UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Vid Smrke

Analiza iger na srečo

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ljubljana, 2016

Kazalo

1. Uvod	5
2. Predstavitev igre	5
3. Pričakovana vrednost igre	8
3.1. Osnovna igra	8
3.2. Bonus igre	11
4. Končni rezultat in simulacija	27
4.1. Simulacija	27
5. Priloge	28
Slovar strokovnih izrazov	50
Literatura	50

Analiza iger na srečo

Povzetek

V delu je predstavljena igra na srečo Book of Ra. Glavni cilj je izračun pričakovane vrednosti dobička igre. Podana je matematična obravnava izračuna, sama izvršitev pa poteka s pomočjo računalnika. Rezultati izračuna so primerjani z rezultati, dobljenimi na podlagi simulacije. Implementacija izračuna in simulacije se skupaj s komentarji nahajata v prilogah.

Games of chance analysis

Abstract

The game of chance, called Book of Ra, is presented. The main goal is to compute the expected value of the profit. The mathematical treatment of the computation is introduced, whereas the execution is obtained by a computer. The results of the computation are compared with those acquired with the simulation. The implementation of the computation and simulation can both be found in the appendices, alongside with comments.

Math. Subj. Class. (2010): 60C05

Ključne besede: pričakovana vrednost, igra na srečo, procesi razvejanja, programiranje (Python)

Keywords: expected value, game of chance, branching processes, programming (Python)

Izjava o omejitvi odgovornosti

Vsi podatki v delu temeljijo le na javno dostopnih podatkih. Vse predpostavke o kolesih, verjetnostih in plačilnih tabelah izvirajo iz opazovanja na spletu dostopnih iger, ki se morda razlikujejo od dejanske igre. Ne trdimo, da se zaključki, izpeljani na podlagi teh predpostavk, ujemajo z izplačili dejanske igre. Delo naj se obravnava kot matematična vaja, ki temelji na konkretnih predpostavkah, ki pa niso potrjene. [9]

Disclaimer

All the information contained in the text is based solely on the publicly available information. All the assumptions on the reels, probabilities and payoff tables are based on observations of real games offered on internet sites and may differ from the actual game. The conclusions are derived from those assumptions and no claim is made that they are reliable or close to return precentages of the actual game. The text is to be treated as a mathematical exercise based on plausible assumptions, that are explicitly stated but in no way verified.

1. Uvod

Povod za razvoj verjetnosti kot veje matematike so bile igre na srečo. Te so v 17. stoletju temeljile predvsem na metu kocke. Ljudje, ki so redno kockali, so sčasoma seveda opazili, da se nekateri izidi zgodijo bolj pogosto kot drugi. Če je nekomu naprimer uspelo vreči tri šestice zapored, so rekli, da je imel srečo, saj je bilo intuitivno jasno, da je treba kocko vreči velikokrat, preden pride do takega izida. Očitno so se v igralniških krogih zavedali tudi dejstva, da vsaka izmed števil na pošteni kocki pade z enako verjetnostjo (to je pade enako pogosto), saj so nekateri z obteževanjem kock poizkušali doseči, da bi katera izmed zaželenih števil padla bolj pogosto.

Za pionirja teorije verjetnosti veljata francoska matematika Blaise Pascal in Pierre de Fermat, ki sta si leta 1654 dopisovala na temo v tistem obdobju priljubljenih iger na srečo. Francoski aristokrat Chevalier de Méré se je zelo zanimal za igre na srečo in z njimi povezana vprašanja. Fermatu je pisal, ker je opazil, da pri dveh na videz podobnih igrah na srečo nima enakega izkupička oziroma celo, da ima pri eni dobiček, pri drugi pa izgubo. Igri sta bili sledeči.

- Pošteno kocko vržemo štirikrat. Zmagamo, če vsaj enkrat pade šestica.
- Dve pošteni kocki vržemo štiriindvajsetkrat. Zmagamo, če vsaj enkrat pade šestica na obeh kockah hkrati.

