UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Gregor Grasselli

Krepko zvezne operatorske polgrupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2014

Kazalo

Krepko zvezne operatorske polgrupe

Povzetek

Delo je kratka predstavitev enoparametričnih krepko zveznih polgrup. Opisuje, kako se za vsako polgrupo izračuna njen generator, po drugi strani pa so podani natančni pogoji, da je dani linearni operator na kompleksnem Banachovem prostoru generator krepko zvezne polgrupe skupaj z opisom konstrukcije polgrupe iz danega generatorja. Pomembni rezultati so eksponentna omejenost krepko zveznih polgrup, zaprtost in povsod gosto definicijsko območje generatorja polgrupe ter lastnosti njegove resolvente. Od teh je najpomembnejša integralska predstavitev resolvente in oceni, ki se ju izpelje iz nje.

Strongly continuous semigroups

Abstract

The work is a short exposition on strongly continuous one parameter semigroups. It is shown how to compute the generator of a strongly continuous semigroup. Conversely, given a linear operator conditions for it to be a generator of strongly continuous semigroup are described and how to generate the semigroup from it. The most important results are the exponential boundedness of strongly continuous semigroups, the fact that the generator of a strongly continuous semigroup is closed and densely defined and the properties of its resolvent. The most important of the latter is the integral representation of the resolvent and the estimates derived from it.

Math. Subj. Class. (2010): 46G05, 46G10, 47D06, 47A10

Ključne besede: krepka zveznost, generator, resolventa, generiranje

Keywords: strong continuity, generator, resolvent, generating

1. Uvod

Želimo opisati razvoj sistema skozi čas. Naj bo X množica vseh stanj tega sistema. Stanje, v katerega pride sistem v času t iz stanja $x \in X$, označimo s $T(t)x$. Na ta način smo za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$, ker gledamo spremembe le po času naprej) definirali funkcijo $T(t) : X \to X$, ki opisuje, kako se sistem spremeni v času t. Preslikava $T(0)$ mora biti identična preslikava. Ker je $T(s)x$ stanje, v katerem je sistem po času s, če je bil najprej v stanju x, in $T(t)(T(s)x)$ stanje, v katerega pride sistem iz stanja $T(s)x$ po času t, $T(t)T(s)$ opisuje spremembo sistema v času $s+t$, kjer $T(t)T(s)$ pomeni kompozitum preslikav $T(t)$ in $T(s)$. Zato mora veljati $T(t+s) = T(t)T(s)$. S tem smo na množici $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ podali operacijo množenja in dobili polgrupo. Očitno bi s tem, ko bi dovolili tudi negativne čase, dobili grupo (inverz $T(t)$ bi bil $T(-t)$).

Zelo pomembno je, da smo pri vpeljevanju družine operatorjev $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ popolnoma zanemarili vso zgodovino razvoja sistema preden je prišel v trenutno stanje. Pomembna družina takih sistemov so slučajni procesi z lastnostjo Markova, pri katerih spremembe stanj sistema tvorijo enoparametrično krepko zvezno polgrupo.

Druga uporaba teorije enoparametričnih polgrup pa je reševanje Cauchyjeve naloge

$$\begin{array}{ll} \dot{u}(t,x) = Au(t,x) & ; t \geq 0 \\ u(0,x) = x & \end{array} , \tag{1}$$

kjer je $A : X \to X$ linearen operator na prostoru X in $u : \mathbb{R} \times X \to X$ parcialno odvedljiva na prvi argument. V delu so podani natančni pogoji za to kakšen mora biti A, da je naloga (1) rešljiva in tudi, kako se dobi rešitev, kadar je X kompleksen Banachov prostor (poln normiran prostor). Izkaže se, da je rešitev take enačbe ravno enoparametrična polgrupa. Velja tudi obratno. Za vsako krepko zvezno enoparametrično polgrupo linearnih operatorjev, ki slikajo iz Banachovega prostora X v X, obstaja linearen operator A za katerega je dana polgrupa rešitev naloge (1).

Na začetku dela je podano potrebno predznanje, potem pa so opisane krepko zvezne polgrupe. V tretjem razdelku najprej definiramo krepko zvezne polgrupe, potem pa se podrobneje posvetimo krepki zveznosti in njenim lastnostim ter eksponentni omejenosti polgrup, ki izhaja iz krepke zveznosti. V četrtem razdelku definiramo generator krepko zveznih polgrup in opišemo njegove najpomembnejše lastnosti, v petem razdelku obravnavamo poseben primer v normi zveznih polgrup, ki pa ga potrebujemo v zadnjem razdelku. Šesti razdelek govori o resolventi, v zadnjem razdelku pa dokažemo izreke o generiranju krepko zveznih polgrup. Vsak naslednji razdelek gradi na snovi iz prejšnjih, le šesti ni odvisen od petega.

Od tod naprej Banachov prostor pomeni Banachov prostor nad obsegom kompleksnih števil, razen kadar je obseg, nad katerim je dani prostor, očiten iz konteksta.

2. Potrebno predznanje

V tem razdelku je opisana snov, ki je nismo obravnavali pri obveznih predmetih, je pa potrebna za razumevanje nadaljnjega besedila.

2.1. **Lastnosti zveznih linearnih preslikav in operatorska norma.** Vira za ta razdelek sta [6] razdelka 1.2 in 1.6, [1] razdelka 2.1, 3.1.

Lema 2.1. *Naj bosta X in Y vektorska prostora z normo. Linearen operator T iz X v Y je zvezen natanko tedaj, ko je zvezen v $0 \in X$.*

Dokaz. Če je preslikava zvezna, je zvezna tudi v 0. Za dokaz v obratno smer predpostavimo, da je preslikava zvezna v 0. Zaradi linearnosti T je za vsak $x, y \in X$ $||Tx - Ty|| = ||T(x - y)||$. Ker je T zvezen v 0, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $||x - y|| < \delta$ sledi $||T(x - y)|| < \epsilon$. Torej je T povsod zvezen. □

Naslednja trditev omogoča definicijo norme zveznega linearnega operatorja.

Trditev 2.2. *Naj bosta X in Y vektorska prostora z normo in naj bo T linearen operator iz X v Y. Potem je T zvezen natanko tedaj, ko obstaja pozitivna konstanta β, za katero velja $||Tx|| \leq \beta||x||$ za vsak $x \in X$.*

Dokaz. Če obstaja β, da za vsak $x \in X$ velja $||Tx|| \leq \beta||x||$, potem je T očitno zvezen v 0 in je zato po prejšnji lemi zvezen na celem X. Obratno, če je T zvezen, potem za vsak ϵ obstaja δ, da iz $||x|| \leq \delta$ sledi, da je $||Tx|| \leq \epsilon$. Vzemimo poljuben $x \in X$. Naj bo λ takšno pozitivno število, da je $\lambda||x|| \leq \delta$. Potem je $||\lambda x|| \leq \delta$ in zato $||T(\lambda x)|| \leq \epsilon$. Potem je $||Tx|| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$. Če je $x = 0$, potem je $Tx = 0$, sicer pa lahko vzamemo $\lambda = \frac{\delta}{||x||}$ in dobimo $||Tx|| \leq \frac{\epsilon}{\delta}||x||$. Torej vzamemo $\beta = \frac{\epsilon}{\delta}$ in dobimo $||Tx|| \leq \beta||x||$ za vsak $x \in X$, saj je bil x poljuben. □

Ocena tega, kako hitro narašča zvezen linearni operator, je dana z njegovo operatorsko normo.

Definicija 2.3. *Operatorska norma* zveznega linearnega operatorja je

$$||T|| = \inf\{\beta; \forall x \in X. ||Tx|| \leq \beta||x||\}.$$

Iz definicije 2.3 je očitno, da vedno velja $||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x||$. Zaradi linearnosti T lahko zgornjo definicijo napišemo tudi kot

$$||T|| = \inf\left\{\beta; \forall x \in X \setminus \{0\}. \left\|T\frac{x}{||x||}\right\| \leq \beta\right\}$$

kar pomeni, da je $||T||$ infimum zgornjih mej za vrednosti $||Tx||$, ko je norma x enaka 1. Torej je $||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||$. Če je $0 < ||x|| < 1$, potem je $||Tx|| = ||x|| \cdot ||T\frac{x}{||x||}|| < ||T\frac{x}{||x||}||$. S tem smo že dokazali naslednjo trditev. Zadnja enakost sledi iz

$$\left\|T\frac{x}{||x||}\right\| = \frac{||Tx||}{||x||}$$

Trditev 2.4. *Za operatorsko normo velja*

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}$$

Navedimo nekaj primerov linearnih operatorjev in njihovih norm.

Primer 2.5. Naj bo $X = C([a, b])$ Banachov prostor vseh zveznih funkcij na $[a, b]$, opremljen s supremum normo.

a) Identiteta na kateremkoli vektorskem prostoru z normo ima očitno normo 1.
b) Naj bo za $x \in [a, b]$, $F_x : X \to \mathbb{R}$, $F_x\ f = f(x)$. Ker je $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ in $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, je F_x linearen funkcional. Zagotovo je $|f(x)| \leq \sup_{u \in [a,b]} |f(u)| = ||f||$, torej je $||F_x|| \leq 1$, po drugi strani pa je, na primer za konstantne funkcije, $|f(x)| = \sup_{u \in [a,b]} |f(u)|$. Torej je norma $||F_x|| = 1$.

c) Naj bo $F\ f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Tudi to je linearni funkcional in velja $|F(f)| \leq ||f|| \cdot (b-a)$. Zato je $||F|| \leq b-a$. Zopet lahko vidimo, da norma ne more biti manjša, ker je za konstanto c, $F\ c = c \cdot (b-a)$. Zato je $||F|| = b-a$.

Trditev 2.6. *Če sta T in S omejena linearna operatorja, ki slikata iz $(X, ||\cdot||)$ v $(Y, ||\cdot||)$, potem velja*

$$||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \text{ in } ||\alpha T|| = |\alpha|\ ||T||,$$

kjer je $(T+S)(x) = Tx+Sx$ in $(\alpha T)(x) = \alpha Tx$. Če pa je $T : X \to Y$ in $V : Y \to Z$, kjer je tudi Z normiran prostor, velja

$$||VT|| \leq ||V|| \cdot ||T||,$$

kjer VT pomeni kompozitum operatorjev V in T.

Dokaz. Dokažimo najprej trikotniško neenakost. Ker je $||(T+S)(x)|| = ||Tx+Sx|| \leq ||Tx|| + ||Sx|| \leq ||T||\ ||x|| + ||S||\ ||x||$ za vsak $x \in X$, je $\sup_{||x||=1} ||(T+S)(x)|| \leq ||T|| + ||S||$. Drugo neenakost dobimo iz $||(\alpha T)(x)|| = ||\alpha Tx|| = |\alpha| \cdot ||Tx||$, ko na obeh straneh vzamemo supremum po $\{x \in X; ||x|| = 1\}$. Zadnja neenakost sledi iz $||VTx|| \leq ||V||\ ||Tx|| \leq ||V||\ ||T||\ ||x||$. □

2.2. **Bairov izrek za polne metrične prostore in njegove posledice.** Vira za ta razdelek sta [6] razdelki 2.1, 2.5, 2.6 in [1] razdelka 3.12, 3.14.

