika 3.3: Povezava med točkami sferičnih trikotnikov $\tilde{T}$ in T za $d = 4$ in $n = 1$, ki določa $\mathcal{C}^1$ zveznost.

linearne sistema enačb

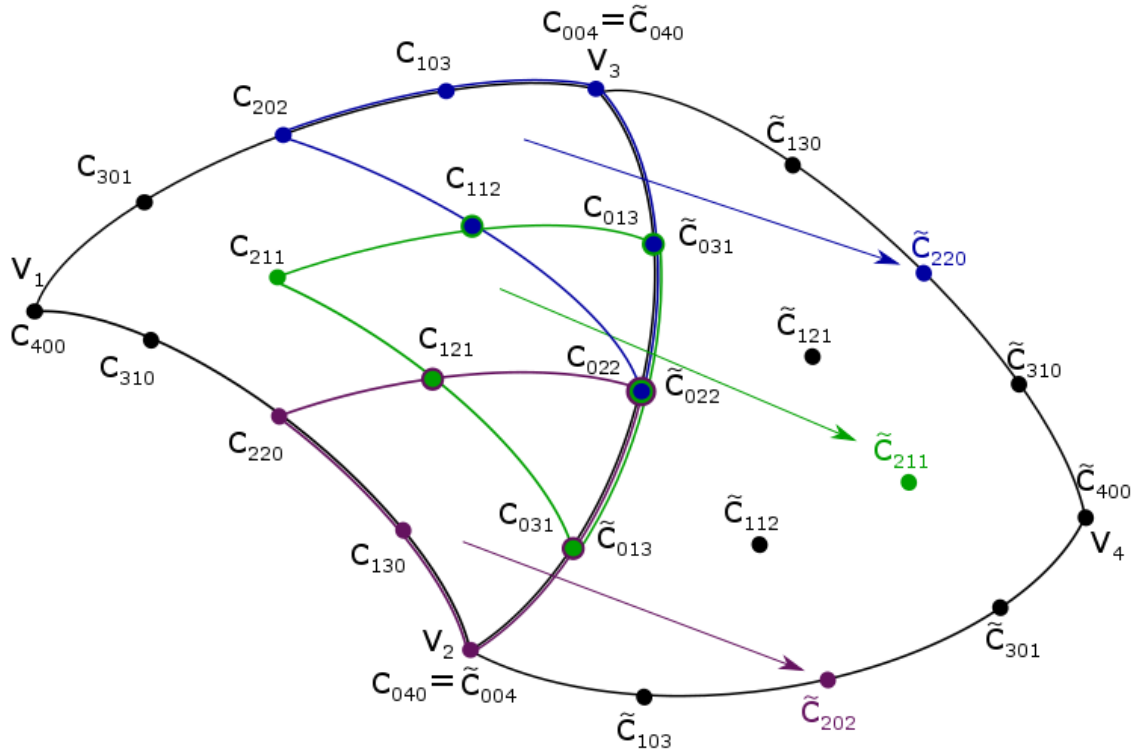
$$p(v_{\nu\mu\kappa}) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d(v_{\nu\mu\kappa}), \quad \nu + \mu + \kappa = d.$$

Dobimo koeficiente c_{ijk} , $i + j + k = d$, ki jih uporabimo za izračun vrednosti polinoma v ostalih točkah sferičnega trikotnika.

Razpišimo sistem enačb za primer, ko je $d = 2$.

Označimo z B matriko

$$B = \begin{bmatrix} B_{002}^2(v_{002}) & B_{101}^2(v_{002}) & B_{200}^2(v_{002}) & B_{011}^2(v_{002}) & B_{110}^2(v_{002}) & B_{020}^2(v_{002}) \\ B_{002}^2(v_{101}) & B_{101}^2(v_{101}) & B_{200}^2(v_{101}) & B_{011}^2(v_{101}) & B_{110}^2(v_{101}) & B_{020}^2(v_{101}) \\ B_{002}^2(v_{200}) & B_{101}^2(v_{200}) & B_{200}^2(v_{200}) & B_{011}^2(v_{200}) & B_{110}^2(v_{200}) & B_{020}^2(v_{200}) \\ B_{002}^2(v_{011}) & B_{101}^2(v_{011}) & B_{200}^2(v_{011}) & B_{011}^2(v_{011}) & B_{110}^2(v_{011}) & B_{020}^2(v_{011}) \\ B_{002}^2(v_{110}) & B_{101}^2(v_{110}) & B_{200}^2(v_{110}) & B_{011}^2(v_{110}) & B_{110}^2(v_{110}) & B_{020}^2(v_{110}) \\ B_{002}^2(v_{020}) & B_{101}^2(v_{020}) & B_{200}^2(v_{020}) & B_{011}^2(v_{020}) & B_{110}^2(v_{020}) & B_{020}^2(v_{020}) \end{bmatrix}.$$



Slika 3.4: Povezava med točkami sferičnih trikotnikov $\tilde{T}$ in T za $d = 4$ in $n = 2$, ki določa $\mathcal{C}^2$ zveznost.

Potem je sistem enačb, iz katerega dobimo koeficiente c_{ijk} , enak

$$\begin{bmatrix} p(v_{002}) \\ p(v_{101}) \\ p(v_{200}) \\ p(v_{011}) \\ p(v_{110}) \\ p(v_{020}) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} c_{002} \\ c_{101} \\ c_{200} \\ c_{011} \\ c_{110} \\ c_{020} \end{bmatrix}.$$

Primer 42. Poglejmo si konkreten primer izračuna koeficientov za $d = 2$. Vzemimo oglišča trikotnika v_1, v_2, v_3 kot v primeru 32. Za $d = 2$ dobimo 6 domenskih točk v sferičnem trikotniku

$$\begin{aligned} v_{002} &= (0.534522, 0.801784, 0.267261), \\ v_{101} &= (0.368721, 0.581545, 0.725156), \\ v_{200} &= (0.09759, 0.19518, 0.9759), \\ v_{011} &= (0.845535, 0.450556, 0.286477), \\ v_{110} &= (0.654333, 0.119611, 0.746687), \\ v_{020} &= (0.970143, 0, 0.242536). \end{aligned}$$