Fermat je pokazal, da so bile ugotovitve, do katerih je de Méré prišel z rednim kockanjem pravilne, torej da je verjetnost ugodnega dogodka v prvi igri na srečo večja kot verjetnost ugodnega dogodka v drugi igri na srečo in da je prva malo večja, druga pa malo manjša od ene polovice, o čemer si je dopisoval tudi s Pascalom.

Tudi danes tako igralce iger na srečo kot igralnice zanima predvsem, koliko lahko pričakujejo, da bodo na dolgi rok pri določeni igri na srečo dobili oziroma izgubili. Igralnice seveda ne ponujajo iger, v katerih bi bila pričakovana izguba za igralca zelo velika. V njihovem interesu je namreč, da dano igro na srečo igra čim več ljudi. Jasno igra tudi ne sme zagotavljati skoraj gotovega dobička, saj bi to na dolgi rok pomenilo izgubo za igralnico. Pričakovati je torej, da igre na srečo igralcu dajejo upanje za zaslužek, a mu za varnost igralnic na dolgi rok zagotavljajo izgubo. Če ne drugega že samo dejstvo, da igralnice obstajajo, kaže na to, da je res tako.

V diplomski nalogi bomo analizirali konkretno igro na srečo [1, 2, 4]. Glavni cilj bo določiti izgubo oziroma dobiček, ki jo lahko igralec pričakuje na dolgi rok. Predstavili bomo idejo poteka izračuna, ki ga v praksi izvede računalnik; vsa implementacija je zbrana v prilogah. Rezultat izračuna bomo primerjali z rezultatom, ki ga bo vrnila simulacija.

2. Predstavitev igre

Igra, ki jo bomo analizirali, nosi ime Book of Ra. Gre za klasični igralni avtomat. Igralec pred vsakim zavrtljajem koles stavi nekaj denarnih enot. Ugoden izid mu prinese dobiček, neugoden pa ga pusti praznih rok. Višina dobička je, kot bomo videli, odvisna od številnih dejavnikov. V prvi vrsti nanj seveda vpliva izid (to je razporeditev simbolov na igralnem avtomatu oziroma ekranu po zavrtljaju). Poleg tega pričakujemo, da je pomembno tudi koliko in na kaj je igralec stavil. Igra je sestavljena iz petih koles. Na vsakem izmed njih so po zavrtljaju vidni trije simboli. Izid je torej določen s petnajstimi izžrebanimi simboli oziroma petimi izžrebanimi trojicami simbolov.

Primer 2.1. Primer izida. Na prvem kolesu je bila izžrebana trojica simbolov BAJ, na drugem MKA in tako naprej.

$$\begin{array}{ccccc} B & M & Q & Q & J \\ A & K & P & M & 1 \\ J & A & J & A & S \end{array}$$

$\diamondsuit$

Igralec se poleg višine zastavljenega zneska odloči tudi, na koliko linij bo stavil. Teh je deset in na različne načine potekajo po ekranu od leve proti desni. Igralcu dobiček prinesejo le ustrezne kombinacije simbolov, ki se pojavijo na linijah, na katere je stavil. Osnovna (prva) linija poteka po sredini. Zajema torej simbole, ki se na vsakem izmed koles pojavijo na drugem mestu (v zgornjem primeru so to simboli $AKPM1$). Ostale linije so linearen zamik osnovne in tako vse zajemajo po pet simbolov, a njihov točen potek ni bistven, saj se bo izkazalo, da niso pomembne za analizo igre.

Book of Ra ima deset različnih simbolov, ki prinašajo različne dobičke. V spodnji plačilni tabeli so prikazani vsi simboli s svojimi imeni in faktorji, s katerimi se, če pride do navedenega števila neprekinjenih pojavitev na ustrezni liniji, pomnoži znesek, ki smo ga stavili.