Izrek 2.7 (Bairov izrek za polne metrične prostore)**.** *Neprazen poln metrični prostor ni unija števno mnogo množic, katerih zaprtja imajo prazno notranjost.*

Dokaz. Dokažemo s protislovjem. Recimo, da se da poln metrični prostor X zapisati kot števna unija množic $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemer ima zaprtje vsake od množic M_n za $n \in N$ prazno notranjost. Potem je:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i$$

in $\overline{M}_i$ ima prazno notranjost za vse i. Zato smemo brez škode za splošnost privzeti, da so vse množice M_i, $i = 1, 2, \ldots$ zaprte. Potem je M_1^c odprta množica, katere zaprtje je cel X. Če bi namreč obstajal $x \in M_1$, ki ni v zaprtju M_1^c, bi to pomenilo, da obstaja okolica elementa x, katere presek z M_1^c je prazen, kar bi pomenilo, da M_1 nima prazne notranjosti. Potem pa M_1^c vsebuje zaprt krog $\overline{K}_1(x_1, r_1)$, $r_1 < 2^{-1}$. Ker je zaprtje M_2^c ves X, obstaja $x_2 \in M_2^c \cap K_1$ in $\overline{K}_2(x_2, r_2) \subset \overline{K}_1$, takšna, da je $\overline{K}_2(x_2, r_2) \cap M_2 = \emptyset$. Privzamemo lahko, da je $r_2 < 2^{-2}$. Postopek nadaljujemo in dobimo zaporedje krogov $\overline{K}_i(x_i, r_i)$, za katero velja

$$r_i < 2^{-i},\ \overline{K}_{i+1} \subset \overline{K}_i,\ \overline{K}_i \cap M_i = \emptyset.$$

Zaporedje središč krogov $\{x_n\}$ je Cauchyjevo, saj je za vsak $n < m$, $x_m \in K_n$, torej je za $l, m > n$ $d(x_l, x_m) < 2^{-n+1}$. Zaradi polnosti X obstaja limita zaporedja $\{x_n\}$, recimo ji x. Ker je celotno zaporedje $\{x_i\}_{i>n}$ vsebovano v $\overline{K}_n$ mora biti tudi njegova limita vsebovana v $\overline{K}_n$. Zato je $x \in \overline{K}_n$ za vsak n. Torej je

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right)^c$$

in to je v nasprotju s privzetkom, da je $\bigcup M_i = X$. □

Izrek 2.8 (Princip enakomerne omejenosti)**.** *Naj bo X Banachov prostor, Y pa normiran vektorski prostor. Naj bo F družina zveznih linearnih operatorjev, ki slikajo iz X v Y. Potem velja:*

$$(\forall x \in X. \sup_{T \in F} ||Tx|| < \infty) \Rightarrow \sup_{T \in F} ||T|| < \infty$$

Dokaz. Naj bo $U_{T,n} = \{x \in X; ||Tx|| \leq n\}$. Ker je norma zvezna funkcija iz Y v $\mathbb{R}$ in ker je T zvezen operator, je množica $U_{T,n}$ zaprta, saj je praslika $(T \circ || \cdot ||)^{-1}([0, n])$. Naj bo $M_n = \bigcap_{T \in F} U_{T,n}$ za $n = 1, 2, \ldots$. Če je za vsak $x \in X$ število $\sup_{T \in F} ||Tx||$ končno, potem je unija $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ves X. Po Bairovem izreku za polne metrične prostore 2.7 mora obstajati $m \in \mathbb{N}$, za katerega ima množica M_m neprazno notranjost (množice $\{M_n\}$ so zaprte, ker so preseki zaprtih množic). Zato M_m vsebuje kroglo $K(y, \epsilon)$. Vzemimo sedaj poljuben $z \in X$ takšen, da je $||z|| < \epsilon$. Potem velja $||Tz|| = ||Ty + Tz - Ty|| = ||T(y+z) - Ty|| \leq ||T(y+z)|| + ||Ty|| \leq 2m$. Torej za vsak z, ki ima normo manjšo od ϵ, velja, da je $||Tz|| \leq 2m$ za vse $T \in F$. Potem pa za vse $T \in F$ velja, da je $||T|| \leq \frac{2m}{\epsilon}$. □

Naj bosta X in Y Banachova prostora. Vemo, da je graf zveznega linearnega operatorja, ki slika iz X v Y, zaprta podmnožica $X \times Y$, saj je prostor Y Hausdorffov. Če pa operator ni zvezen, ni nujno, da je njegov graf zaprt. Tisti operatorji, katerih graf je zaprt v $X \times Y$, so posebej zanimivi. Zato definiramo:

Definicija 2.9. Naj bosta X in Y Banachova prostora. Linearni operator $F : X \supset D(F) \to Y$ je *zaprt* natanko tedaj, ko je njegov graf zaprta podmnožica prostora $X \times Y$.

Navedimo primer zaprtega linearnega operatorja, ki ni zvezen.

Primer 2.10. Naj bo $X = Y = C[0, 1]$, opremljen s supremum normo. Naj bo D množica vseh tistih funkcij $f \in X$, ki imajo zvezen odvod. Naj bo $T : D \to Y$, $T\ f = f'$. Operator T je očitno linearen, ni pa zvezen, saj je za $f_n(x) = x^n$ norma $||f_n|| = 1$, norma $||T\ f_n||$ pa je enaka n. Torej T ni omejen. Vidimo pa, da je T zaprt. Naj bo $\{f_i\}$ zaporedje elementov D, ki konvergira k f in naj bo g limita zaporedja $\{T\ f_i\}$. Torej je g enakomerna limita zaporedja $\{f_i'\}$. Ker odvodi enakomerno konvergirajo proti g, konvergira zaporedje $A = \{f_i(0) + \int_o^x f_i'(t)\,\mathrm{d}t\}$ po točkah proti f. Hkrati, pa je limita po točkah zaporedja A enaka $g(0) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Potem je f odvedljiva in njen odvod je g. Torej je $T\ f = g$ in T je zaprt.

Pomembna lastnost zaprtih operatorjev je, da so zvezni, če so povsod definirani. O tem govori izrek o zaprtem grafu, za njegov dokaz pa bomo potrebovali najprej Banachov izrek o odprti preslikavi.

Izrek 2.11 (Izrek o odprti preslikavi)**.** *Naj bosta X in Y Banachova prostora in $T : X \to Y$ surjektiven zvezen linearen operator. Potem slika T odprte množice v odprte množice.*

Dokaz. Zaradi linearnosti T je dovolj pokazati, da se odprte okolice elementa 0 v X slikajo v okolice elementa 0 v Y, ki vsebujejo odprto okolico ničle. Če je V poljubna odprta okolica elementa 0 v X, potem obstaja $r > 0$, da je odprta krogla $K(0, r) \subset V$. Preslikava, ki $K(0, r)$ slika v okolico elementa 0 v Y, zato tudi V slika v okolico elementa 0 v Y. Torej je dovolj pokazati, da je za vsak $r > 0$ slika $T(K(0, r))$ odprta okolica ničle v Y.

Vzemimo fiksen $r > 0$. Označimo $K_n = K(0, n \cdot \frac{r}{2})$. Potem je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Ker je T surjektiven, je

$$Y = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(K_n).$$

Po Bairovem izreku za polne metrične prostore 2.7 to pomeni, da obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da ima množica $\overline{T(K_{n_0})}$ neprazno notranjost. Preslikava $y \to \frac{1}{n_0} y$ je homeomorfizem prostora Y in slika množico $\overline{T(K_{n_0})}$ v $\overline{T(K_1)}$. Zato tudi množica $\overline{T(K_1)}$ nima prazne notranjosti. Naj bo O odprta podmnožica $\overline{T(K_1)}$ in $x_0 \in K_1$ takšen, da je $y_0 = Tx_0 \in O$. Ker je preslikava $x \to x - x_0$ homeomorfizem obstaja odprta okolica U ničle v Y, tako da je $U \subset M = \{y - y_0; y \in \overline{T(K_1)}\}$. Ker je za vsak $x \in K_1$, $x - x_0 \in K(0, r)$, saj je tudi $x_0 \in K_1$, je $\{y - y_0; y \in T(K_1)\} = \{T(x - x_0); x \in K_1\} \subset T(K(0, r))$ in zato tudi $U \subset M \subset \overline{T(K(0, r))}$. S tem smo dokazali, da je zaprtje slike odprte okolice ničle iz X okolica ničle v Y z neprazno notranjostjo.

Naj bo $\epsilon > 0$. Označimo z $X_\epsilon = K(0, \epsilon) \subset X$ in $Y_\epsilon = K(0, \epsilon) \subset Y$. Naj bo $\epsilon_i = 2^{-i}\epsilon$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$. Po tistem, kar smo dokazali v prejšnjem odstavku, obstaja tako zaporedje pozitivnih števil $\{\eta_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$, da je

$$\lim_{i \to \infty} \eta_i = 0 \text{ in } Y_{\eta_i} \subset \overline{T(X_{\epsilon_i})} \text{ za vsak } i = 0, 1, 2 \ldots$$

Pokazali bomo, da za katerokoli točko $y \in Y_{\eta_0}$ obstaja takšen $x \in X_{2\epsilon_0}$, da je $Tx = y$. Ker je $Y_{\eta_0} \subset \overline{T(X_{\epsilon_0})}$, obstaja takšen x_0, da je $||y - Tx_0|| < \eta_1$ oziroma $y - Tx_0 \in Y_{\eta_1}$. Na enak način najdemo takšen $x_1 \in X_{\epsilon_1}$, da je $y - Tx_0 - Tx_1 \in Y_{\eta_2}$. Ta postopek nadaljujemo in dobimo zaporedje $\{x_i\}$, za katero velja

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \right\| < \eta_{n+1}.$$

Ker je

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||x_i|| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \epsilon_i \leq 2^{-m}\epsilon_0,$$

je zaporedje delnih vsot $\{\sum_{k=0}^{n} x_i\}_n$ Cauchyjevo in zato zaradi polnosti prostora X konvergira. Njegovo limito označimo z x. Velja

$$||x|| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} x_i \right\| \leq \epsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2\epsilon_0.$$

Ker je T zvezen, je $y = Tx$. S tem smo dokazali, da slika vsake odprte okolice 0 v X vsebuje odprto okolico elementa 0 v Y, kar smo hoteli. □

Izrek 2.12 (Izrek o zaprtem grafu)**.** *Naj bosta X in Y Banachova prostora in $T : X \to Y$ zaprt operator, definiran na vsem X. Potem je T zvezen.*

Dokaz. Graf $G(T)$ preslikave T je zaprt vektorski podprostor prostora $X \times Y$. Ker je $X \times Y$ poln, je tudi $G(T)$ poln. Preslikava $U : G(T) \to X$, $U((x, Tx)) = x$ je očitno linearna, zvezna (ker je zožitev projekcije) in surjektivna. Po prejšnjem izreku je tudi odprta in zato je njen inverz zvezen. Preslikava $V : G(T) \to Y$, $V((x, Tx)) = Tx$ je tudi zožitev projekcije in torej zvezna. Potem pa je kompozitum $T = U^{-1}V$ tudi zvezna funkcija. □

2.3. **Riemannov integral funkcije z vrednostmi v Banachovem prostoru.** V tem podrazdelku bomo definirali Riemannov integral funkcije, ki slika iz podmnožice realnih števil v Banachov prostor in dokazali nekaj njegovih lastnosti, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Zanima nas predvsem integral zveznih funkcij. Ideja za vsebino tega razdelka je iz [2].

Glavna ideja pri definiciji integrala je, da ga bomo definirali kot linearni operator na enostavnem prostoru in ga potem razširili na večji prostor, ki vsebuje tudi zvezne funkcije. Zato bomo potrebovali naslednji izrek.

Izrek 2.13. *Naj bo V normiran prostor, $S \subset V$ vektorski prostor in X Banachov prostor. Naj bo F linearni operator $F : S \to X$, ki je omejen v smislu, da obstaja pozitivna konstanta C, tako da za vsak $s \in S$ velja $||Fs|| \leq C||s||$. Potem obstaja natanko en omejen linearni operator, ki je razširitev operatorja F, označimo ga z $\bar{F}$, na zaprtje S. Tudi za $\bar{F}$ velja, da je za vsak $s \in \bar{S}$ $||\bar{F}s|| \leq C||s||$.*

Dokaz. Naj bo $s \in \bar{S} \setminus S$. Potem obstaja zaporedje $\{s_n\}$, ki konvergira k s in je zato Cauchyjevo. Ker je $||Fs_n - Fs_m|| \leq C||s_n - s_m||$, je tudi zaporedje $\{Fs_n\} \subset X$ Cauchyjevo. Prostor X je Banachov, zato obstaja limita l tega zaporedja. Postavimo $\bar{F}s = l$. Najprej moramo preveriti, da je $\bar{F}$ dobro definiran. Naj bo $\{t_n\} \subset S$ drugo zaporedje, ki konvergira k s. Izberimo $\epsilon > 0$. Ker t_n konvergira proti s, obstaja takšen $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $||t_n - s|| < \frac{\epsilon}{2}$, kakor hitro je $n > m_0$; podobno obstaja $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $||s_n - s|| < \frac{\epsilon}{2}$, če je $n > k_0$. Naj bo $n_0 = \max\{m_0, k_0\}$. Potem je $||t_n - s_n|| < \epsilon$ za vsak $n > n_0$. Zato je $||Ft_n - Fs_n|| \leq C||t_n - s_n|| < C\epsilon$ in $||Ft_n - Fs_n|| \to 0$, kar pomeni, da tudi Ft_n konvergira k l.

Linearnost operatorja $\bar{F}$ izhaja iz dejstva, da je vsota limit dveh zaporedij enaka limiti zaporedja iz vsot istoležnih členov obeh zaporedij in da je $\alpha \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \alpha s_n$.

Preverimo še enoličnost razširitve. Naj bo B še en omejen linearni operator, ki razširja F na $\bar{S}$. Potem mora zaradi zveznosti B na $\bar{S}$ za poljubno konvergentno zaporedje $\{s_n\} \subset S$ z limito s veljati $Bs = B \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} Bs_n = \lim_{n\to\infty} Fs_n = \bar{F}s$.

Zadnji del trditve očitno velja za vse $s \in S$. Ker je $\bar{F}$ zvezen, za $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, kjer je $\{s_n\} \subset S$, velja $||\bar{F}s|| = ||\bar{F} \lim_{n\to\infty} s_n|| = \lim_{n\to\infty} ||\bar{F}s_n|| \leq \lim_{n\to\infty} C||s_n|| = C||s||$, kar je bilo treba pokazati. □

Definicija 2.14. *Karakteristična funkcija* množice A je $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}.$$

Definicija 2.15. Naj bo $[a, b]$ poljuben zaprt interval. Definirajmo $\mathcal{A}_{a,b} = \{A \subset [a, b]; A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \cup K$, kjer so $I_1, \ldots, I_n$ paroma disjunktni intervali in K končna množica $\}$ in naj bo X Banachov prostor. Vsaki funkciji $s : [a, b] \to X$, ki zavzame končno mnogo vrednosti in za katero velja, da je za vsako vrednost x te funkcije $s^{-1}(x) \in \mathcal{A}_{a,b}$, rečemo *stopničasta funkcija.* Prostor vseh takšnih funkcij označimo $S([a, b], X)$.