Izberimo vrednosti

$$\begin{aligned}
 f(v_{002}) &= 2, \\
 f(v_{101}) &= 2.5, \\
 f(v_{200}) &= 2.5, \\
 f(v_{011}) &= 1.7, \\
 f(v_{110}) &= 2.5, \\
 f(v_{020}) &= 2.
 \end{aligned}$$

Matrika B je v našem primeru enaka

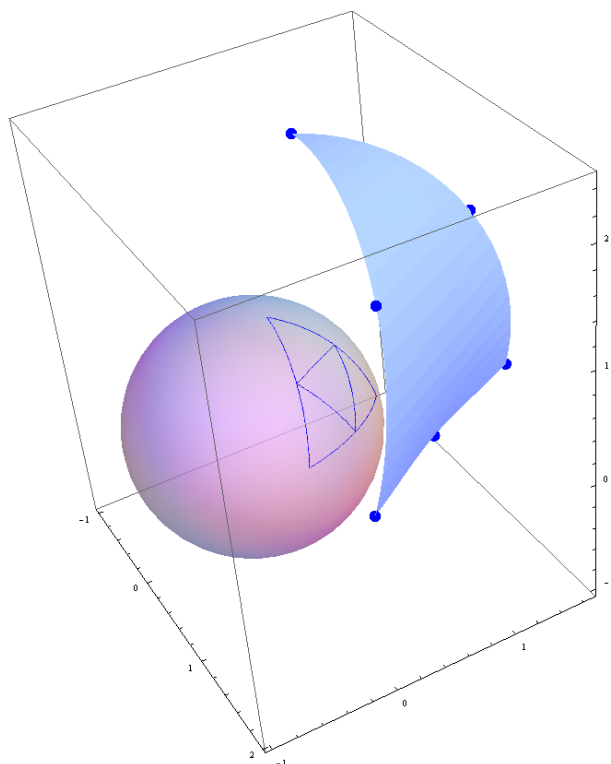
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.340257 & 0.680514 & 0.340257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.315779 & 0 & 0 & 0.631559 & 0 & 0.315779 \\ 0 & 0 & 0.375554 & 0 & 0.751108 & 0.375554 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

izračunani koeficienti pa so enaki

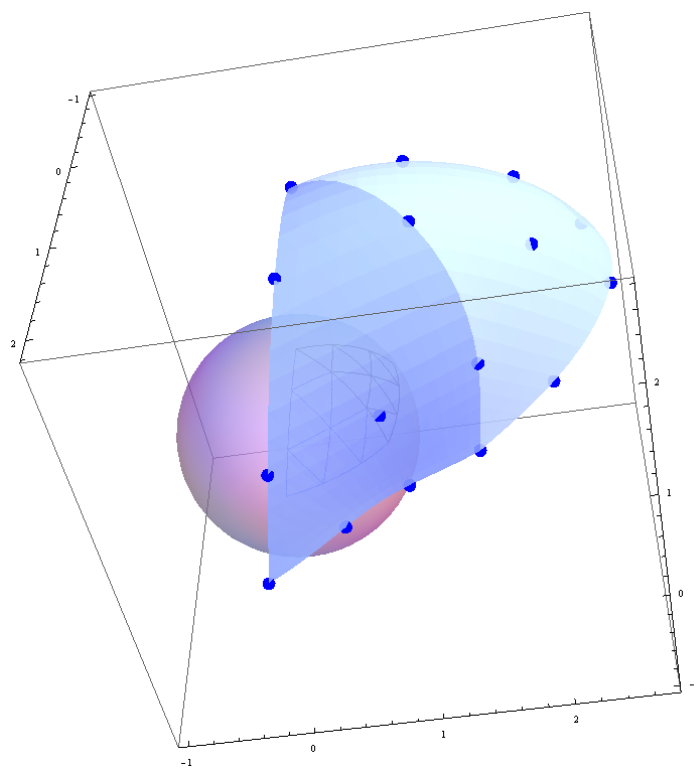
$$\begin{aligned}
 c_{002} &= 2, & c_{101} &= 1.42369, \\
 c_{200} &= 0.691752, & c_{011} &= 2.5, \\
 sc_{110} &= 1.07842, & c_{020} &= 2.
 \end{aligned}$$

Interpolacija s sferičnim polinomom na tem trikotniku je izrisana na sliki 3.5.

Na sliki 3.6 je prikazan zvezni sferični zlepek stopnje 3 na dveh trikotnikih skupaj z interpolacijskimi točkami. Če bi želeli bolj gladek sferični zlepek pa bi uporabili še povezave med koeficienti c_{ijk} in $\bar{c}_{ijk}$, ki smo jih navedli v poglavju 3.3.



Slika 3.5: Interpolacija s sferičnim polinomom stopnje 2 na enem trikotniku.



Slika 3.6: C^0 interpolacija s sferičnim zlepkom stopnje 3 na dveh sferičnih trikotnikih.

Poglavje 4

Sferične triangulacije

V tem poglavju bomo povedali nekaj osnovnih lastnosti sferičnih triangulacij.

Definicija 43. *Množico sferičnih trikotnikov $\Delta := \{T_i\}_{i=1}^N$ imenujemo sferična triangulacija, če je presek dveh poljubnih trikotnikov prazen, oglišče ali rob.*

$Z \Omega := \bigcup_{i=1}^N T_i$ označimo unijo vseh sferičnih trikotnikov v sferični triangulaciji.

Najbolj nas zanima primer, ko je $\Omega = S$. V tem primeru pravimo, da sferična triangulacija Δ pokriva S .

Če želimo govoriti o povezavi med številom oglišč V , številom robov E in številom sferičnih trikotnikov N v sferični triangulaciji, moramo ločiti med primerom, ko sferična triangulacija Δ pokriva sfero S in primerom, ko je ne. Najprej si pogledjmo primer, ko sferična triangulacija ne pokriva sfere.