Ime	Simbol	2x	3x	4x	5x
Ten	1	0	5	25	100
Jack	J	0	5	25	100
Queen	Q	0	5	25	100
King	K	0	5	40	150
Ace	A	0	5	40	150
Statue	S	5	30	100	750
Scarab	C	5	30	100	750
Mummy	M	5	40	400	2000
Book	B	0	2	20	200
Person	P	10	100	1000	5000

Potrebno je poudariti, da za ugoden izid ni dovolj, da se ustrezna kombinacija simbolov brez prekinitve pojavi na liniji, na katero smo stavili, temveč se mora ta kombinacija začeti na skrajni levi strani linije.

Primer 2.2.

$$\begin{array}{ccccc} C & C & A & Q & B \\ Q & P & P & P & 1 \\ K & A & C & S & K \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C & C & A & Q & B \\ P & P & P & Q & 1 \\ K & A & C & S & K \end{array}$$

Če smo stavili le eno denarno enoto na osnovno linijo, nam prvi izid ne prinese nobenega dobička, drugi pa 100 denarnih enot (glej plačilno tabelo). Dva simbola C v prvi vrstici ne doprineseta ničesar, saj nista na liniji, na katero smo stavili. $\diamondsuit$

Ob ugodnem izidu nam igra ponuja možnost povečanja dobička. Vstopimo lahko namreč v del igre, ki se imenuje tveganje (angleško gamble). Igra naključno izbira barvo karte (črno ali rdečo), igralec pa barvo karte ugiba. Če ugane, se njegov dobiček podvoji, sicer izgubi ves denar, ki ga je dobil z dotičnim vrtljajem.

Igra Book of Ra je v grobem sestavljena iz dveh delov in sicer osnovne igre in bonus iger (free spin). Osnovna igra zajema do zdaj opisano, bonus igre pa so tisti bolj kompleksen del, ki z vidika verjetnosti in pa tudi igranja, igro naredi zanimivo. Ta del lahko prinese zelo velike dobičke, vanj pa vstopimo preko simbola B (Book), ki ima poleg te še nekaj pomembnih lastnosti.

Prva posebna lastnost simbola B je nadomeščanje ostalih simbolov. V kvartopirskem žargonu bi lahko rekli, da je nekakšen joker. Nahajajoč se na mestu, kjer bi kot kakšen drug simbol prinesel dobiček, ga dejansko prinese.

Primer 2.3.

$$\begin{array}{ccccc} C & C & A & Q & B \\ B & P & P & P & 1 \\ K & A & B & S & K \end{array}$$

Dobiček zgornjega izida je enak dobičku izida, ki ima na drugem mestu v prvem stolpcu simbol P. Igralec torej v primeru, da je stavil le eno denarno enoto na osnovno linijo, dobi 1000 denarnih enot. ♢

Druga lastnost simbola B je to, da je tako imenovani scatter te igre (uporabljali bomo poslovenjeni izraz – razmetani simbol). Za razliko od ostalih simbolov ni potrebno, da se zadostno število simbolov B pojavi na liniji, na katero smo stavili, da prinese dobiček – zadostuje že, da se pojavi kjerkoli na ekranu. V zgornjem primeru – ob že navedenih predpostavkah – torej ne bi dobili le tisočih denarnih enot, saj bi dve prispevala še trikratna pojavitev simbola B. Skupni izkupiček bi torej znašal 1002 denarni enoti.

Zadnja in že omenjena lastnost simbola B je omogočanje vstopa v bonus igre. Če se kjerkoli na ekranu pojavijo vsaj trije simboli B, igra prestopi v bonus igre.