Integral bomo najprej definirali za stopničaste funkcije. Razlog, da morajo biti praslike posameznih vrednosti stopničaste funkcije končne unije intervalov in točk, je, da bomo za izračun integrala potrebovali način za določanje velikosti teh množic. Velikost množic bo predstavljala njihova dolžina, podana v naslednji definiciji.

Definicija 2.16. Naj bo $\mathcal{A}_{a,b}$ kot v definiciji stopničaste funkcije. Za vsako množico $A \in \mathcal{A}_{a,b}$, $A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \cup K$, kjer so oznake enake kot v definiciji množice $\mathcal{A}_{a,b}$, definiramo njeno dolžino $l(A)$ kot vsoto dolžin intervalov $I_1, I_2, \ldots I_n$. *Dolžino* intervala, katerega največja spodnja meja je u, najmanjša zgornja meja pa v, definiramo kot $v - u$.

Določeni integral funkcije na intervalu $[a, b]$ definiramo kot linearni funkcional na $S([a, b], X)$. Videli bomo, da je omejen in zato ga bomo lahko po izreku 2.13 razširili na zaprtje prostora stopničastih funkcij znotraj prostora vseh funkcij, ki slikajo iz $[a, b]$ v X, opremljenega z normo $||\cdot||_\infty$. Najprej pa moramo videti, da je $S([a, b], X)$ normiran prostor. Za to bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 2.17. *Za vsak interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ velja: za vsak končen nabor elementov množice $\mathcal{A}_{a,b}$ sta njihova unija in presek zopet v $\mathcal{A}_{a,b}$.*

Dokaz. Naj bosta $A, B \in \mathcal{A}_{a,b}$, torej se da A zapisati kot $A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \cup K$, kjer so I_i za $i = 1, \ldots, n$ paroma disjunktni intervali in $K \subset \mathbb{R}$ končna množica. Podobno se da B zapisati kot $B = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_m \cup L$, kjer so J_j paroma disjunktni intervali in $L \subset \mathbb{R}$ končna množica. Potem je

$$A \cap B = \bigcup_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m} (I_i \cap J_j) \cup \bigcup_{i=1,\ldots n} (L \cap I_i) \cup \bigcup_{j=1,\ldots m} (K \cap J_j) \cup (K \cap L).$$

Presek $I_i \cap J_j$ za poljubna i izmed $1, \ldots, n$ in j izmed $1, \ldots, m$ je lahko interval, prazna množica ali točka. Intervali, ki jih dobimo na ta način, so paroma disjunktni, saj bi skupna točka para takih intervalov morala biti v dveh intervalih iz A ali v dveh intervalih iz B, kar pa ni možno, saj so ti intervali paroma disjunktni. Vsi ostali preseki, ki nastopajo v izrazu zgoraj, so lahko le prazne množice ali točke. Tako vidimo, da je presek sestavljen iz končno mnogo intervalov, ki so vsi paroma disjunktni in končne množice dodatnih točk, torej je v $\mathcal{A}_{a,b}$.

Hitro se prepričamo, da je tudi unija množic A in B v $\mathcal{A}_{a,b}$. Unija dveh intervalov z nepraznim presekom je namreč spet interval, tako da ostane končno mnogo paroma disjunktnih intervalov. Ker je tudi unija obeh končnih množic zopet končna, se dokaz konča z uporabo popolne indukcije. $\square$

Z uporabo te leme vidimo, da je vsota dveh stopničastih funkcij s, ki zavzame vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in r, ki zavzame vrednosti $y_1, y_2, \ldots, y_n$, spet stopničasta funkcija. Vrednost $x_i + y_j$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ in $j = 1, 2, \ldots, m$ namreč funkcija $s + r$ zavzame na preseku $s^{-1}(x_i) \cap r^{-1}(y_j) \in \mathcal{A}_{a,b}$. Da $s + r$ zavzame končno mnogo vrednosti, je očitno. Prav tako je očitno tudi, da je stopničasta funkcija, pomnožena z realnim številom, spet stopničasta funkcija. Povzemimo to v trditvi.

Trditev 2.18. *Množica $S([a, b], X)$ je normiran prostor*

$$||s||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} ||s(t)||.$$

Lema 2.19. *Naj bo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Za dve množici $A, B \in \mathcal{A}_{a,b}$, katerih presek je končna množica, velja $l(A \cup B) = l(A) + l(B)$ ($l(A \cup B)$ obstaja po lemi 2.17).*

Dokaz. To je očitno, saj točke iz preseka ne prispevajo nič k skupni dolžini, iz definicije dolžine pa je jasno, da je dolžina unije disjunktnih intervalov vsota njihovih dolžin. $\square$

Sedaj lahko definiramo integral stopničaste funkcije.

Definicija 2.20. Naj bo X Banachov prostor in $s \in S([a,b],X)$ stopničasta funkcija, definirana na intervalu $[a,b]$, ki zavzame vrednosti $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Določeni integral* funkcije s na intervalu $[a,b]$ definiramo kot

$$I_{[a,b]}s = \int_a^b s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot l(s^{-1}(x_i)).$$

Če sta $s, r \in S([a,b],X)$ za Banachov prostor X, kjer s zavzame vrednosti $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ in r vrednosti $y_0, y_1, \ldots, y_m$ je

$$\begin{aligned}
I_{[a,b]}(s+r) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(x_i + y_j)\cdot l((s+r)^{-1}(x_i+y_j))\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(x_i + y_j)\cdot l(s^{-1}(x_i)\cap r^{-1}(y_j))\\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{j=0}^{m} l(s^{-1}(x_i)\cap r^{-1}(y_j)) + \sum_{j=0}^{m} y_j \cdot \sum_{i=0}^{n} l(r^{-1}(y_j)\cap s^{-1}(x_i)).
\end{aligned}$$

Ker mora biti unija vseh praslik posameznih vrednosti stopničastih funkcij s in r ves interval $[a,b]$, dobimo z upoštevanjem leme 2.19, da je to enako

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot l(s^{-1}(x_i)) + \sum_{j=0}^{m} y_j \cdot l(r^{-1}(y_j)) = I_{[a,b]}s + I_{[a,b]}r.$$

Da je $I_{[a,b]}(\alpha s) = \alpha I_{[a,b]}s$ je očitno, zato je $I_{[a,b]}$ linearni funkcional na prostoru $S([a,b],X)$ in velja $||Is|| \leq (b-a)||s||_\infty$. Zato lahko po izreku 2.13 I razširimo na zaprtje prostora vseh stopničastih funkcij. Rečemo, da je funkcija *integrabilna*, kadar je v zaprtju prostora stopničastih funkcij. Lahko se prepričamo, da so zvezne funkcije na $[a,b]$ vedno integrabilne.

Izrek 2.21. *Naj bo X Banachov prostor. Za vsak $[a,b] \subset \mathbb{R}$ so vse zvezne funkcije iz $[a,b]$ v X integrabilne.*

Dokaz. Dovolj je videti, da za vsako zvezno funkcijo $f : [a,b] \to X$ obstaja zaporedje stopničastih funkcij $\{s_n\}$, ki konvergira k f. Naj bo $k = \frac{b-a}{n}$ in

$$s_n = f(a+k)\chi_{[a,a+k]} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+(i+1)k)\chi_{(a+ik,a+(i+1)k]}$$

Naj bo $\epsilon > 0$ fiksen. Ker je f na intervalu $[a,b]$ enakomerno zvezna, obstaja takšen $\delta > 0$, da je $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$, čim je $|x-y| < \delta$. Naj bo n tako velik, da je $\frac{b-a}{n} < \delta$. Potem je očitno $||f - s_n||_\infty < \epsilon$, saj je za vsak $t \in [a,b]$ razdalja do ustreznega krajišča podintervala manjša od δ. Torej zaporedje $\{s_n\}$ konvergira k f in f je integrabilna. □

Potrebovali bomo še nekaj lastnosti integrala.

Trditev 2.22. *Naj bo X Banachov prostor in funkcija $f : [a,b] \to X$ integrabilna ter $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Potem velja:*
a) $||I_{[a,b]}f|| \leq (b-a)||f||_\infty$.
b) $\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t$, *kjer velja* $\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Naj bo Y še en Banachov prostor in naj bo F zvezen linearni operator iz X v Y. Potem je tudi kompozitum $F \circ f$ integrabilna funkcija in velja

$$F\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b F\ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

d) Funkcija $t \to ||f(t)||$ je integrabilna in velja

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b ||f(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Dokaz. Prva točka je samo za posebni primer prepisan zadnji del izreka 2.13. Ker je zožitev stopničaste funkcije na podinterval spet stopničasta funkcija, je jasno, da je funkcija, ki je integrabilna na $[a,b]$, integrabilna tudi na vseh intervalih $[c,d] \subset [a,b]$, saj je njena zožitev na $[c,d]$ limita zožitev stopničastih funkcij, ki konvergirajo k njej, na $[c,d]$. Dokažimo drugo točko. Najprej vidimo, da se da enačbo, ki jo dokazujemo, vedno zapisati tako, da je na levi integral po največjem intervalu, na desni pa vsota ostalih dveh. Zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\alpha < \beta < \gamma$. Naj bo $s \in S([\alpha,\gamma],X)$. Definirajmo $s_1(t) = s \cdot \chi_{[\alpha,\beta]}(t)$ in $s_2(t) = s(t) \cdot \chi_{(\beta,\gamma]}(t)$. Funkciji s_1 in s_2 sta stopničasti in njuna vsota je enaka s. Zaradi linearnosti integrala je potem

$$\int_\alpha^\gamma s(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma s_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^\gamma s_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcija s_1 poleg ničle iz X zavzame še vrednosti, ki jih označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potem je po definiciji integrala stopničaste funkcije

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\gamma s_1(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot l(s_1^{-1}(x_i)) + 0 \cdot (\gamma - \beta) + 0 \cdot l(s_1^{-1}(0) \setminus [\beta,\gamma]) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot l(s_1^{-1}(x_i)) + 0 \cdot l(s_1^{-1}(0) \setminus [\beta,\gamma]) \\
&= \int_\alpha^\beta s_1(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

kjer smo pri zadnji enakosti upoštevali, da je na intervalu $[\alpha,\beta]$, $s_1 = s$. Podobno vidimo, da je tudi $\int_\beta^\gamma s(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\gamma s_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma s_2(t)\,\mathrm{d}t$. Tako smo dokazali želeno enakost za stopničaste funkcije. Če je $\{s_n\}$ zaporedje stopničastih funkcij, ki konvergira k f, je

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\gamma s_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta s_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma s_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta s_n(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty} \int_\beta^\gamma s_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

S tem je druga točka dokazana.

Za dokaz tretje točke najprej vidimo, da je zaradi linearnosti F enakost, ki jo dokazujemo, za stopničaste funkcije točna. Zaradi zveznosti F pa velja

$$\begin{aligned}\int_a^b F\ f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b F\circ s_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} F\left(\int_a^b s_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= F\left(\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = F\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

kjer je $\{s_n\}$ zaporedje, ki konvergira k f. Pri prvi in zadnji enakosti smo upoštevali zveznost operatorja $I_{[a,b]}$.

Za dokaz zadnje točke označimo za dano funkcijo g preslikavo $t \mapsto ||g(t)||$ z g^*. S temi oznakami se neenakost, ki jo dokazujemo, prepiše v $||\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t|| \leq \int_a^b f^*(t)\,\mathrm{d}t$. Naj bo $s(t) = \chi_{[t_0,t1]}(t)x_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)x_i$. Potem je $s^*(t) = \chi_{[t_0,t1]}(t)||x_0|| + \sum_{i=1}^{n-1}\chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)||x_i||$. Ker je funkcija f integrabilna, obstaja zaporedje stopničastih funkcij $\{s_n\}$, ki konvergira proti f v neskončni normi. Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za vsak $t \in [a,b]$ $||f(t) - s_n(t)|| < \epsilon$, čim je $n \geq n_0$. Za vsak par $x, y \in X$ velja $||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$ zato je $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$. Simetrično je $||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| = ||x - y||$, kar pomeni, da je $||x - y|| \geq |\ ||x|| - ||y||\ |$. Torej velja za vsak $t \in [a,b]$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ ocena $\epsilon > ||f(t) - s_n(t)|| \geq |\ ||f(t)|| - ||s_n(t)||\ |$. To pomeni, da $s_n^* \to f^*$ v neskončni normi, ko gre n proti neskončno. S tem smo dokazali, da je f^* integrabilna. Za stopničaste funkcije se dokazovana neenakost prevede v trikotniško neenakost in zato velja. Zaporedje $\{||\int_a^b s_n(t)\,\mathrm{d}t||\}$ konvergira proti $||\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t||$ in po prejšnjem tudi $\int_a^b s_n^*(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b f^*(t)\,\mathrm{d}t$. Ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$ $||\int_a^b s_n(t)\,\mathrm{d}t|| \leq \int_a^b s_n^*(t)\,\mathrm{d}t$, je potem tudi $||\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t|| \leq \int_a^b f^*(t)\,\mathrm{d}t$. □

Zadnji cilj tega razdelka je dokazati Newton-Leibnizovo formulo. Izpeljali jo bomo le za zvezne funkcije, saj jo bomo tudi v nadaljevanju uporabljali le zanje. V ta namen bomo potrebovali definicijo odvedljivosti funkcije, ki slika iz realnih števil v Banachov prostor, in eno lemo.