Definicija 44. *Naj bo Δ sferična triangulacija domene $\Omega \subseteq S$. Pravimo, da je sferična triangulacija Δ oluščljiva, če vsebuje le en sferični trikotnik ali, če jo lahko dobimo iz oluščljive sferične triangulacije $\tilde{\Delta}$ tako, da dodamo en sferični trikotnik T , ki se dotika $\tilde{\Delta}$ natanko vzdolž enega ali dveh robov.*

Pravimo, da je sferična triangulacija Δ regularna, če je oluščljiva, ali če jo lahko dobimo iz oluščljive triangulacije $\tilde{\Delta}$ tako, da odstranimo eno ali več oluščljivih podtriangulacij, kjer so vsa oglišča notranja oglišča $\tilde{\Delta}$.

Očitno je, da za regularno sferično triangulacijo, ki ne pokriva sfere S , veljajo enake Eulerjeve lastnosti kot za ravninski primer (glej [7]).

Trditev 45. *Naj bo Δ oluščljiva triangulacija, ki ne pokrije sfere. Potem velja*

$$1) \ E_B = V_B,$$

$$2) E_I = 3V_I + V_B - 3,$$

$$3) N = 2V_I + V_B - 2,$$

kjer je E_B število zunanjih robov, V_B število zunanjih oglišč, E_I število notranjih robov, V_I število notranjih oglišč, N pa število trikotnikov v sferični triangulaciji.

V naslednjem izreku bomo videli, kako se povezava med oglišči, robovi in številom sferičnih trikotnikov spremeni v primeru, ko sferična triangulacija pokrije sfero S .

Izrek 46. *Naj bo $\triangle$ sferična triangulacija, ki pokrije sfero S . Potem velja*

$$1) E = \frac{3N}{2},$$

$$2) N = 2V - 4,$$

$$3) E = 3V - 6,$$

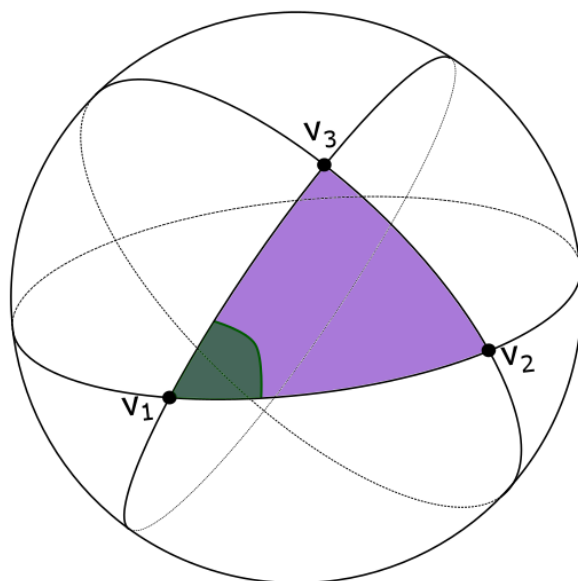
kjer z V , E in N označimo število oglišč, robov in trikotnikov v sferični triangulaciji.

Dokaz. Dokazujemo vsako točko posebej.

- 1) Ker ima vsak sferični trikotnik tri robove, je vseh robov $3N$. Vendar je vsak rob štet dvakrat, zato je robov v sferični triangulaciji $\frac{3N}{2}$.
- 2) Če vsak sferični trikotnik zamenjamo z ravninskim trikotnikom, ki poteka skozi ista oglišča in gledamo tetraedre, katerih oglišča so oglišča sferičnih trikotnikov in izhodišče sfere, dobimo tetraedično razdelitev. Po izreku v [7] velja $F_B = 2V_B - 4$, kjer je F_B število zunanjih lic, V_B pa število zunanjih oglišč tetraedrične razdelitve. Ker je število trikotnikov N v sferični triangulaciji enako številu ravninskih trikotnikov F_B v tetraedrični razdelitvi, število oglišč V v sferični triangulaciji pa enako številu zunanjih oglišč V_B v tetraedrični triangulaciji, je dokaz končan.
- 3) Tretjo enakost dobimo tako, da vstavimo drugo enakost v prvo.

□

Kot v ravninskem primeru imamo tudi za sferične triangulacije mnogo algoritmov, s katerimi lahko konstruiramo sferične triangulacije. Algoritem za konstruiranje Delaunayjevih sferičnih triangulacij je opisan v knjigi [8].

Slika 4.1: Kot v oglišču v_1 sferičnega trikotnika T .

Naj bo $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sferični trikotnik. Potem je za vsak $i = 1, 2, 3$ kot sferičnega trikotnika T v oglišču v_i definiran kot kot med tangentami na loka, ki potekata skozi vektorja v_i in v_{i+1} , ter v_i in v_{i+2} . Kot v oglišču v_1 prikazuje slika 4.1.

Vsota kotov sferičnega trikotnika bo vedno večja od π . Za sferično triangulacijo Δ s θ_Δ označimo najmanjšega od kotov v triangulaciji.

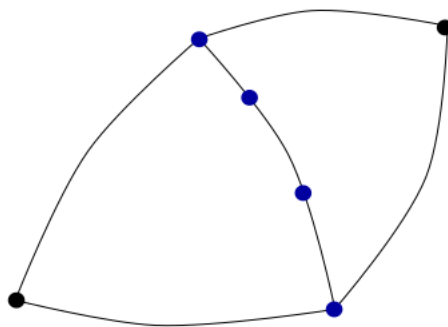
Poglavje 5

Prostori sferičnih zlepkov

V tem poglavju si bomo pogledali prostore zveznih in gladkih sferičnih zlepkov. Najprej pa si pogledjmo problem dimenzije prostora sferičnih zlepkov.

5.1 Problem dimenzije prostora sferičnih zlepkov

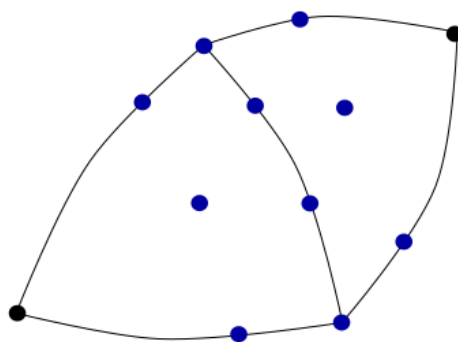
Kot v ravninskem primeru tudi v sferičnem za zveznost sferičnih zlepkov preko robov sferičnih trikotnikov potrebujemo le, da se sferične kontrolne točke ujemajo na skupnem robu (glej sliko 5.1).