V bonus igrah igralec ne more ničesar izgubiti. Lahko si predstavljamo, da so del vrtljaja v osnovni igri, preko katerega je igra prešla v bonus igre. Igralec torej stavi le vsoto, ki jo je vložil v ta prvi vrtljaj. Sledi deset vrtljajev, ki se izvedejo samodejno. V vsakem izmed njih so zneski in linije, na katere stavimo, enaki tistim v vrtljaju, preko katerega igra preide v bonus igre. Pred začetkom desetih bonus iger se na podlagi vnaprej določenih verjetnosti izmed devetih simbolov (vseh iz osnovne igre razen B) izžreba bonus simbol. Ta ima v času bonus iger posebno lastnost, ki se ji reče mutiranje. Če se na ekranu pojavi število bonus simbolov, ki bi prinašalo dobiček v primeru, da bi se pojavilo na liniji, na katero smo stavili, se simbol »razleze« po vseh stolpcih, v katerih se je pojavil. Tako v primeru bonus iger z izžrebanim bonus simbolom A ob pojavitvi le dveh bonus simbolov še ne bi prišlo do mutacije, saj dva simbola A še ne prinašata dobička. Poleg tega je bonus simbol tudi nekakšen »kvazirazmetani simbol«. Za prinašanje dobička ni treba, da je po mutiranju ustrezno število bonus simbolov razvrščeno neprekinjeno na začetku linije, na katero smo stavili, kot to velja za običajne simbole. Zadošča namreč ustrezno število pojavitev kjerkoli na liniji, na katero smo stavili. Oglejmo si primer.

Primer 2.4.

$$\begin{array}{ccccc} A & Q & A & M & K \\ C & C & S & J & B \\ 1 & A & P & 1 & A \end{array}$$

Denimo, da je zgornji izid del bonus iger z izžrebanim bonus simbolom A. Po mutiranju bi izid izgledal sledeče.

$$\begin{array}{ccccc} A & A & A & M & A \\ A & A & A & J & A \\ A & A & A & 1 & A \end{array}$$

V prvotnem izidu torej simbol A ni prinesel nobenega dobička. Po mutiranju pa v primeru, da smo stavili le eno denarno enoto na osnovno linijo, prinese 40 denarnih enot. Celoten izkupiček tega izida bonus iger je 45 denarnih enot. Obračunajo se namreč tudi vsi dobički, ki jih prinese začetni izid pred mutiranjem. Tako 5 denarnih enot doprineseta še simbola C na osnovni liniji. $\diamondsuit$

Znotraj bonus iger se nam lahko seveda zopet zgodi, da se na ekranu pojavijo vsaj trije simboli B, kar nas popelje v bonus igre znotraj bonus iger. Te potekajo enako kot bonus igre, v katere vstopimo iz osnovne igre, le da se bonus simbola ne žreba ponovno, temveč ostane enak tistemu, ki je bil izžreban za bonus igre, preko katerih smo v dodatne bonus igre vstopili. Če vstopimo v bonus igre znotraj bonus iger, odigramo dvajset vrtljajev, v katerih ne moremo imeti izgube (deset vrtljajev od prvega in deset vrtljajev od drugega vstopa). Gnezdenje bonus iger se lahko teoretično nadaljuje v neskončnost. Ta dogodek bi bil za igralca seveda izjemno ugoden. Kot bomo kasneje videli, je verjetnost, da se to zgodi – na žalost igralcev in veselje igralnic – zelo majhna.

3. Pričakovana vrednost igre

3.1. **Osnovna igra.** V grobem se bomo računanja pričakovane vrednosti [3] igre Book of Ra lotili v dveh delih. Najprej bomo izračunali pričakovano vrednost osnovne igre, za tem pa še pričakovano vrednost bonus iger. Dobiček, ki nam ga prinese en vrtljaj, je zaradi konstrukcije igre precej zakomplicirana slučajna spremenljivka. Če to slučajno spremeljivko označimo z X, lahko zapišemo