Definicija 2.23. Naj bo X Banachov prostor in $f : (a,b) \to X$. Funkcija f je *odvedljiva* v točki $t \in (a,b)$ natanko tedaj, ko obstaja limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Funkcija f je odvedljiva na intervalu (a,b) natanko tedaj, ko je odvedljiva v vseh točkah tega intervala. Odvod bomo označili s $\dot{f}$.

Tako kot za realne funkcije tudi tukaj velja, da je vsaka odvedljiva funkcija tudi zvezna.

Trditev 2.24. *Naj bo X Banachov prostor in $f : (a,b) \to X$ odvedljiva v točki $t \in (a,b)$. Potem je f zvezna v točki t.*

Dokaz. Velja

$$\left\|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right\| = \left\|\dot{f}(t) + \frac{o(h)}{h}\right\|$$

pri čemer mora biti $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0 \in X$, saj je limita izraza na levi, ko gre h proti nič, ravno norma odvoda f v točki t. Zgornjo enakost pomnožimo na obeh straneh s $|h|$, upoštevamo trikotniško neenakost in dobimo

$$||f(t+h) - f(t)|| \leq ||\dot{f}(t)|| \cdot |h| + ||o(h)||.$$

Vzemimo $\epsilon > 0$. Ker je

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{|h|} = 0,$$

mora biti tudi $\lim_{h\to 0} ||o(h)|| = 0$. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $||o(h)|| < \frac{\epsilon}{2}$, čim je $|h| < \delta$. Če torej izberemo takšen h, da je $|h| < \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2\cdot ||\dot{f}(t)||}\}$, je $||f(t+h) - f(t)|| < \epsilon$. □

Lema 2.25. *Naj bo X Banachov prostor in $f : [a,b] \to X$ zvezna funkcija, za katero povsod na intervalu (a,b) obstaja odvod $\dot{f}$, ki je povsod enak 0. Potem je f konstanta.*

Dokaz. Izberimo $\epsilon > 0$ in $\alpha \in (a,b)$. Po definiciji odvoda obstaja za vsak $\tau \in (a,b)$ takšen $\delta_\tau > 0$, da je

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t-\tau} - \dot{f}(\tau) \right\| < \epsilon,$$

čim je $|t-\tau| < \delta_\tau$. Potem velja za vsak t, za katerega je $|t-\tau| < \delta_\tau$,

$$||f(t) - f(\tau)|| = ||f(t) - f(\tau) - (t-\tau)\dot{f}(\tau)|| < |t-\tau|\epsilon, \tag{2}$$

saj je $\dot{f}(\tau) = 0$.

Naj bo $A = \{t \in [\alpha, b]; ||f(t) - f(\alpha)|| \leq (t-\alpha)\epsilon\}$ in $t_0 = \sup A$. Enačba (2) za $\tau = \alpha$ zagotavlja, da je $t_0 > \alpha$. Zaradi zveznosti f je jasno tudi, da je $t_0 \in A$. Da bomo dobili protislovje, predpostavimo, da je $t_0 < b$. Izberimo $t \in (t_0, t_0 + \delta_{t_0})$. Potem, z upoštevanjem enačbe (2) in dejstva, da je $t_0 \in A$, izhaja

$$\begin{aligned} ||f(t) - f(\alpha)|| = ||f(t) - f(t_0) + f(t_0) - f(\alpha)|| &\leq ||f(t) - f(t_0)|| + ||f(t_0) - f(\alpha)|| \\ &< (t-t_0)\epsilon + (t_0 - \alpha)\epsilon = (t-\alpha)\epsilon, \end{aligned}$$

kar je v nasprotju s tem, da je t_0 zgornja meja množice A. Tako lahko za poljuben $\alpha \in (a,b)$ ter $\epsilon > 0$ trdimo, da je za vsak $t \in [\alpha, b]$ $||f(t) - f(\alpha)|| \leq (t-\alpha)\epsilon \leq (b-\alpha)\epsilon$. Ko pošljemo ϵ proti nič, dobimo, da je za poljuben $\alpha \in (a,b)$ za vsak $t \in [\alpha, b].||f(t) - f(\alpha)|| = 0$. Zaradi zveznosti f lahko pošljemo α proti nič, in dobimo, da za vsak $t \in [a,b]$ velja $||f(t) - f(a)|| = 0$, kar smo želeli dokazati. □

Izrek 2.26 (Osnovni izrek integralskega računa)**.** *Naj bo X Banachov prostor.*

a) Naj bo f zvezna funkcija iz $[a,b]$ v X. Potem je za vsak $t \in (a,b)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t).$$

b) Naj bo F zvezna funkcija iz $[a,b]$ v X, ki je zvezno odvedljiva na (a,b). Potem velja

$$\int_a^b \dot{F}(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Dokažimo najprej prvo točko. Naj bo $h > 0$. Potem je

$$\left\| \int_a^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s - h \cdot f(t) \right\|$$

$$= \left\| \int_t^{t+h} (f(s) - f(t))\, \mathrm{d}s \right\| \le \int_t^{t+h} ||f(s) - f(t)||\, \mathrm{d}s \le h \cdot \max_{s\in[t,t+h]} ||f(s) - f(t)||$$

Podobno vidimo za $h < 0$

$$\left\| \int_a^{t+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \int_a^t f(s)\, \mathrm{d}s - h \cdot f(t) \right\| = \left\| \int_{t+h}^t (f(s) - f(t))\, \mathrm{d}s \right\|$$

$$\le \int_{t+h}^t ||f(s) - f(t)||\, \mathrm{d}s \le -h \cdot \max_{s\in[t+h,t]} ||f(s) - f(t)||$$

Tako vidimo, da velja za dovolj majhne $h \in \mathbb{R}$

$$\left\| \int_a^{t+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \int_a^t f(s)\, \mathrm{d}s - h \cdot f(t) \right\| \le |h| \cdot \max_{s\in[t-|h|,t+|h|]} ||f(s) - f(t)||$$

Obe strani delimo s $|h|$ in pošljemo h proti 0. Na desni strani dobimo 0 zaradi zveznosti f, kar pomeni, da odvod obstaja in je enak $f(t)$. S tem je prva točka dokazana.

Za dokaz druge točke postavimo $G(t) = \int_a^t \dot{F}(s)\, \mathrm{d}s - F(t)$. Potem je po prvi točki funkcija G odvedljiva in njen odvod je povsod enak 0. Po lemi 2.25 je potem $-F(a) = G(a) = G(b) = \int_a^b \dot{F}(s)\, \mathrm{d}s - F(b)$. Tako smo dokazali tudi drugo točko. □

3. Krepka zveznost in omejenost

V tem razdelku bomo definirali krepko zvezne polgrupe, navedli izreke za preverjanje krepke zveznosti in pokazali, da so krepko zvezne polgrupe po normi omejene z eksponentno funkcijo. Vira za ta razdelek sta [3], prvo poglavje in [6] razdelek 9.1.

Na vprašanje, kdaj je enoparametrična polgrupa rešitev naloge (1), se da enostavno odgovoriti le v primeru, ko je polgrupa $T(t)$ krepko zvezna v smislu naslednje definicije.

Definicija 3.1. Zvezna funkcija $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$, kjer je $\mathcal{L}(X)$ prostor zveznih linearnih operatorjev, ki slikajo iz X v X, opremljen s topologijo konvergence po točkah, je *krepko zvezna*. Za družino funkcij $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ rečemo, da je krepko zvezna, če je krepko zvezna preslikava $t \mapsto T(t)$.

To je isto, kot če je za vsak $x \in X$ preslikava $\xi_x : t \to T(t)x$ zvezna kot preslikava iz $\mathbb{R}_+$ v X. Za odprto množico $O \subset X$ namreč velja $\xi_x^{-1}(O) = T^{-1}(\{f \in \mathcal{L}(X); f(x) \in O\})$.

Zgornjo ugotovitev povzame definicija:

Definicija 3.2. Družina omejenih linearnih operatorjev $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ na Banachovem prostoru X je *enoparametrična krepko zvezna polgrupa*, če je krepko zvezna in za vsak par $t, s \in \mathbb{R}_+$ velja:

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s) \\ T(0) &= \mathrm{Id} \end{aligned} \tag{3}$$

Primer krepko zvezne polgrupe je družina operatorjev, ki funkcijo premaknejo na levo.

Primer 3.3. Množica

$$X = \{f \in C([0, \infty)); \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$$

je Banachov prostor za normo $||f||_X = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)|$. Na njem definiramo družino preslikav

$$(T(t)f)(x) = f(x+t).$$

Družina $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ očitno izpolnjuje lastnost (3). Vsak premik normo premaknjene funkcije kvečjemu zmanjša, na konstantni funkciji pa jo ohranja. Zato za vsak $t \geq 0$ velja $||T(t)|| = 1$ in vsi operatorji v $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ so omejeni. Potrebno je samo še videti, da je za vsak $f \in X$ preslikava $g_f : [0,\infty) \to X$, $g_f : t \mapsto (x \mapsto f(t+x))$ zvezna. Dovolj je, da je f enakomerno zvezna.

Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Ker je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

obstaja $a > 0$, da je

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

čim je $x > a$. Če sta torej u in v večja od a, je $|f(u) - f(v)| \leq |f(u)| + |f(v)| = \epsilon$. Zaradi zveznosti f je f na kompaktni množici $[0, a+1]$ enakomerno zvezna. Zato obstaja $\delta > 0$, da je

$$\forall u, v \in [0, a+1]. |u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \epsilon$$

Ta delta je potem dober za cel interval $[0, \infty)$.

Najprej bomo potrebovali nekaj izrekov za preverjanje krepke zveznosti.

Lema 3.4. *Naj bo X Banachov prostor, $K \subset \mathbb{R}$ kompaktna množica in $\{T(t)\}_{t\in K} \subset \mathcal{L}(X)$ družina linearnih operatorjev. Potem so ekvivalentne trditve:*

a) $\{T(t)\}_{t\in K}$ je krepko zvezna.

b) Za vsak $t \in K$ je norma $||T(t)||$ končna in preslikave $K \to X$, $t \mapsto T(t)x$ so zvezne za vsak $x \in D$, kjer je D povsod gosta množica v X.

c) Funkcija $K \times C \to X$, $(t, x) \mapsto T(t)x$ je enakomerno zvezna za vsako kompaktno podmnožico $C \subset X$.

Dokaz. Ker so točke vedno kompaktne, je očitno, da iz c) sledi a). Ob predpostavki, da velja a), so zaradi krepke zveznosti T preslikave $t \mapsto T(t)x$ zvezne za vsak $x \in X$. Ker je K kompaktna množica, so omejene. Zato je po principu enakomerne omejenosti (izrek 2.8) družina $\{T(t)\}_{t\in K}$ omejena po normi. Tako smo dokazali, da iz a) sledi b). Potrebno je videti še, da iz b) sledi c).

Naj bo $M \geq ||T(t)||$ za vsak $t \in K$, $\epsilon > 0$ in C kompaktna podmnožica v X. Potem obstaja končno mnogo točk $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$, tako da je

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} K\left(x_i, \frac{\epsilon}{M}\right).$$

Izberimo takšen $\delta > 0$, da je za vsak $i = 1, 2 \ldots, n$ in za vsak par $s, t \in K. |t - s| < \delta$ razdalja $||T(t)x_i - T(s)x_i||$ manjša od ϵ. Takšen δ obstaja, ker so preslikave $t \mapsto T(t)x$ po predpostavki b) zvezne za vsak $x \in D$. Naj bo $x \in C$ poljuben. Potem obstaja takšen j med 1 in n, da je $||x - x_j|| < \frac{\epsilon}{M}$. Ocenimo za $|t - s| < \delta$ in $||x - y|| \leq \frac{\epsilon}{M}$:

$$||T(s)x - T(t)y|| = ||T(s)(x - x_j) + T(s)x_j - T(t)x_j - T(t)(x - x_j) + T(t)(x - y)|| \leq$$

$$\leq ||T(s)(x - x_j)|| + ||T(s)x_j - T(t)x_j|| + ||T(t)(x - x_j)|| + ||T(t)(x - y)|| \leq$$

$$\leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} + \epsilon + M \cdot \frac{\epsilon}{M} + M \cdot \frac{\epsilon}{M} = 4\epsilon$$

Torej je $(t, x) \mapsto T(t)x$ res enakomerno zvezna. □

Kot posledico te leme dobimo z upoštevanjem lastnosti (3) šibkejše pogoje za preverjanje krepke zveznosti.