Slika 5.1: Točke, ki se morajo ujemati za zveznost kubičnega sferičnega zlepka.

$\mathcal{C}^1$ zveznost sferičnega zlepka bo odvisna še od točk, ki so sosednje točkam na skupnem robu sferičnih trikotnikov (glej sliko 5.2). $\mathcal{C}^2$ zveznost sferičnega zlepka bo odvisna od še več točk na sferičnih trikotnikih, itn.

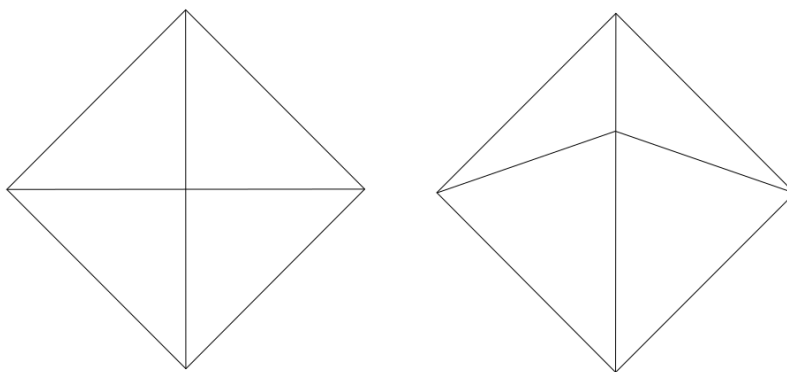
Ker pri aproksimaciji potrebujemo bazo prostora sferičnih zlepkov, moramo najprej določiti njegovo dimenzijo za poljubno triangulacijo. Kot bomo videli za prostor zveznih



Slika 5.2: Točke, ki so med sabo povezane pri zvezni odvedljivosti kubičnega sferičnega zlepka.

sferičnih zlepkov to ni težko. V splošnem pa je dimenzija odvisna od geometrije triangulacije, zato je njena določitev težek problem. Problemi so pri najbolj zanimivih primerih, kjer gladkost ni dosti manjša kot stopnja, npr. pri $\mathcal{C}^1$ kvadratičnih ali kubičnih zlepkih. To je odprt problem že v ravninskem in seveda tudi v sferičnem primeru, zato obravnavamo le posebne primere triangulacij, za katere lahko prostoru določimo dimenzijo.

Znan primer v ravnini je, da ima triangulacija različno dimenzijo glede na to ali je oglišče singularno ali nesesingularno (slika 5.3).



Slika 5.3: Singularno in nesesingularno oglišče.

Kot možno rešitev problema dimenzije lahko uporabimo makroelemente in s pomočjo algoritmov (npr. Delaunay-jev algoritem) delimo triangulacijo toliko časa, da ji lahko določimo dimenzijo.

5.2 Zvezni sferični zleпки

Za nenegativno število d , naj bo $\mathcal{B}_d$ prostor sferičnih polinomov stopnje d , definiran v definiciji 10.

Definicija 47. Za poljubno sferično triangulacijo $\Delta = \{T_i\}_{i=1}^N$ domene $\Omega \subseteq S$ definiramo prostor zveznih sferičnih zlepkov kot

$$\mathcal{S}_d^0(\Delta) := \{s \in \mathcal{C}^0(\Omega) : s|_{T_i} \in \mathcal{B}_d, i = 1, \dots, N\}. \quad (5.1)$$

Radi bi določili dimenzijo tega prostora. Po posledici 23 vemo, da za poljuben $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ za vsak sferični trikotnik $T \in \Delta$ obstajajo koeficienti $\{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,T}}$, tako da velja

$$s|_T = \sum_{\xi \in \mathcal{D}_{d,T}} c_\xi B_\xi^{d,T},$$

kjer so $B_\xi^{d,T}$ sferični Bernsteinovi bazni polinomi stopnje d na sferičnem trikotniku T , $\mathcal{D}_{d,T}$ pa sferične domenske točke v sferičnem trikotniku T . Zaradi poenostavitve oznak smo s ξ označili v_{ijk} . Če je ξ vsebovan v dveh različnih trikotnikih T in $\tilde{T}$, so koeficienti c_ξ zaradi zveznosti s enaki na $s|_T$ in $s|_{\tilde{T}}$.

Definicija 48. Z $\mathcal{D}_{d,\Delta} = \bigcup_{T \in \Delta} \mathcal{D}_{d,T}$ označimo množico domenskih točk prostora zveznih sferičnih zlepkov.

Domenske točke robov sferične triangulacije Δ pripadajo eni ali več množic $\mathcal{D}_{d,T}$, v $\mathcal{D}_{d,\Delta}$ pa so vključene le enkrat. Torej za vsak $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ obstaja enolična množica koeficientov $\{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$.

Definicija 49. Množico koeficientov $\{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$ imenujemo sferični B-koeficienti zveznega zleпка s .

Velja tudi obrat, za poljubno množico koeficientov $\{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$ obstaja enoličen zlepek $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$, definiran kot v (5.1).

Pokazali smo, da je dimenzija linearnega prostora $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$ enaka moči množice $\mathcal{D}_{d,\Delta}$.

Izrek 50. Vsak sferični zlepek $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ je enolično določen z njegovo množico B-koeficientov $\{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$. Še več,

$$\dim \mathcal{S}_d^0(\Delta) = \#\mathcal{D}_{d,\Delta} = V + (d-1)E + \binom{d-1}{2}N,$$

kjer so V , E in N števila oglišč, robov in sferičnih trikotnikov v sferični triangulaciji Δ .