$$X = X_o + \sum_{k=1}^{9} I_k \cdot X_k.$$

Pri tem je X_o dobiček, ki ga prinese osnovna igra, vsota v zgornjem izrazu pa zajema morebiten dobiček bonus iger. Teče po vseh tipih bonus iger (glede na izžrebani bonus simbol) – I_k je indikator, da smo vstopili v k-ti tip bonus igre, X_k pa dobiček, ki ga ta tip bonus igre prinese. Zaradi linearnosti smemo ločeno izračunati pričakovano vrednost dobička osnovne igre in pričakovano vrednost dobička bonus iger. Slučajni spremenljivki I_k in X_k sta neodvisni – pričakovani dobiček k-tega tipa bonus iger je toliko, kolikor je, neglede na to, če v ta tip bonus iger dejansko vstopimo ali ne. Velja torej

$$E(I_k X_k) = E(I_k)E(X_k) = P(\text{vstopimo v } k\text{-ti tip bonus iger})E(X_k).$$

Lotimo se izračuna pričakovane vrednosti slučajne spremenljivke X_o; to je izračuna pričakovanega dobička enega vrtljaja osnovne igre. Igralni avtomat izid posameznega vrtljaja na vsakem kolesu določa s pomočjo generiranja naključnih števil v mejah dolžine kolesa. Za vse izračune bomo predpostavili, da so generirana števila neodvisne diskretne slučajne spremenljivke z enakomerno porazdelitvijo na intervalu enakem dolžini kolesa. Tako je vsako število izbrano z enako verjetnostjo. Če bi imelo prvo kolo naprimer dolžino 42, bi bilo vsako število izbrano z verjetnostjo

$\frac{1}{42}$. Omenimo, da se v tem primeru ob izbiri števila 42 v prvem stolpcu pojavijo simboli, ki so v prvem kolesu na mestih 42, 1 in 2. Prav tako bomo predpostavili, da generiranje števil na posameznem kolesu poteka neodvisno od generiranja na ostalih. Denimo, da so kolesa osnovne igre sledeča.

$ASPJAQMJCKSJACP1JCPMCJPMCKQACQSPAS1QPSAQMPSCB1MS1K$

$JS1PACSK1SQC1PMJ1PB1CJS1JAPK1AQPSQASQK1QMPJC1$

$1PACQ1SJK1PSQJA1QKS1AP1QSJQS1AMCPKMC1PK1JAPKBP$

$1JMQ1JP1KJCMQCK1JCAMCSKQJMPSJQA1MAQ1KQBACJA1PACMAB$

$MP1QSKJC1APMSAJSM1QAPQ1JBMCPMKCSQAKPAS1JCPAQMPABQ$

Pričakovano vrednost igre zadošča računati za primer, ko igralec stavi le eno denarno enoto na osnovno linijo. Če na osnovno linijo stavi več, je njegov dobiček v primeru ugodnega izida seveda večji, a je tudi izguba večja, če izid ni ugoden. Prav tako je dovolj opazovati osnovno linijo, saj so vse ostale le njen linearen zamik. Na njih torej do ugodnega izida pride z enako verjetnostjo kot na osnovni. Igralec bi lahko stavil tudi na več linij, s čimer bi povečal verjetnost za dobiček, a bi ponovno moral tudi vložiti večji znesek. Matematično gledano za vsem skupaj stoji linearnost pričakovane vrednosti. Staviti na vseh deset linij je enako kot desetkrat staviti na osnovno, oziroma staviti na osnovno deset denarnih enot namesto ene. Podobno lahko stavo n-tih denarnih enot na osnovno linijo enačimo z n-timi stavami ene denarne enote na osnovno linijo. Odmislimo lahko tudi del igre, imenovan tveganje. S pomočjo ugibanja barve karte lahko namreč igralec z verjetnostjo 0,5 svoj dobiček podvoji, a ga lahko z enako verjetnostjo tudi izgubi, kar ne spremeni pričakovane vrednosti.

Za izračun pričakovane vrednosti osnovne igre je potrebno iti skozi vse možne izide na osnovni liniji in upoštevati njihove verjetnosti ter dobičke, ki jih prinesejo. Paziti moramo na simbol B. Ta je namreč razmetani simbol obravnavane igre in prinaša dobiček, tudi če se v ustreznem številu pojavi izven osnovne linije.