Trditev 3.5. *Za družino operatorjev $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, ki ima lastnost (3), so ekvivalentne trditve:*

a) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *je krepko zvezna polgrupa.*
b) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *za vsak* $x \in X$.
c) Obstajajo $\delta > 0$, $M \geq 1$ *in povsod gosta množica* $D \subset X$, *tako da velja:*
  i) $||T(t)|| \leq M$ *za vsak* $t \in [0, \delta]$,
  ii) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *za vsak* $x \in D$.

Dokaz. Najprej dokažemo, da iz a) sledi c). Ker je operator T krepko zvezen za vse $x \in X$ velja $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$. Drugi del c) je s tem dokazan. Prvi del pa dokažemo s protislovjem. Recimo, da za vsak $\delta > 0$ in za vsak $M \geq 1$ obstaja $t \in [0, \delta]$, da je $||T(t)|| > M$. To pomeni, da obstaja zaporedje $\{t_n\}$, ki gre proti 0, ko gre n proti neskončno, za katero gre $\lim_{n\to\infty} ||T(t_n)||$ proti neskončno. Po principu enakomerne omejenosti 2.8 mora zato obstajati $x \in X$ za katerega je $\lim_{n\to\infty} ||T(t_n)x|| = \infty$, kar pa je v nasprotju z zveznostjo T v ničli ($||x||$ je končna za vsak x).

Za dokaz c) $\Rightarrow$ b) označimo s K zaporedje nenegativnih števil $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira k 0. Potem je $K \cup \{0\}$ kompaktna množica, $T|_K$ je omejena po operatorski normi zaradi c.i (izven intervala $[0, \delta]$ je končno mnogo členov zaporedja $\{t_n\}$). Zaradi c.ii, pa je $T(\cdot)|_K x$ zvezna v 0 za $x \in D$, ostale točke K pa so izolirane, zato je $T(\cdot)|_K x$ zvezna za vse $x \in D$. Zato je zaradi ekvivalence izjav a) in b) v lemi 3.4 limita $\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x$ za vsak $x \in X$. Ker je bilo zaporedje $\{t_n\}$ poljubno, to pomeni, da je za vsak $x \in X$ in za vsako zaporedje $\{s_n\}$ nenegativnih števil, ki konvergira k 0, $\lim_{n\to\infty} T(s_n)x = x$, kar pa že implicira b).

Preverimo še, da iz b) sledi a). Naj bo $t_0 > 0$ in $x \in X$. Potem je

$$\lim_{h\downarrow 0} ||T(t_0 + h)x - T(t_0)x|| \leq ||T(t_0)|| \cdot \lim_{h\downarrow 0} ||T(h)x - x|| = 0$$

dokaz za zveznost z desne v točki t_0. Zveznost z leve dobimo iz ocene, da je za $h < 0$:

$$||T(t_0 + h)x - T(t_0)x|| = ||T(t_0 + h)(x - T(-h)x)|| \leq ||T(t_0 + h)|| \cdot ||x - T(-h)x||$$

Če je torej $||T(t)||$ končna na intervalu $[0, t_0]$, je zveznost z leve že dokazana. Ker je po predpostavki $\lim_{t\downarrow 0} ||T(t)x|| = ||x||$, obstaja $\delta > 0$, da je $||T(t)x||$ končno za vse $x \in X$ in za vse $t \in [0, \delta]$. Potem je po principu enakomerne omejenosti (izrek 2.8) tudi $||T(t)||$ končna za vse $t \in [0, \delta]$. Naj bo M zgornja meja za $\{||T(t)||\}_{t\in[0,\delta]}$ in $s \in [0, t_0]$ poljuben. Potem je

$$||T(s)|| = \left\| T\left(\left\lfloor \frac{s}{\delta} \right\rfloor \cdot \delta + \varphi \right) \right\|,$$

kjer je $\varphi < \delta$. Zato je

$$||T(s)|| \leq ||T(\delta)||^{\lfloor \frac{s}{\delta} \rfloor} \cdot ||T(\varphi)|| < M^{\lfloor \frac{s}{\delta} \rfloor + 1}.$$

S tem smo dokazali tudi zveznost z leve. □

Na koncu zadnjega dokaza smo ocenili $||T(s)||$ z eksponentno funkcijo za kar smo potrebovali le, da je $||T(s)||$ omejena na nekem začetnem intervalu $[0, \delta]$. Za krepko zvezno polgrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ je za vsak $x \in X$ preslikava $t \mapsto T(t)x$ zvezna. To pomeni, da je za vsak $x \in X$ množica $\{T(t)x; t \in [0, 1]\}$ kompaktna in zato omejena. Potem po principu enakomerne omejenosti (2.8) obstaja $M \geq 1$ (manjši od ena ne more biti, saj je $||T(0)|| = ||\operatorname{Id}|| = 1$), tako da je $||T(t)|| \leq M$ za vse $t \in [0,1]$; na enak način kot prej lahko torej za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ ocenimo, da je

$$||T(t)|| \leq M \cdot M^{\lfloor t \rfloor} = M \cdot \mathrm{e}^{\ln M \cdot \lfloor t \rfloor} \leq M \cdot \mathrm{e}^{\omega t},$$

kjer je $\omega = \ln M$. Dokazali smo

Trditev 3.6. *Naj bo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa. Potem obstajata števili $M \geq 1$ in $\omega \in \mathbb{R}$, da velja $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$.*

Sedaj lahko definiramo:

Definicija 3.7. Za dano krepko zvezno polgrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ označimo

$$\omega_T = \inf\{\omega \in \mathbb{R}; \exists M_\omega \geq 1. ||T(t)|| \leq M_\omega \mathrm{e}^{\omega t}\}$$

Če je $\omega_T \leq 0$, pravimo, da je polgrupa *omejena*; če je $\omega_T \leq 0$ in če smemo vzeti $M = 1$, potem so vsi elementi polgrupe skrčitve in rečemo, da je polgrupa *skrčitvena*. V primeru ko za vsako izbiro $t \in \mathbb{R}_+$ in $x \in X$ velja $||T(t)x|| = ||x||$, je polgrupa *izometrična*.

Naslednji primer podaja polgrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, za katero je $\omega_T = -\infty$.

Primer 3.8. Naj bo $X = \{f \in C(-\infty, 0]; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\}$. Potem je X Banachov prostor za supremum normo (limita enakomerno Cauchyjevega zaporedja je zvezna). Definirajmo družino funkcij $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ na X

$$(T(t)f)(x) = \mathrm{e}^{-t^2+2tx} f(x-t)$$

Preverimo najprej, da je $T(t+s) = T(t)T(s)$.

$$(T(t+s)f)(x) = \mathrm{e}^{-(t+s)^2+2x(t+s)} f(x-(t+s))$$

Po drugi strani je

$$(T(t)(T(s)f))x = \mathrm{e}^{-t^2+2tx} \cdot \mathrm{e}^{-s^2+2s(x-t)} f((x-s)-t) = \mathrm{e}^{-t^2-2st-s^2+2x(t+s)} f(x-(t+s))$$

Torej $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ izpolnjuje lastnost (3). Krepko zveznost dokažemo podobno kot v primeru 3.3.

Prepričajmo se, da je res $\omega_T = -\infty$. Norma $||T(t)||$ je enaka

$$||T(t)|| = \sup_{||f||_X=1} ||\mathrm{e}^{-t^2+2tx} f(x-t)||_X \leq \sup_{||f||_X=1} \sup_x |\mathrm{e}^{-t^2+2tx}| \cdot 1 = \mathrm{e}^{-t^2}$$

Naj bo ω poljubno realno število. Velja $\omega_T < \omega$, če lahko najdemo takšen M, da za vsak $t \geq 0$ velja $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Upoštevajoč zadnje tri vrstice se to prevede v zahtevo

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$$

Logaritmiramo obe strani te neenačbe in dobimo:

$$-t^2 \leq \ln M + \omega t \Rightarrow t^2 + \omega t + \ln M \geq 0$$

za vsak $t \geq 0$. To pa pomeni, da mora biti $\omega^2 - 4\ln M < 0$ oziroma

$$M > \mathrm{e}^{\frac{\omega^2}{4}}.$$

Torej lahko za vsak ω izberemo takšen $M \geq 1$, da je $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ in zato je $\omega_T = -\infty$.

4. Generator krepko zvezne polgrupe

V tem razdelku bomo definirali generator krepko zvezne polgrupe in dokazali nekaj njegovih lastnosti. Vira za ta razdelek sta [3] drugo poglavje, [6] razdelka 1.8 in 9.3.

Lema 4.1. *Naj bo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa, X Banachov prostor in $x \in X$ poljuben. Potem je funkcija $\xi_x : t \mapsto T(t)x$ odvedljiva natanko tedaj, ko je z desne odvedljiva v 0 in velja $\dot{\xi}_x(t) = T(t)\dot{\xi}_x(0)$, kjer $\dot{\xi}_x(0)$ označuje desni odvod funkcije $\xi_x(t)$ v 0.*

Dokaz. Če je funkcija povsod odvedljiva potem je odvedljiva tudi v 0. V nasprotno smer je odvedljivost z desne za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ jasna iz

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t) \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)x - T(0)x}{h}.$$

Naj bo $t > 0$ in $h < 0$, $-h < t$. Potem velja

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)\dot{\xi}_x(0) = \lim_{h\uparrow 0} T(t+h) \left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - \dot{\xi}_x(0) \right) + \\ + \lim_{h\uparrow 0} T(t+h)\dot{\xi}_x(0) - T(t)\dot{\xi}_x(0)$$

Prvi člen na desni strani gre proti 0, saj je $||T(t+h)||$ končno za vse h, ostanek pa gre proti nič zaradi krepke zveznosti. □

Za tiste $x \in X$, za katere obstaja desni odvod funkcije ξ_x v 0, oziroma je zanje funkcija $\xi_x(t)$ odvedljiva na $\mathbb{R}_+$, lahko potem definiramo linearen operator A, $Ax = \dot{\xi}_x(0)$. Linearnost A je očitna iz linearnosti limite.

Definicija 4.2. *Generator* krepko zvezne polgrupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ je linearen operator $A : D(A) = \{x \in X; \exists \dot{\xi}_x(0)\} \to X$, $Ax = \dot{\xi}_x(0)$.

Naštejmo nekaj lastnosti generatorja:

Lema 4.3. *Za generator A krepko zvezne polgrupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ velja:*

(1) Če je $x \in D(A)$, je tudi $T(t)x \in D(A)$ in velja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

(2) Za vsak $t \geq 0$ in $x \in X$ je

$$\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s \in D(A)$$

(3) Za vsak $t \geq 0$ je za vsak $x \in X$

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s; \tag{4}$$

če je $x \in D(A)$, je desna stran (4) dalje enaka

$$\int_0^t T(s)Ax \, \mathrm{d}s.$$

Dokaz. Dokažimo najprej prvo točko. Naj bo $x \in D(A)$. Potem po lemi 4.1 obstaja

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}$$

Na desni strani imamo odvod funkcije $s \mapsto T(s)(T(t)x) = \xi_{T(t)x}(s)$. Po definiciji generatorja je torej $T(t)x \in D(A)$ in $AT(t)x = T(t)Ax$.

Točki 2 in 3 dokažemo hkrati. Naj bo $x \in X$ in $t \geq 0$. Diferenčni kvocient funkcije

$$u \mapsto T(u) \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s$$

je enak

$$\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s\right). \tag{5}$$

Po trditvi 2.22 je to enako

$$\frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s,$$

kar je po substituciji $u = s + h$ v prvem členu enako

$$\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x \, \mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x \, \mathrm{d}s \tag{6}$$

Ko gre $h \downarrow 0$, gre (6) proti $T(t)x - x$. To pomeni, da obstaja ista limita tudi v izrazu (5) in je po definiciji generatorja enaka

$$A\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s$$

S tem sta že dokazana druga točka in prvi del tretje točke.

Potrebno je pokazati še drugi del tretje točke. Ker $T(h)$ in $T(s)$ komutirata za vsak $t, s \in \mathbb{R}_+$, je z upoštevanjem tretje točke trditve 2.22

$$A\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T(h) - \mathrm{Id})\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = \lim_{h\downarrow 0}\int_0^t T(s)\frac{T(h)x - x}{h} \, \mathrm{d}s$$

Velja:

$$\left\|\int_0^t T(s)\frac{T(h)x - x}{h} \, \mathrm{d}s - \int_0^t T(s)Ax \, \mathrm{d}s\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^t T(s)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) \mathrm{d}s\right\| \leq \int_0^t ||T(s)|| \left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \mathrm{d}s$$

Naj bo M zgornja meja $||T(s)||$ na intervalu $[0, t]$ (obstaja po trditvi 3.6). Ker je $x \in D(A)$, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je

$$\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| < \frac{\epsilon}{tM}$$

čim je $h < \delta$. Za $h < \delta$ je torej

$$\int_0^t ||T(s)|| \left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \mathrm{d}s < \int_0^t \frac{\epsilon}{t} \, \mathrm{d}s = \epsilon$$

S tem je dokazan tudi drugi del tretje točke. $\square$

Čeprav generator krepko zvezne polgrupe v splošnem ni zvezen, ima nekaj lepih lastnosti.