Dokaz. Število domenskih točk v sferični triangulaciji je enako vsoti števila oglišč, števila notranjih domenskih točk na robovih (brez oglišč) in števila domenskih točk v sferičnih trikotnikih triangulacije. Število domenskih točk na enem robu triangulacije je enako $d + 1$, torej če odštejemo oglišča, $d - 1$. Število vseh domenskih točk v enem sferičnem trikotniku je enako $\binom{d+2}{2}$. Torej število domenskih točk v trikotniku dobimo tako, da od števila vseh domenskih točk odštejemo število oglišč sferičnega trikotnika in število notranjih domenskih točk na robovih sferičnega trikotnika:

$$\binom{d+2}{2} - 3 - 3(d-1) = \binom{d-1}{2}.$$

Torej je število vseh domenskih točk v sferični triangulaciji enako

$$\#\mathcal{D}_{d,\Delta} = V + (d-1)E + \binom{d-1}{2}N.$$

□

Konstruirajmo lokalne bazne funkcije za $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$. Za vsak $\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}$, naj bo ψ_ξ zlepek v $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$, ki zadošča enakosti

$$\gamma_\eta \psi_\xi = \delta_{\xi,\eta} \quad \text{za vse } \eta \in \mathcal{D}_{d,\Delta},$$

kjer je γ_η linearen funkcional, ki vrne koeficient, ki ustreza domenski točki η . Po konstrukciji ima ψ_ξ vse koeficiente enake nič, razen $c_\xi = 1$.

Ker so sferični Bernsteinovi bazni polinomi nenegativni na vsakem sferičnem trikotniku T , takoj sledi, da

$$\psi_\xi(v) \geq 0 \quad \text{za vse } v \in \Omega.$$

Ker je ψ_ξ identično enak nič na vseh trikotnikih, ki ne vsebujejo ξ , sledi, da je nosilec ψ_ξ enak

- 1) sferičnemu trikotniku T , če je ξ v notranjosti T ,
- 2) uniji sferičnih trikotnikov T in $\tilde{T}$, če je ξ v notranjosti skupnega roba trikotnikov T in $\tilde{T}$,
- 3) uniji vseh sferičnih trikotnikov, ki si delijo skupno oglišče v , če je $\xi = v$.

Izrek 51. Množica zlepkov $\mathcal{B} := \{\psi_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$ tvori bazo za $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$.

Dokaz. Ker je $\dim \mathcal{S}_d^0(\Delta) = |\mathcal{D}_{d,\Delta}|$, zadošča pokazati, da so ψ_ξ linearno neodvisni. Recimo, da velja

$$s = \sum_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}} c_\xi \psi_\xi \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Potem je za vsak sferični trikotnik T zožitev $s|_T$ sferični polinom stopnje d , ki je identično enak nič, zato morajo biti vsi koeficienti v B-formi enaki nič. Po posledici 23 velja, da je $c_\eta = 0$ za vse $\eta \in \mathcal{D}_{d,T}$. Ker to velja za vsak sferični trikotnik $T \in \Delta$, morajo biti vsi koeficienti enaki nič. $\square$

5.3 Prostori gladkih sferičnih zlepkov

Kot v ravninskem primeru nas tudi v sferičnem primeru zanimajo gladki prostori sferičnih zlepkov. Včasih si želimo, da bi imeli sferični zlepki zvezne odvode do reda r povsod na Ω , ali pa želimo supergladke sferične zlepke v določenih ogliščih ali na določenih robovih.

Definicija 52. Naj bosta $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in $\tilde{T} = \langle v_4, v_3, v_2 \rangle$ sferična trikotnika neke sferične triangulacije Δ s skupnim robom $e = \langle v_2, v_3 \rangle$. Fiksirajmo n in j , $0 \leq n \leq j \leq d$. Za vsak sferični zlepek $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ definirajmo

$$\tau_{j,e}^n s := c_{n,d-j,j-n} - \sum_{\nu+\mu+\kappa=n} \tilde{c}_{\nu,j-n+\mu,d-j+\kappa} \tilde{B}_{\nu\mu\kappa}^n(v_1).$$

Funkcionalne $\tau_{j,e}^n$ imenujemo funkcionali gladkosti reda n .

Označimo $\mathcal{T} := \{\tau_{j,e}^n\}$, kjer so $\tau_{j,e}^n$ definirani na orientiranih robovih sferične triangulacije Δ .

Definicija 53. S $\mathcal{S}_d^\mathcal{T} := \{s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta) : \tau s = 0 \text{ za vse } \tau \in \mathcal{T}\}$ definiramo prostor gladkih sferičnih zlepkov.

Definicija 54. Če je e notranji rob sferične triangulacije Δ , ki si ga delita sferična trikotnika T in $\tilde{T}$, potem pravimo, da je $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ $\mathcal{C}^r$ gladek na robu e , če je prehod med sferičnima polinoma $s|_T$ in $s|_{\tilde{T}}$ r -krat zvezno odvedljiv na robu e .

Po izreku 40 vidimo, da bodo vsi sferični zlepki v $\mathcal{S}_d^\mathcal{T} \mathcal{C}^r$ gladki na robu e natanko tedaj, ko $\mathcal{T}$ vsebuje vse linearne funkcionalne $\{\tau_{j,e}^n, j = 1, \dots, d, n = 1, \dots, r\}$. S

$$\mathcal{S}_d^r(\Delta) := \mathcal{S}_d^0(\Delta) \cap \mathcal{C}^r(\Omega)$$

označimo prostor sferičnih zlepkov stopnje d , ki so $\mathcal{C}^r$ gladki na vseh notranjih robovih sferične triangulacije Δ .

Pravimo, da je zlepek $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ $\mathcal{C}^\rho$ gladek v oglišču v , če imajo vsi sferični polinomi $s|_T$ (v je oglišče v sferičnem trikotniku T) enake odvode do reda ρ v oglišču v . V tem primeru pišemo $s \in \mathcal{C}^\rho(v)$. Naslednja lema pokaže, da lahko s primernimi pogoji gladkosti na notranjih robovih triangulacije Δ , ki vsebujejo oglišče v dosežemo, da je sferični zlepek $\mathcal{C}^\rho$ gladek.