Označimo doprinos k pričakovani vrednosti igre, ki ga dobimo s strani simbola B v osnovni igri, z E_B. Simbol B obravnavamo v treh delih. Ločimo primere, ko se pojavi natanko trikrat, natanko štirikrat in natanko petkrat. Pri računanju doprinosa običajnih dobičkov (dobičkov na osnovni liniji) bomo morali paziti, da dogodkov s tremi ali več simboli B na osnovni liniji ne bomo šteli ponovno. Podrobneje opišimo izračun doprinosa k pričakovani vrednosti za primer štirih knjig. Iz koles osnovne igre je razvidno, da se na nobenem kolesu ne moreta pojaviti dva (ali več) simbola B hkrati, saj so na vsakem kolesu simboli B razmaknjeni za več kot dve mesti. Če z A_4 označimo dogodek, ko se na ekranu pojavijo natanko štirje simboli B, je razbitje dogodka A_4 (oziroma množice izidov, ki jo zajema dogodek A_4) sestavljeno iz naslednjih dogodkov:

$$H_i = \{\text{izključno na } i\text{-tem kolesu se ne pojavi simbol } B\} \quad \text{za } i\text{=1,2,3,4,5.}$$

Velja torej spodnja enakost:

$$P(A_4) = \sum_i P(H_i).$$

Izračunajmo verjetnost dogodka H_i za $i = 1$. To storimo s preštevanjem ugodnih izidov. Na prvem kolesu se ne sme pojaviti simbol B, torej število ugodnih izidov na prvem kolesu dobimo tako, da od vseh možnih izidov odštejemo tiste, v katerih se pojavi simbol B. Vidimo, da je na prvem kolesu le en simbol B. Neugodni izidi so torej trije ($Q1B$,$1BA$ in BAJ). Dolžina kolesa je 50, tako je ugodnih izidov 47. Na vseh ostalih kolesih se mora pojaviti simbol B. Število načinov, na katere se to lahko zgodi na posameznem kolesu, dobimo tako, da število simbolov B na tem kolesu pomnožimo s 3, saj je lahko simbol B na kateremkoli izmed treh mest. Na drugem in tretjem kolesu je eden, na četrtem in petem pa sta dva simbola B. Z upoštevanjem dolžin koles dobimo še vse možne izide in izračunamo verjetnost dogodka H_1

$$P(H_1) = \frac{47 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6}{50 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 50 \cdot 49} = 6{,}00532 \cdot 10^{-5}.$$

Podobno izračunamo še verjetnosti dogodkov H_i za $i = 2, 3, 4, 5$ in dobimo

$$P(A_4) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) + P(H_5) = 0{,}0002242413487133984.$$

Dobili smo verjetnost dogodka, ko se na ekranu pojavijo natanko štirje simboli B. Za izračun doprinosa tega dela igre k pričakovani vrednosti celotne igre, moramo dobljeno verjetnost še pomnožiti z dobičkom, ki ga obravnavani izid prinese. V plačilni tabeli vidimo, da štirje simboli B prinesejo dobiček 20 denarnih enot. Na enak način bi izračunali doprinos dogodkov A_5 in A_3, definiranih analogno dogodku A_4. Tako bi za doprinos k pričakovani vrednosti celotne igre s strani simbola B kot razmetanega simbola obravnavane igre dobili

$$E_B = 0{,}01548692102928128.$$

Opomba 3.1. Pričakovano vrednost smemo zaradi linearnosti računati »po delih«. Slednje bomo neprestano uporabljali, a tega ne bomo več poudarjali.