Trditev 4.4. *Generator krepko zvezne polgrupe na Banachovem prostoru X je zaprt, njegovo definicijsko območje je povsod gosto v X in vsaki dve različni polgrupi imata različna generatorja.*

Dokaz. Naj bo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa na Banachovem prostoru X. Pokažimo najprej, da je njen generator A zaprt. Vzemimo zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ za katero obstaja limita $\lim_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (x, y) \in X \times X$. Po tretji točki leme 4.3 je za vse n in $t > 0$

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \,\mathrm{d}s$$

Ker je

$$\left\| \int_0^t T(s)Ax_n \,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_0^t ||T(s)|| \; ||Ax_n - y|| \,\mathrm{d}s$$

in ker je $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$, lahko podobno kot v zadnjem delu dokaza leme 4.3 vidimo, da je

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s.$$

Ko obe strani te enakosti pomnožimo z $\frac{1}{t}$ in pošljemo t z desne proti 0, dobimo, da je $x \in D(A)$ in da je $Ax = y$, torej je (x, y) v grafu A in je zato A zaprt.

Po drugi točki leme 4.3 je za vsak $t > 0$ in $x \in X$

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s \in D(A).$$

Ker je

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s = x,$$

je množica $D(A)$ povsod gosta v X.

Za izpeljavo zadnjega dela predpostavimo, da je $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ krepko zvezna polgrupa na X, katere generator je prav tako A. Oglejmo si preslikavo $s \mapsto \eta_x(s) = T(t-s)S(s)x$ za $x \in D(A)$, $t > 0$ in $0 \leq s < t$. Za fiksna $s \in \mathbb{R}_+$ in $x \in X$ je funkcija

$$h \mapsto \begin{cases} \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} & \text{če je } h > 0 \\ AS(s)x & \text{če je } h = 0 \end{cases}$$

zvezna po lemi 4.3. Ker je množica

$$C = \left\{ \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}; h \in (0, 1] \right\} \cup \{AS(s)x\}$$

slika intervala $[0, 1]$ z zgornjo funkcijo, je kompaktna. Velja

$$\frac{\eta_x(s+h) - \eta_x(s)}{h} = T(t-s-h)\frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} + \frac{T(t-s-h) - T(t-s)}{h}S(s)x$$

Po zadnji točki leme 3.4 in po prvi točki leme 4.3 gre prvi člen na desni, ko gre h proti 0, proti $T(t-s)A\;S(s)x$. Drugi člen gre po lemi 4.3 proti $-AT(t-s)S(s)x$. Zopet po lemi 4.3 je vsota teh dveh členov enaka 0. Ker je $\eta_x(0) = T(t)x$ in $\eta_x(t) = S(t)x$ je za vsak $x \in D(A)$ in za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ $S(t)x = T(t)x$. Ker je množica $D(A)$ povsod gosta in ker sta za vsak t operatorja $S(t)$ in $T(t)$ zvezna, je $T(t)x = S(t)x$ za vsak x, torej sta polgrupi $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ in $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ enaki. $\square$

5. V normi zvezne polgrupe

Vira za ta razdelek sta [6], razdelki 9.2, 9.6, 9.7 in [3], drugo poglavje. Naj bo X Banachov prostor. Prostor $\mathcal{L}(X)$ zveznih linearnih operatorjev, ki slikajo iz X v X, opremimo z operatorsko normo. Oglejmo si Cauchyjevo zaporedje $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X)$. Ker je za $x \in X$

$$||(A_n - A_m)x|| \leq ||A_n - A_m|| \, ||x|| \tag{7}$$

je za vsak $x \in X$ zaporedje $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo in zato obstaja limita $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$. Operator A je očitno linearen in za vsak $\epsilon > 0$ je za dovolj velika n in m desna stran v (7) manjša ali enaka $\epsilon||x||$. Pošljemo n proti neskončno in vidimo, da za dovolj velik m velja $||Ax - A_m x|| \leq \epsilon||x||$, kar pomeni, da $A_m \to A$ v normi in da je za vsak $x \in X$ $||Ax|| \leq (||A_m|| + \epsilon)||x||$. Od tod vidimo, da je A omejen in zato zvezen operator. Tako smo pokazali, da je $\mathcal{L}(X)$ opremljen z operatorsko normo Banachov prostor. Označimo ga z $\mathcal{B}(X)$.

Zaostrimo zahtevo iz definicije krepko zveznih polgrup in namesto krepke zveznosti za družino $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, zahtevajmo zveznost preslikave $t \mapsto T(t)$ kot preslikave iz $\mathbb{R}_+$ v $\mathcal{B}(X)$. Dobili smo poseben primer krepko zveznih polgrup, ki pa je zelo pomemben. Zaradi njegovih lepih lastnosti si bomo z njim pomagali pri generiranju splošnih krepko zveznih polgrup.

Izrek 5.1. *Naj bo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ glede na operatorsko normo zvezna polgrupa. Potem je njen generator povsod definiran in zvezen.*

Dokaz. Ker je $s \mapsto T(s)$ zvezna funkcija iz $\mathbb{R}_+$ v Banachov prostor $\mathcal{B}(X)$, za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ obstaja zvezno odvedljiva funkcija $V(t) = \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s$ in $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} V(t) = \mathrm{Id}$. Če je torej $t_0 > 0$ dovolj majhen, velja

$$\left\| \frac{V(t_0)}{t_0} - \mathrm{Id} \right\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left\| \frac{V(t_0)x}{t_0} - x \right\| < \frac{1}{2}||x|| \Rightarrow \left\| \frac{V(t_0)x}{t_0} \right\| > \frac{1}{2}||x|| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ||V(t_0)x|| > \frac{1}{2} t_0 ||x||$$

Desna stran zadnje neenakosti je večja od nič, kakor hitro je $x \neq 0$, kar pomeni, da je linearna preslikava $V(t_0)$ injektivna, zato obstaja levi inverz $V(t_0)^{-1}$ preslikave $V(t_0)$. Za poljuben $t \in \mathbb{R}_+$ je

$$T(t) = V(t_0)^{-1} V(t_0) T(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(s)T(t)\,\mathrm{d}s = V(t_0)^{-1} \int_t^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= V(t_0)^{-1}[V(t+t_0) - V(t)]$$

Funkcija $t \mapsto V(t_0)^{-1}[V(t+t_0) - V(t)]$ je zvezno odvedljiva, saj je $t \mapsto T(t)$. Zato je funkcija $t \mapsto T(t)$ tudi zvezno odvedljiva glede na operatorsko normo za vsak $t \geq 0$. Njen odvod mora biti zaradi linearnosti enak $\dot{T}(0)T(t)$. Potem pa je $\dot{T}(0)$ generator te polgrupe, ki je očitno zvezen in povsod definiran. □

Naj bo A generator glede na operatorsko normo zvezne polgrupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Videli smo, da potem velja $\dot{T}(t) = AT(t)$. Naivno bi si rešitev te enačbe predstavljali kot $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Ker je operator A omejen, lahko definiramo:

Definicija 5.2. *Eksponentno funkcijo* operatorja definiramo z vrsto:

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Vrsta norm členov vrste na desni strani konvergira k $\mathrm{e}^{t||A||}$ za vsak $t \geq 0$, če vzamemo $A^0 = \mathrm{Id}$. Zato lahko kompozitum $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}$ izračunamo kot Cauchyjev produkt vrst:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j A^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{t^{n-m} A^{n-m}}{(n-m)!} \frac{s^m A^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!}$$

S tem smo pokazali, da za vsako družino funkcij $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, podano s predpisom $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$, velja lastnost (3) iz definicije krepko zvezne polgrupe. Ker velja

$$||\mathrm{e}^{hA} - I|| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n \, ||A||^n}{n!} = \mathrm{e}^{|h| \, ||A||} - 1,$$

kar gre proti nič, ko gre $h \to 0$, je

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA} = \lim_{h \to 0} (\mathrm{e}^{hA} - I)\mathrm{e}^{tA} = 0$$

in posledično je preslikava $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ zvezna. S tem smo pokazali prvi del sledeče trditve.

Trditev 5.3. *Naj bo A zvezen linearni operator na Banachovem prostoru X in $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ družina funkcij na X, podana s predpisom $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Potem je $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ glede na operatorsko normo zvezna polgrupa in njen generator je A.*

Dokaz. Pokazati moramo še, da je A generator te polgrupe, torej da je desni odvod funkcije $t \mapsto T(t)$ v 0 enak A. To pa je res, saj

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^{i-1} A^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|h|^{i-1} \, ||A||^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{|h| \, ||A||} - 1}{|h|} - ||A|| \to 0,$$

ko gre $h \downarrow 0$. □

Posledica te trditve je, da je vsaka polgrupa, ki ima povsod definiran generator, zvezna v normi. Povsod definiran generator A je namreč po izreku o zaprtem grafu zvezen, kar pa pomeni, da je polgrupa, ki jo generira oblike $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t \geq 0}$.

Da bo opis v normi zveznih polgrup popoln, je potrebno videti še, da so vse v normi zvezne polgrupe te oblike. To pa je jasno, saj generator enolično določa polgrupo, ki ji pripada. Če je torej $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ v normi zvezna polgrupa je njen generator enak $\dot{T}(0)$, hkrati pa je po prejšnji trditvi $\dot{T}(0)$ tudi generator polgrupe $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t \geq 0}$, če je $A = \dot{T}(0)$. Od tod sledi trditev, s katero smo dokončno klasificirali krepko zvezne polgrupe.

Trditev 5.4. *Naj bo X Banachov prostor in $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ v normi zvezna operatorska polgrupa na njem. Potem je $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$, kjer je $A = \dot{T}(0)$.*

6. Resolventa generatorja krepko zvezne polgrupe

V tem razdelku definiramo resolvento zaprtega linearnega operatorja in si ogledamo lastnosti resolvent generatorjev krepko zveznih polgrup. Pomembne so predvsem ocene za normo resolvente, ki jih bomo potrebovali v naslednjem poglavju. Vira za ta razdelek sta [6], razdelki 8.1, 9.4 in [3], drugo poglavje razdelek 5.1.

Definicija 6.1. *Resolventna množica* zaprtega linearnega operatorja A na Banachovem prostoru X je množica $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \,\mathrm{Id} - A$ ima za sliko ves X, obstaja zvezen inverz $(\lambda \,\mathrm{Id} - A)^{-1}\}$. Za vsak $\lambda \in \rho(A)$ označimo inverz preslikave $\lambda \,\mathrm{Id} - A$ z

$R(\lambda, A)$ in mu rečemo *resolventa. Spekter* $\sigma(A)$ operatorja A je komplement množice $\rho(A)$.

Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ in $S(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)$, kjer je $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa operatorjev na Banachovem prostoru X z generatorjem A. Potem je tudi $S(t)$ krepko zvezna polgrupa. Za $x \in D(A)$ velja

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x - x}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}x - x}{t} =$$

$$= Ax - \lambda x \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} - 1}{-\lambda t} = Ax - \lambda x$$

Torej je generator polgrupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ enak $A - \lambda \operatorname{Id}$ in njegovo definicijsko območje je enako $D(A)$. Če to vstavimo v 4.3, dobimo lemo, ki jo bomo potrebovali za dokaz nekaterih lastnosti spektra in resolvente generatorjev krepko zveznih polgrup.

Lema 6.2. *Naj bo A generator krepko zvezne polgrupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ operatorjev na Banachovem prostoru X. Potem za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > 0$ in $x \in X$ velja*

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x - x = (A - \lambda \operatorname{Id}) \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x \,\mathrm{d}s.$$

Če pa je $x \in D(A)$, je zgornji izraz enak

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)(A - \lambda \operatorname{Id})x \,\mathrm{d}s.$$

Izrek 6.3. *Naj bo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa na Banachovem prostoru X in naj bosta konstanti $\omega \in \mathbb{R}$ in $M \geq 1$ takšni, da je $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ za vsak $t \geq 0$. Potem držijo sledeče trditve o generatorju A polgrupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

a) Če je $\lambda \in \mathbb{C}$ takšen, da obstaja $R_T(\lambda)x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x \,\mathrm{d}s$ za vse $x \in X$, je $\lambda \in \rho(A)$ in $R(\lambda, A) = R_T(\lambda)$

b) Če je $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, je $\lambda \in \rho(A)$ in $R(\lambda, A)$ izračunamo z integralom v prvi točki.

c) $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$ za vsak λ, za katerega je $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Dokaz. Dokažimo najprej prvo točko. Če pišemo $S(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)$, je tudi $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ krepko zvezna polgrupa, katere generator ima isto definicijsko območje kot A, in $R_T(\lambda) = R_S(0)$. Zato smemo brez škode za splošnost predpostaviti, da je $\lambda = 0$.