Lema 55. *Naj bo $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ in v oglišče sferične triangulacije Δ . Potem je $s \in \mathcal{C}^\rho(v)$ natanko tedaj, ko za $i = 1, \dots, m$ velja*

$$\tau_{j,e_i}^n s = 0, \quad \text{za } n \leq j \leq d \text{ in } 1 \leq n \leq \rho, \quad (5.2)$$

kjer so $e_1, \dots, e_m$ notranji robovi sferične triangulacije Δ , ki vsebujejo oglišče v .

Za potrebe dokaza definirajmo še disk s središčem v točki v . Za dan $0 \leq m \leq d$, definiramo množico $R_m^T(v) = \{\xi_{d-m,j,m-j}\}_{j=0}^m$ kot kolobar s polmerom m s središčem v . Množici $\mathcal{D}_m^T(v) = \{\cup_{n=0}^m R_n^T(v)\}$ pravimo disk s polmerom m in središčem v točki v .

Dokaz. Za $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ lahko njegove sferične B-koeficiente domenskih točk, ki ležijo v disku $\mathcal{D}_\rho^T(v)$ gledamo kot koeficiente sferičnega zlepka g iz $\mathcal{S}_\rho^0(\Delta)$. Sferični zlepek s je v $\mathcal{C}^\rho(v)$ natanko tedaj, ko se g reducira na en sferični polinom, kar pa velja natanko tedaj, ko velja (5.2). $\square$

Kot v ravninskem primeru so pogoji gladkosti za sferični zlepek $s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta)$ samo linearni pogoji na vektorju $\mathbf{c} = \{c_\xi\}_{\xi \in \mathcal{D}_{d,\Delta}}$ B-koeficientov sferičnega zlepka s . Za poljubno množico $\mathcal{T}$ pogojev gladkosti obstaja matrika A odvisna od $\mathcal{T}$, tako da

$$\mathcal{S}_d^T(\Delta) = \{s \in \mathcal{S}_d^0(\Delta) : A\mathbf{c} = 0\}. \quad (5.3)$$

Očitno je matrika A dimenzije $n_s \times n_d$, kjer je n_s število pogojev gladkosti v $\mathcal{T}$, n_d pa dimenzija prostora $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$. Matrika A je relativno razpršena, saj tipični $\mathcal{C}^r$ pogoji gladkosti na robu sferičnega trikotnika vključujejo le $\binom{r+2}{2} + 1$ koeficientov. Npr. $\mathcal{C}^1$ pogoj vključuje le štiri neničelne koeficiente, torej ima pripadajoča vrstica v matriki A največ štiri neničelne elemente.

Izrek 56. *Naj bo $\mathcal{S}_d^T(\Delta)$ prostor gladkih sferičnih zlepkov, definiranih v (5.3). Potem je dimenzija prostora $\mathcal{S}_d^T(\Delta)$ enaka $n_d - n_r$, kjer je n_r rang matrike A .*

Dokaz. Če je $\mathbf{c}$ vektor, ki zadošča enačbi $A\mathbf{c} = 0$, potem sferični zlepek v $\mathcal{S}_d^0(\Delta)$ z vektorjem B-koeficientov enakim $\mathbf{c}$ očitno pripada prostoru $\mathcal{S}_d^T(\Delta)$. Število linearno neodvisnih rešitev $A\mathbf{c} = 0$ pa je natanko $n_d - n_r$. $\square$

Primer 57. Razpišimo pogoje gladkosti in matriko A za kvadratične $\mathcal{C}^1$ in kubične $\mathcal{C}^2$ sferične zlepke na primeru triangulacije sestavljene iz dveh trikotnikov, $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in $\tilde{T} = \langle v_4, v_3, v_2 \rangle$.

1. Izračunajmo formule za kvadratične $\mathcal{C}^1$ sferične zlepke. Funkcionalni gladkosti bodo reda 1:

$$\mathcal{T}_{j,e}^1 s = c_{1,2-j,j-1} - (\tilde{c}_{1,j-1,2-j} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{0,j,2-j} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{0,j-1,3-j} \tilde{B}_{001}^1(v_1)).$$

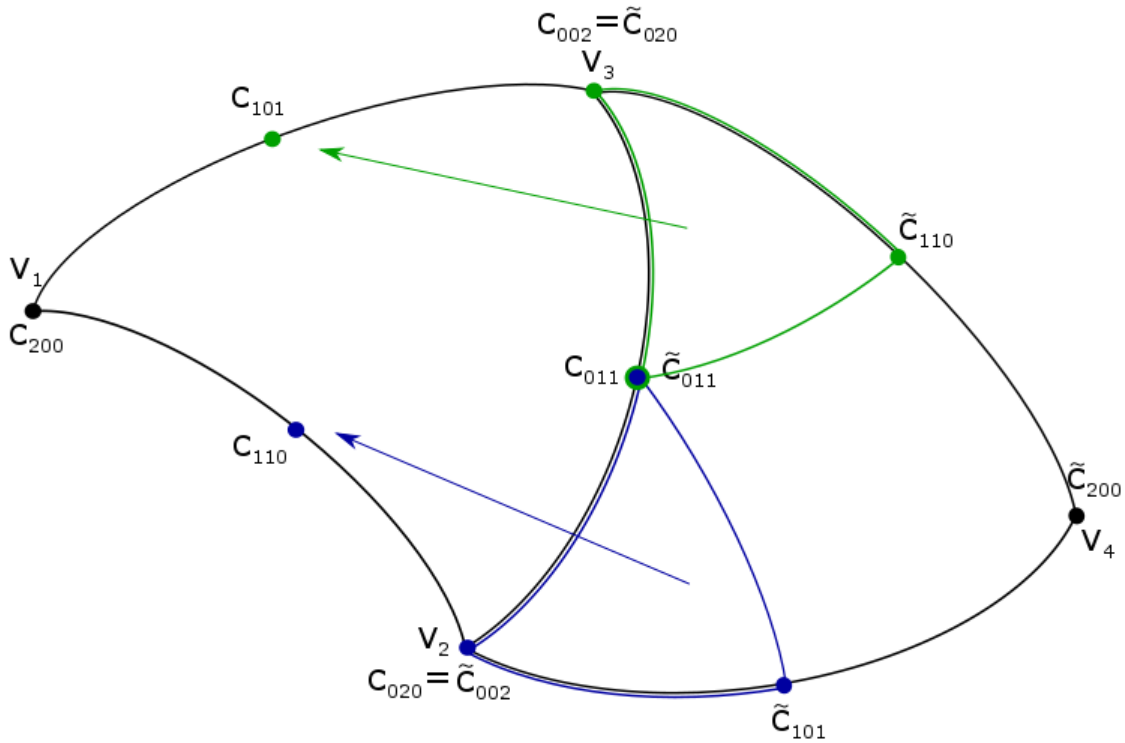
Pri $j = 1$ dobimo:

$$\mathcal{T}_{1,e}^1 s = c_{110} - (\tilde{c}_{101} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{011} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{002} \tilde{B}_{001}^1(v_1)),$$

pri $j = 2$ pa

$$\mathcal{T}_{2,e}^1 s = c_{101} - (\tilde{c}_{110} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{020} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{011} \tilde{B}_{001}^1(v_1)).$$

Pogoje gladkosti dobimo tako, da dobljeni enačbi enačimo z nič. Grafično to pomeni, da točko c_{njk} , kjer je $n = 1$ dobimo kot linearno kombinacijo treh točk iz trikotnika $\tilde{T}$ (glej sliko 5.4).



Slika 5.4: Pogoji gladkosti za kvadratičen $\mathcal{C}^1$ sferični zlepek.

Ker imamo 2 pogoja gladkosti, dimenzija prostora pa je enaka 9, bo matrika A velikosti 2×9 . Če definiramo vektor $\mathbf{c}$ kot

$$\mathbf{c} = [c_{200}, c_{110}, c_{101}, \tilde{c}_{002}, \tilde{c}_{011}, \tilde{c}_{020}, \tilde{c}_{110}, \tilde{c}_{101}, \tilde{c}_{200}],$$

potem je matrika A enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\tilde{B}_{001}^1(v_1) & -\tilde{B}_{010}^1(v_1) & 0 & 0 & -\tilde{B}_{100}^1(v_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\tilde{B}_{001}^1(v_1) & -\tilde{B}_{010}^1(v_1) & -\tilde{B}_{100}^1(v_1) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunajmo formule za kubične $\mathcal{C}^2$ sferične zlepke. Funkcionalni gladkosti bodo reda 1 in 2:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j,e}^1 s &= c_{1,3-j,j-1} - (\tilde{c}_{1,j-1,3-j} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{0,j,3-j} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{0,j-1,4-j} \tilde{B}_{001}^1(v_1)), \\ \mathcal{T}_{j,e}^2 s &= c_{2,3-j,j-2} - \left(\tilde{c}_{2,j-2,3-j} \tilde{B}_{200}^1(v_2) + \tilde{c}_{0,j,3-j} \tilde{B}_{020}^1(v_2) + \tilde{c}_{0,j-2,5-j} \tilde{B}_{002}^1(v_2) + \right. \\ &\quad \left. \tilde{c}_{1,j-1,3-j} \tilde{B}_{110}^1(v_2) + \tilde{c}_{1,j-2,4-j} \tilde{B}_{101}^1(v_2) + \tilde{c}_{0,j-1,4-j} \tilde{B}_{011}^1(v_2) \right). \end{aligned}$$

Pri funkcionalih gladkosti reda 1 dobimo tri funkcionalne za $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,e}^1 s &= c_{120} - (\tilde{c}_{102} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{012} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{003} \tilde{B}_{001}^1(v_1)), \\ \mathcal{T}_{2,e}^1 s &= c_{111} - (\tilde{c}_{111} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{021} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{012} \tilde{B}_{001}^1(v_1)), \\ \mathcal{T}_{3,e}^1 s &= c_{102} - (\tilde{c}_{120} \tilde{B}_{100}^1(v_1) + \tilde{c}_{030} \tilde{B}_{010}^1(v_1) + \tilde{c}_{021} \tilde{B}_{001}^1(v_1)). \end{aligned}$$

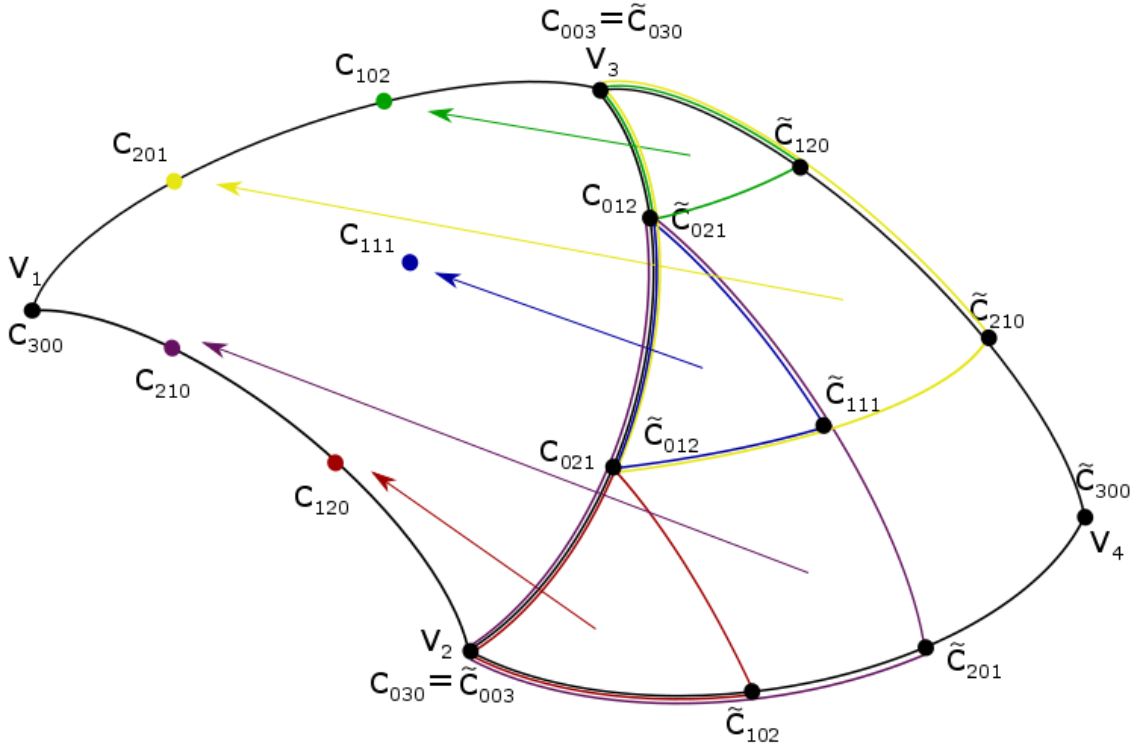
Pri funkcionalih gladkosti reda 2 pa dobimo dva funkcionala za $j = 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2,e}^2 s &= c_{210} - \left(\tilde{c}_{201} \tilde{B}_{200}^2(v_1) + \tilde{c}_{021} \tilde{B}_{020}^2(v_1) + \tilde{c}_{003} \tilde{B}_{002}^2(v_1) + \right. \\ &\quad \left. \tilde{c}_{111} \tilde{B}_{110}^2(v_1) + \tilde{c}_{102} \tilde{B}_{101}^2(v_1) + \tilde{c}_{012} \tilde{B}_{011}^2(v_1) \right), \\ \mathcal{T}_{3,e}^2 s &= c_{201} - \left(\tilde{c}_{210} \tilde{B}_{200}^2(v_1) + \tilde{c}_{030} \tilde{B}_{020}^2(v_1) + \tilde{c}_{012} \tilde{B}_{002}^2(v_1) + \right. \\ &\quad \left. \tilde{c}_{120} \tilde{B}_{110}^2(v_1) + \tilde{c}_{111} \tilde{B}_{101}^2(v_1) + \tilde{c}_{021} \tilde{B}_{011}^2(v_1) \right). \end{aligned}$$