Izračunajmo zdaj še doprinos običajnih dobičkov. Osredotočimo se na osnovno linijo in upoštevamo, da se mora ustrezno število simbolov pojaviti na začetku linije. Pri tem odmislimo morebiten dobiček zaradi simbola B kot razmetanega simbola te igre. Ta dobiček smo namreč že zajeli v izračunu E_B. Še vedno moramo seveda upoštevati, da je simbol B joker. Oglejmo si potek izračuna na konkretnem izidu.

Primer 3.2.

$$\begin{matrix} Q & Q & A & K & J \\ P & B & B & P & B \\ K & A & 1 & A & K \end{matrix}$$

◊

Zgornji izid bi nam načeloma prinesel 5002 denarni enoti (glej plačilno tabelo), a ker smo doprinos simbola B že upoštevali, ga ne smemo še enkrat. Tako dobimo 5000 denarnih enot, saj imamo na osnovni liniji pet simbolov P (upoštevajoč, da je B joker). V praksi zgeneriramo tabelo vseh možnih izidov skupaj z dobički, ki jih prinašajo:

11111	100
$1111J$	25
$1111Q$	25
$1111K$	25
$1111A$	25
$\vdots$	$\vdots$

S pomočjo koles iger izračunamo še verjetnosti vseh izidov in se sprehodimo skozi celotno tabelo. Uberemo povsem kombinatoričen pristop.

Primer 3.3. Izračunajmo doprinos izida 11111 k celotni pričakovani vrednosti. Preštejemo, na koliko načinov se lahko na vseh petih kolesih na osnovni liniji pojavi simbol 1. Število načinov je enako zmnožku števil simbolov 1 na posameznem kolesu, verjetnost danega izida pa dobimo, če dobljeno delimo s številom vseh možnih izidov. Pričakovana vrednost sledi:

$$E(11111) = P(11111) \cdot 100 = \frac{4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 100}{50 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 50 \cdot 49} = 4{,}472 \cdot 10^{-5}. \qquad \diamondsuit$$

Tako za doprinos običajnih dobičkov k pričakovani vrednosti celotne igre dobimo

$$E_{\text{običajni}} = 0{,}48922630385490545.$$

Če to prištejemo pričakovani vrednosti doprinosa simbola B v osnovni igri, dobimo za pričakovano vrednost celotne osnovne igre

$$E_{\text{osnovna}} = 0{,}5047132248841867.$$

3.2. **Bonus igre.** Preden se lotimo izračuna pričakovane vrednosti doprinosa bonus iger, moramo določiti dve verjetnosti, ki ju bomo pri tem očitno potrebovali. Gre za verjetnost vstopa v bonus igre iz osnovne igre in verjetnost vstopa v bonus igre znotraj bonus iger.

Kakšna je verjetnost za vstop v bonus igre iz osnovne igre, smo do te točke v resnici že morali izračunati. Ta dogodek je namreč enakovreden pojavitvi vsaj treh simbolov B na celotnem ekranu. Iskana verjetnost se torej že skriva v izračunu doprinosa simbola B kot razmetanega simbola igre k pričakovani vrednosti. Tam smo povedali idejo izračuna verjetnosti pojavitve natanko štirih simbolov B na ekranu. Ta dogodek smo označili z A_4. S podobnim premislekom izračunamo tudi verjetnosti pojavitev natanko treh in natanko petih simbolov B na ekranu. Če slednja dogodka označimo z A_3 in A_5, dobimo za verjetnost za vstop v bonus igre iz osnovne igre sledeči rezultat:

$$P(\text{vstop v bonus igre iz osnovne igre}) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 0{,}00534580302.$$

Kolesa v bonus igrah se razlikujejo od koles v osnovni igri. Pričakovano bo seveda tudi verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger drugačna kot verjetnost za vstop v bonus igre iz osnovne igre. Denimo, da so kolesa bonus iger sledeča.