Naj bo $x \in X$ poljuben in $h > 0$. Velja:

$$\frac{T(h) - \operatorname{Id}}{h} R_T(0)x = \frac{T(h) - \operatorname{Id}}{h} \int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty T(s+h)x \,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s = -\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x \,\mathrm{d}s$$

Ko pošljemo $h \downarrow 0$, vidimo, da je kodomena funkcije $R_T(0)$ vsebovana v $D(A)$ in da je $AR_T(0) = -\operatorname{Id}$. Po drugi strani je za vsak $x \in D(A)$:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s = R_T(0)$$

in po tretji točki leme 4.3 je

$$\lim_{t\to\infty} A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty}\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s = R_T(0)Ax$$

kar zaradi zaprtosti operatorja A pomeni, da je $R_T(0)Ax = AR_T(0)x = -x$. Zato je $R_T(0) = (-A)^{-1}$. Ker je A zaprt operator, je tudi $(-A)^{-1}$ zaprt operator in ker je $R_T(0)$ po predpostavki definiran povsod, je tudi $(-A)^{-1}$ definiran povsod. Po izreku o zaprtem grafu (izrek 2.12) je potem to zvezen operator, zato je $0 \in \rho(A)$ in je po zgoraj dokazanem $R_T(0) = R(0, A)$.

Drugi in tretji del dokažemo s pomočjo ocene

$$\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s\right\| \le \int_0^t ||\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x||\,\mathrm{d}s \le \int_0^t ||\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)||\;||x||\,\mathrm{d}s \le$$

$$\int_0^t M||\mathrm{e}^{(\omega-\lambda)s}||\;||x||\,\mathrm{d}s = M\int_0^t \mathrm{e}^{(\omega-\operatorname{Re}\lambda)s}\,\mathrm{d}s\;||x||$$

Ko gre t proti neskončno, gre desna stran te ocene zaradi $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ proti $\frac{M||x||}{\operatorname{Re}\lambda-\omega}$, kar pomeni, da integral na levi strani obstaja za vsak $x \in X$. S tem je druga točka dokazana.

V skladu s prvo točko je limita začetka ocene, ko gre t proti neskončno, enaka $||R(\lambda, A)x||$. Torej je $||R(\lambda, A)x|| \le \frac{M||x||}{\operatorname{Re}\lambda-\omega}$ in zato $||R(\lambda, A)|| \le \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda-\omega}$. □

Posledica 6.4. *Za generator A polgrupe $\{T(t)\}_{t\ge0}$ operatorjev na Banachovem prostoru X, za katero je za vse $t \ge 0$*

$$||T(t)|| \le M\mathrm{e}^{\omega t},$$

velja, da je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ za katerega je $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ in vsak $n \in \mathbb{N}$

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}}R(\lambda, A)x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s \tag{8}$$

za vsak $x \in X$. Posledično za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ za katerega je $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ velja ocena

$$||R(\lambda, A)^n|| \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}.$$

Za dokaz te posledice potrebujemo lemo:

Lema 6.5. *Naj bo X Banachov prostor. Za generator krepko zvezne polgrupe $A : X \supset D(A) \to X$ velja*

a) Množica $\rho(A)$ je odprta podmnožica $\mathbb{C}$ in za vsak $\mu \in \rho(A)$ in $\lambda \in \mathbb{C}.|\mu - \lambda| \cdot ||R(\mu, A)|| < 1$ velja, da je $\lambda \in \rho(A)$ in $S(\lambda) = R(\lambda, A)$, kjer je

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

b) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$$

Dokaz. Vrsta iz prve točke konvergira po operatorski normi, saj je

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||(\mu - \lambda) R(\mu, A)||^n \; ||R(\mu, A)|| =$$

$$= \frac{||R(\mu, A)||}{1 - |(\mu - \lambda)| \cdot ||R(\mu, A)||}$$

Potrebno je videti le še, da je $S(\lambda) = R(\lambda, A)$. Pomnožimo $S(\lambda)$ z desne z

$$(\lambda \operatorname{Id} - A) = (\mu \operatorname{Id} - A) + (\lambda - \mu) \operatorname{Id}$$

in dobimo

$$S(\lambda)(\lambda \operatorname{Id} - A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1} (\mu \operatorname{Id} - A) - (\mu - \lambda)^{n+1} R(\mu, A)^{n+1}$$

Po definiciji $R(\mu, A)$ (6.1) je to enako

$$\operatorname{Id} - (\mu - \lambda) R(\mu, A) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n - (\mu - \lambda)^{n+1} R(\mu, A)^{n+1} = \operatorname{Id}.$$

Podobno dobimo, če $S(\lambda)$ množimo z leve z $(\lambda \operatorname{Id} - A)$. S tem je prva točka dokazana, saj smo videli, da je res $S(\lambda) = R(\lambda, A)$ in da za vsak $\mu \in \rho(A)$ obstaja krog s središčem v μ, ki je vsebovan v $\rho(A)$.

Drugo točko dobimo iz prve. Vrsto za $R(\lambda, A)$ lahko odvajamo po členih. Zaradi absolutne konvergence obeh vrst je

$$\frac{R(\lambda + h, A) - R(\lambda, A)}{h} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu - \lambda - h)^i - (\mu - \lambda)^i}{h} R(\mu, A)^{i+1}$$

Ko pošljemo $h \to 0$, desna stran konvergira proti vrsti iz odvodov. Zato obstaja limita, ko gre h proti 0 leve strani in je enaka vrsti odvodov. Potem predstavitev resolvente z vrsto iz prve točke deluje kot Taylorjeva vrsta in dokazan je tudi drugi del leme. □

Dokaz posledice 6.4. Po drugi točki zgornje leme je prva enakost v (8) očitna. Ker je

$$\left\| \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} T(s)x \, \mathrm{d}s - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s}{\delta} + \int_0^\infty s\mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s \right\| =$$

$$\left\| \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-\delta s} - 1}{\delta} + s \right) e^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \leq \int_0^\infty \left\| \left(\frac{\mathrm{e}^{-\delta s} - 1}{\delta} + s \right) e^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \to 0,$$

ko gre δ proti 0, je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s = - \int_0^\infty s\mathrm{e}^{-s\lambda} T(s)x \, \mathrm{d}s$$

Uporabimo izrek 6.3 in indukcijo, da dobimo drugo enakost v (8).

Zadnji del posledice dobimo iz ocene:

$$\begin{aligned}
||R(\lambda, A)^n x|| &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left\| \int_0^\infty s^{n-1} \mathrm{e}^{-s\lambda} T(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} \mathrm{e}^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)s} \, \mathrm{d}s \cdot ||x|| \\
&= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \cdot ||x||
\end{aligned}$$

za vse $x \in X$. □

7. Generiranje krepko zveznih polgrup

Vira za ta razdelek sta [6], razdelek 9.8 in [3], drugo poglavje. V četrtem razdelku smo opisali, kako dobiti generator dane krepko zvezne polgrupe in naštеli nekaj njegovih lastnosti. V tem razdelku pa bomo šli v obratno smer. Zanima nas torej, kdaj je dani operator na Banachovem prostoru generator krepko zvezne polgrupe in kako dobiti to polgrupo z njegovo pomočjo. Pri tem si bomo pomagali z ugotovitvami iz četrtega razdelka, kjer smo videli, da v enakomerno zveznem primeru polgrupo iz generatorja A dobimo kot e^{tA}. To bo glavna ideja tudi v tem razdelku, le da za neomejen operator A vrsta

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} x$$

ne konvergira nujno. Zato bomo potrebovali drugačen način za izračun potence. Ideja, ki jo je prvi predlagal K. Yosida, je, da vzamemo zaporedje zveznih približkov $\{A_n\}$, ki konvergira k A, in potem za e^{tA} vzamemo limito $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n}$. Za zvezen operator A_n, namreč velja

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A_n^i}{i!} x \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i ||A_n||^i}{i!} ||x|| = \mathrm{e}^{t||A_n||} ||x||$$

in vrsta konvergira na celem X.

Naslednja lema bo v pomoč pri iskanju pravega zaporedja približkov.

Lema 7.1. *Naj bo $D(A) \subset X$ povsod gosta podmnožica X in $A : D(A) \to X$ zaprt linearni operator. Naj obstajata takšna $\omega \in \mathbb{R}$ in $M > 0$, da je $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ in $||\lambda R(\lambda, A)|| \leq M$ za vsak $\lambda \geq \omega$. Potem velja:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$$

Dokaz. Po definiciji resolvente za vsak $y \in D(A)$ velja $(\lambda \operatorname{Id} - A)\ R(\lambda, A)y = y$, od koder zaradi linearnosti sledi, da je $\lambda R(\lambda, A)y = A\ R(\lambda, A)y + y = R(\lambda, A)\ Ay + y$, kjer zadnja enakost sledi po lemi 4.3 in izreku 6.3. Ko gre λ proti ∞, gre izraz na desni proti y, saj je po predpostavki $||R(\lambda, A)\ Ay|| \leq \frac{M}{|\lambda|} ||Ay||$. Ker je $D(A)$ povsod gosta v X, obstaja za vsak $x \in X$ takšen $y \in D(A)$, da je $||x - y|| < \frac{\epsilon}{M+1}$. Potem je za dovolj velik λ

$$\begin{aligned} ||\lambda R(\lambda, A)x - x|| &= ||\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)y + \lambda R(\lambda, A)y - y + y - x|| \\ &\leq ||\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)y|| + ||\lambda R(\lambda, A)y - y|| + ||x - y|| \\ &< ||\lambda R(\lambda, A)(x - y)|| + ||\lambda R(\lambda, A)y - y|| + \frac{\epsilon}{M+1} \\ &\leq ||\lambda R(\lambda, A)||||x - y|| + ||\lambda R(\lambda, A)y - y|| + \frac{\epsilon}{M+1} \\ &< M\frac{\epsilon}{M+1} + \frac{\epsilon}{M+1} + ||\lambda R(\lambda, A)y - y|| = \epsilon + ||\lambda R(\lambda, A)y - y|| \end{aligned}$$

Ko gre $\lambda \to \infty$, gre drugi člen proti 0 in lema je dokazana. $\square$

Direktna posledica zgornje leme je, da je

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\ AR(\lambda, A)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)\ Ax = Ax$$

za vsak $x \in X$, kar kaže na to, da bi za operatorje A_n lahko vzeli $nAR(n, A)$.

Odgovor na vprašanje, kako iz danega operatorja dobiti krepko zvezno polgrupo, ki jo generira, bomo dobili v dveh korakih. Najprej bomo dokazali izrek, ki govori o generiranju skrčitvenih polgrup, splošni primer pa se prevede na skrčitvenega.

Izrek 7.2 (Hille, Yosida)**.** *Naj bo X Banachov prostor in A linearni operator $A : X \supset D(A) \to X$. Potem so naslednje trditve med seboj ekvivalentne.*

a) Operator A je generator krepko zvezne skrčitvene polgrupe.

b) Operator A je zaprt, gosto definiran in za vsak $\lambda > 0$ velja $\lambda \in \rho(A)$ in

$$||\lambda R(\lambda, A)|| \leq 1 \tag{9}$$

c) Operator A je zaprt, gosto definiran, in za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, za katerega je $\operatorname{Re}\lambda > 0$, je $\lambda \in \rho(A)$ in

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

Dokaz. Implikaciji iz prve v tretjo in iz tretje v drugo točko sta dokazani že v izreku 6.3. Tako je potrebno dokazati le še, da iz druge točke sledi prva. Definiramo zaporedje Yosidovih aproksimantov $\{A_n\}$ z

$$A_n = nA\ R(n, A) = n^2 R(n, A) - n \operatorname{Id}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. To so zvezni, med seboj komutirajoči operatorji. Naj bo $T_n(t) = \mathrm{e}^{tA_n}$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ zaporedje $\{T_n(t)\}_{t\geq 0}$ tvori enakomerno zvezno polgrupo linearnih operatorjev. Da dokažemo izrek, je potrebno pokazati, da limita $T(t)x = \lim_{b\to\infty} T_n(t)x$ obstaja za vsak $x \in X$ in $t \in \mathbb{R}_+$ ter da tvori skrčitveno polgrupo z generatorjem A.