Pogoje gladkosti dobimo tako, da dobljene enačbe enačimo z nič. Grafično to pomeni, da točko c_{njk} , kjer je $n = 1$ dobimo kot linearno kombinacijo treh točk iz trikotnika $\tilde{T}$, točko c_{njk} , kjer je $n = 2$ pa dobimo kot linearno kombinacijo šestih točk iz trikotnika $\tilde{T}$ (glej sliko 5.5).

Ker imamo 5 pogojev gladkosti, dimenzija prostora pa je enaka 16, bo matrika A velikosti 5×16 . Če definiramo vektor $\mathbf{c}$ kot

$$\mathbf{c} = [c_{300}, c_{201}, c_{210}, c_{102}, c_{111}, c_{120}, \tilde{c}_{030}, \tilde{c}_{021}, \tilde{c}_{012}, \tilde{c}_{003}, \tilde{c}_{120}, \tilde{c}_{111}, \tilde{c}_{102}, \tilde{c}_{210}, \tilde{c}_{201}, \tilde{c}_{300}],$$

Slika 5.5: Pogoji gladkosti za kubičen $\mathcal{C}^2$ sferični zlepek.

potem je matrika A enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\tilde{B}_{010}^1(v_1) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\tilde{B}_{010}^1(v_1) & -\tilde{B}_{001}^1(v_1) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\tilde{B}_{010}^1(v_1) & -\tilde{B}_{001}^1(v_1) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{B}_{020}^2(v_1) & -\tilde{B}_{011}^2(v_1) & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{B}_{020}^2(v_1) & -\tilde{B}_{011}^2(v_1) & -\tilde{B}_{002}^2(v_1) & \cdots \\ \cdots & -\tilde{B}_{001}^1(v_1) & 0 & 0 & -\tilde{B}_{100}^1(v_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -\tilde{B}_{100}^1(v_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & -\tilde{B}_{100}^1(v_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & -\tilde{B}_{002}^2(v_1) & 0 & -\tilde{B}_{110}^2(v_1) & -\tilde{B}_{101}^2(v_1) & 0 & -\tilde{B}_{200}^2(v_1) & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & -\tilde{B}_{110}^2(v_1) & -\tilde{B}_{101}^2(v_1) & 0 & -\tilde{B}_{200}^2(v_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Literatura

- [1] D. Courant in D.Hilbert: *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*. Interscience, 1953.
- [2] *Electroencephalography*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Electroencephalography>. 30.7.2015.
- [3] M. Neamtu in L. L. Schumaker P. Alfeld: *Circular Bernstein–Bézier polynomials* v Mathematical Methods for Curves and Surfaces. Vanderbilt University Press, 1995.
- [4] M. Neamtu in L. L. Schumaker P. Alfeld: *Bernstein–Bézier polynomials on spheres and sphere-like surfaces*. Comput. Aided Geom. Design 13, strani 333-349, 1996.
- [5] M. Neamtu in L. L. Schumaker P. Alfeld: *Fitting scattered data on sphere-like surfaces using spherical splines*. J. Comput. Appl. Math. 73, strani 5-43, 1996.
- [6] M. Neamtu in L. L. Schumaker P. Alfeld: *Dimension and local bases of homogeneous spline spaces*. SIAM J. Math. Anal. 27, strani 1482-1501, 1996.
- [7] Ming-Jun Lai in Larry L. Schumaker: *Spline functions on triangulations*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] R. J. Renka: *Delaunay triangulation and voronoi diagram on the surface of a sphere*. ACM Trans. Math. Software 23 (1997), strani 416-434, 2009.
- [9] T. Lyche in R. Winther: *A stable recurrence relation for trigonometric b-splines*. Journal of Approximation Theory 25, strani 266-279, 1979.
- [10] Thomas C. Ferree: *Spline interpolation of the scalp eeg*. August 2000. <http://www.csi.uoregon.edu/members/ferree/tutorials/SplineInterpolation.pdf>. 9.6.2015.
- [11] V. Baramidze M. J. Lai, C. K. Shum and P. Wenston: *Triangulated spherical splines for geopotential reconstruction*. J Geod, strani 695-708, 2009.