Za vsak n je $\{T_n(t)\}$ skrčitvena polgrupa, saj je

$$||T_n(t)|| \leq \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{||n^2 R(n,A)||t} \leq \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{nt} = 1$$

Po osnovnem izreku integralskega računa, uporabljenem na funkciji $s \mapsto T_m(t - s)T_n(s)x$, velja za $0 \leq s \leq t$, $x \in D(A)$ in $m, n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(t)x - T_m(t)x = \int_0^t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T_m(t - s)T_n(s)x)\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

Po lemi 4.3 je $T_m(t-s-h)y = T_m(t-s)y - hT_m(t-s)A_m y + o_1(h, y)$ za vsak $y \in X$, saj je A_m definiran povsod. Podobno je $T_n(s+h)x = T_n(s)x + hT_n(s)A_n x + o_2(h, x)$, kjer

$o(h,x)$ pomeni tako funkcijo h in x, da je za vsak $x \in X$ limita $\lim_{h\to 0} \frac{o(h,x)}{h} = 0 \in X$. Diferenčni kvocient preslikave $T_m(t-s)T_n(s)x$ lahko potem zapišemo kot

$$\frac{T_m(t-s)[T_n(s)x + hT_n(s)A_nx + o_2(h,x)]}{h} +$$

$$+\frac{-hT_m(t-s)A_m[T_n(s)x + hT_n(s)A_nx + o_2(h,x)] + o_1(h,x) - T_m(t-s)T_n(s)x}{h}$$

Zaradi linearnosti operatorjev T_m in A_m je to enako

$$T_m(t-s)T_n(s)A_nx + T_m(t-s)\frac{o_2(h,x)}{h} - T_m(t-s)A_mT_n(s)x - hT_m(t-s)A_mT_n(s)A_nx -$$

$$-T_m(t-s)A_mo_2(h,x) + \frac{o_1(h,x)}{h}.$$

Ko gre $h \to 0$, dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T_m(t-s)T_n(s)x = T_m(t-s)T_n(s)A_nx - T_m(t-s)A_mT_n(s)x$$

Ker je $T_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!}A_n^i$ in ker A_m in A_n komutirata, je $A_mT_n(s)x = T_n(s)A_mx$ torej je izraz (10) enak

$$\int_0^t T_m(t-s)T_n(s)(A_n - A_m)x \,\mathrm{d}s$$

Zato je

$$||T_n(t)x - T_m(t)x|| \le \int_0^t ||T_m(t-s)||\,||T_n(s)||\,||A_nx - A_mx||\,\mathrm{d}s \le \tag{11}$$

$$\le t||A_nx - A_mx|| \tag{12}$$

Po lemi 7.1 je zaporedje $\{A_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo za vsak $x \in D(A)$. Zato zaporedje $\{T_n(t)x\}_n$ konvergira za vsak $x \in D(A)$, posledično pa tudi za vsaka $x \in X$; dokaz je enak tistemu v lemi 7.1. Na vsakem intervalu $[0, t_0)$ je ta konvergenca enakomerna. Za dovolj velik $n_0 \in \mathbb{N}$ in fiksen $x \in X$ je $||T_{n_0}(s)x - T(s)x|| < \epsilon$. Potem je $||T_{n_0}(t)T_{n_0}(s)x - T_{n_0}(t)T(s)x|| < ||T_{n_0}(t)||\epsilon \le \epsilon$, saj je $\{T_{n_0}(t)\}_{t\ge 0}$ skrčitvena polgrupa. Ocenimo $||T_(t)T_{n_0}(s)x - T(t)T(s)x|| = ||T_{n_0}(t)T_{n_0}(s)x - T_{n_0}(t)T(s)x + T_{n_0}(t)T(s)x - T(t)T(s)x|| \le \epsilon\; ||T_{n_0}(t)T(s)x - T(t)T(s)x||$. Ko gre $n_0 \to \infty$ gre drugi člen proti nič. Torej $T_n(t)T_n(s)x$ konvergira k $T(s)T(t)x$. Ker je $T_n(t)T_n(s)x = T_n(t+s)x$ in to konvergira k $T(t+s)x$, je $T(t+s)x = T(t)T(s)x$ za vsak $x \in X$, $t, s \ge 0$. Ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$ preslikava $T_n(0)$ identiteta, je tudi $T(0)$ identična preslikava. Torej $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ zadošča pogoju (3) iz definicije krepko zvezne polgrupe. Ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $t \ge 0$ norma $||T_n(t)x|| \le ||x||$, mora biti tudi $||T(t)x|| \le ||x||$, torej je za vsak $t \ge 0$ preslikava $T(t)$ skrčitev. Naj bo $x \in X$ in $\xi_n(t) = T(t)x$ za $t \in [0, n)$ in $n \in \mathbb{N}$. Ker je $\xi_n(t)$ limita enakomerno Cauchyjevega zaporedja (glej (11)), je zvezna. Intervali $[0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$ tvorijo odprto pokritje množice $\mathbb{R}_+$, zato je tudi funkcija $\xi : \mathbb{R}_+ \to X$, $\xi(t) = T(t)x$ zvezna, kar pa že pomeni, da je $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ krepko zvezna polgrupa skrčitev.

Potrebno je videti samo še, da je A generator $\{T(t)\}_{t\ge 0}$. Označimo z $B : X \supset D(B) \to X$ generator polgrupe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ in naj bo $x \in D(A)$. Ocenimo

$$||T_n(t)A_nx - T(t)Ax|| = ||T_n(t)A_nx - T_n(t)Ax + T_n(t)Ax - T(t)Ax|| \le$$

$$\le ||A_nx - Ax|| + ||T_n(t)Ax - T(t)Ax|| \tag{13}$$

Pri neenačaju smo upoštevali, da je $||T_n(t)|| \leq 1$. Ko gre $n \to \infty$ gre (13) proti 0 neodvisno od t, torej $T_n(t)A_n x$ konvergira proti $T(t)Ax$ enakomerno. Ker je na omejenem intervalu tudi konvergenca $T_n(t)x \to T(t)x$ enakomerna, to pomeni, da je za vsak $x \in D(A)$ funkcija $t \mapsto T(t)x$ diferenciabilna ($D(A) \subset D(B)$) in velja $Bx = Ax$.

Da bomo lahko trdili, da je $B = A$, moramo videti še $D(B) = D(A)$. Izberimo $\lambda > 0$. Ker je $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ skrčitvena polgrupa to po izreku 6.3 pomeni, da je $\lambda \in \rho(B)$, po privzetku v izreku pa je λ tudi element $\rho(A)$. Preslikava $R(\lambda, A) = \lambda \operatorname{Id} - A$ je bijekcija med $D(A)$ in X, preslikava $R(\lambda, B) = \lambda \operatorname{Id} - B$ pa je bijekcija med $D(B)$ in X, pri čemer je njena zožitev na $D(A)$ enaka $R(\lambda, A)$. To je mogoče, samo če je $D(A) = D(B)$ in posledično $A = B$. □

Zdaj imamo vse potrebno za dokaz splošnega izreka o generiranju krepko zveznih polgrup.

Izrek 7.3 (Feller, Miyadera, Phillips)**.** *Naj bo X Banachov prostor, naj bo $A : X \supset D(A) \to X$ linearen operator in naj bosta $\omega \in \mathbb{R}$ ter $M \geq 1$. Potem so ekvivlantne naslednje trditve:*

a) A generira krepko zvezno polgrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, ki zadošča pogoju

$$||T(t)|| \leq M e^{\omega t}.$$

b) A je zaprt, gosto definiran operator in za vsak $\lambda > \omega$ je $\lambda \in \rho(A)$ ter za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$||[(\lambda - \omega)R(\lambda, A)]^n|| \leq M.$$

c) A je zaprt, gosto definiran operator in za vsak $\lambda \in \mathbb{C}. \operatorname{Re} \lambda > \omega$ je $\lambda \in \rho(A)$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}$$

Dokaz. Da iz prve točke sledi tretja, smo pokazali v posledici 6.4, implikacija iz tretje v drugo točko pa je očitna, tako da je potrebno pokazati le še, da iz druge točke sledi prva. Ideja je, da najdemo tako, prvotni normi na X ekvivalentno, normo, da bo operator A v njej zadoščal pogojem iz izreka 7.2. Tako kot v dokazu izreka 6.3 smemo brez škode za splošnost privzeti, da je $\omega = 0$, oziroma, da je za vsak $\lambda > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ $||\lambda^n R(\lambda, A)^n|| \leq M$.

Za vsak $\mu > 0$ definirajmo novo normo na X:

$$||x||_\mu = \sup_{n\geq 0} ||\mu^n R(\mu, A)^n x||,$$

kjer je $R(\mu, A)^0$ identiteta. Preverimo najprej, da je to res norma. Ker je $R(\mu, A)$ injektivna in ker je kompozitum injektivnih preslikav spet injektivna preslikava, je $||x||_\mu = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$. Zaradi linearnosti resolvente je $||\lambda x||_\mu = |\lambda| \, ||x||_\mu$. Trikotniška neenakost je očitna zaradi linearnosti resolvente in zato ker trikotniška neenakost velja za prvotno normo na X. Te norme imajo naslednje lastnosti:

(1) $||x|| \leq ||x||_\mu \leq M \, ||x||$, torej so ekvivalentne prvotni normi na X.
(2) $||\mu R(\mu, A)||_\mu \leq 1$, kjer norma na levi pomeni operatorsko normo, ki jo dobimo iz $||\cdot||_\mu$ na X.
(3) $||\lambda R(\lambda, A)||_\mu \leq 1$ vedno, ko je $0 < \lambda \leq \mu$.

(4) Za vsak $0 < \lambda \leq \mu$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$||\lambda^n R(\lambda, A)^n x|| \leq ||\lambda^n R(\lambda, A)^n x||_\mu \leq ||x||_\mu$$

(5) $||x||_\lambda \leq ||x||_\mu$ za vsak $0 < \lambda \leq \mu$.

Prva točka je očitna zaradi predpostavke $||\lambda^n R(\lambda, A)^n|| \leq M$ in

$$||x||_\mu \geq ||\mu^0 R(\mu, A)^0 x|| = ||x||.$$

Drugo točko vidimo iz

$$||\mu R(\mu, A)x||_\mu = \sup_{n\geq 0} ||\mu^{n+1} R(\mu, A)^{n+1} x|| = \sup_{n\geq 1} ||\mu^n R(\mu, A)^n x|| \leq ||x||_\mu$$

Za dokaz tretje točke najprej vidimo

$$R(\mu, A) = R(\mu, A)(\lambda \operatorname{Id} - A)R(\lambda, A) =$$

$$= R(\mu, A)[(\lambda - \mu) \operatorname{Id} + (\mu \operatorname{Id} - A)]R(\lambda, A) =$$

$$= (\lambda - \mu)R(\mu, A)R(\lambda, A) + R(\lambda, A)$$

Od tod sledi, da je za vsak $x \in X$

$$R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)x)$$

in zato

$$\mu||R(\lambda, A)x||_\mu = ||\mu R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)x)||_\mu,$$

kar je po drugi točki manjše ali enako (tu upoštevamo tudi $\lambda \leq \mu$)

$$||x + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)x||_\mu \leq ||x||_\mu + (\mu - \lambda)||R(\lambda, A)x||.$$

Tako vidimo, da je $||\lambda R(\lambda, A)x||_\mu \leq ||x||_\mu$, kar že dokazuje tretjo točko. Prva neenakost v četrti točki sledi iz prve točke, drugo pa dokažemo z uporabo tretje točke:

$$||\lambda^n R(\lambda, A)^n x||_\mu \leq ||\lambda^{n-1} R(\lambda, A)^{n-1} x||.$$

Od tod z indukcijo pridemo do druge neenakosti. Peta točka sledi iz četrte točke in iz definicije družine norm $\{|| \cdot ||_\mu\}_{\mu>0}$.

Definirajmo še eno normo:

$$|||x||| = \sup_{\mu>0} ||x||_\mu$$

To je očitno res norma. Z upoštevanjem prve točke zgoraj vidimo, da je $||x|| \leq |||x||| \leq M||x||$ in zato je $||| \cdot |||$ ekvivalentna prvotni normi na X.

Naj bo $\lambda > 0$. Potem je zaradi pete in druge točke zgoraj $1 \geq ||\lambda R(\lambda, A)||_\lambda \geq ||\lambda R(\lambda, A)||_\nu$ za vse $\nu \in (0, \lambda]$. Z upoštevanjem tretje točke je potem očitno, da je $|||\lambda R(\lambda, A)||| \leq 1$. Torej operator A izpolnjuje pogoje prve točke izreka 7.2 v prostoru $(X, |||\cdot|||)$. Zato obstaja na tem prostoru krepko zvezna skrčitvena polgrupa $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Zaradi ekvivalentnosti norm $||| \cdot |||$ in $|| \cdot ||$ je ta polgrupa krepko zvezna tudi na $(X, || \cdot ||)$ in za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ velja $||T(t)|| \leq M$, kar smo želeli pokazati. $\square$

Literatura

[1] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **96**, Springer, New York, 1990.

[2] B. K. Driver, *4. The Riemann Integral*, [ogled 10. 7. 2013], dostopno na `www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/chap4.pdf`.

[3] K. J. Engel in R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Universitext, Springer, New York, 2006.

[4] P. Guiotto, *Markov Semigroups*, [ogled 5.3.2013], dostopno na `www.math.unipd.it/~daipra/didattica/Bologna12/MarkovSemigroups-12.pdf`.

[5] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[6] K. Yosida, *Functional Analysis, ponatis 6. izdaje (1980)*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 1995.