$J1QJSAC1AMQK1MCQKJCBQAJSCP1BCKQAJCMQK$

$CBQMA1QPSMBKJ1MJ1MASC1KC1SJQCJACSQCJM$

$CQJA1KMCQMCSPA1KAM1JCKJCPA1KS1CJSC1B$

$AQJ1QMKA1CKJQSJKAMB1CKJBKJ1SCPJMPJAK1$

$AC1SMJKS1PKQAJSC1AMPQ1CAMB1SJKSAMPBMQ$

Računamo na enak način kot pri vstopu v bonus igre iz osnovne igre. Dogodek pojavitve vsaj treh knjig v bonus igrah (to je vstop v bonus igre znotraj bonus iger) razdelimo na tri disjunktne dogodke – pojavi se natanko tri, natanko štiri oziroma natanko pet knjig. Če te dogodke zopet označimo z A_3, A_4 in A_5, velja:

$$P(\text{vstopimo v bonus igre znotraj bonus iger}) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

Izračunajmo tokrat $P(A_3)$. Zopet si lahko pomagamo z razbitjem danega dogodka

$$P(A_3) = \sum_{i,j} P(H_{ij}).$$

Pri tem H_{ij} označuje dogodek, da se simbol B ne pojavi natanko na i-tem in j-tem kolesu. Tako kot pri kolesih osnovne igre namreč tudi zdaj vidimo, da se na nobenem izmed koles ne more pojaviti več kot en simbol B naenkrat. Vsota bi bila sestavljena iz desetih členov. Izmed petih koles moramo namreč izbrati dve, na katerih ne bo simbola B, kar pa lahko storimo ravno na 10 načinov. Za zgled izračunajmo verjetnost dogodka H_{12}. Na prvem in drugem kolesu, ki imata obe dolžino 37, sta dva simbola B. Ker želimo, da se na njiju simbol B ne pojavi, je na vsakem izmed koles za nas ugodnih izidov 31. Na preostalih treh kolesih želimo, da se simbol B pojavi. Iz dolžin koles in števila simbolov B na njih dobimo spodnji izraz:

$$P(H_{12}) = \frac{31 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 0{,}0015382883327526291.$$

Podobno izračunamo še ostale verjetnosti iz razbitja dogodka A_3 in dobimo

$$P(A_3) = 0{,}02232999192705429.$$

Na enak način se lahko lotimo tudi izračuna verjetnosti za pojavitev natanko štirih oziroma natanko petih knjig. Sledi končni rezultat

$$P_{BB} = P(\text{vstopimo v bonus igre znotraj bonus iger}) = 0{,}024212434257248977.$$

Verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger je torej precej večja od verjetnosti za vstop v bonus igre iz osnovne igre. Doprinos gnezdenja bonus iger k pričakovani vrednosti celotne igre torej ne bo zanemarljiv, kot se morda sprva zdi.

Zdaj se lahko posvetimo izračunu pričakovane vrednosti bonus iger. Kot že omenjeno v predstavitvi igre, lahko v odvisnosti od tega, kateri simbol je izžreban za bonus simbol, vstopimo v devet različnih tipov bonus iger. Verjetnosti za to, da je posamezen simbol izžreban, so vnaprej določene in prikazane v spodnji tabeli.

simbol	verjetnost
P	0,11
M	0,11
S	0,11
C	0,11
A	0,11
K	0,11
Q	0,11
J	0,11
1	0,11

Označimo pričakovano vrednost bonus iger z E_{bonus}. Potem lahko zapišemo

$$E_{bonus} = E_P + E_M + E_S + E_C + E_A + E_K + E_Q + E_J + E_1.$$

Pri tem pričakovane vrednosti z velikimi tiskanimi črkami v indeksu označujejo pričakovane vrednosti bonus iger z ustreznim izžrebanim bonus simbolom; naprimer $E_P = E(I_P \cdot X_P)$. Do potankosti bomo izračunali pričakovano vrednost igre z izžrebanim bonus simbolom P. Izračuni pričakovanih vrednosti preostalih tipov bonus iger so podobni. Račun bo potekal v treh delih. Najprej bomo izračunali doprinos običajnih dobičkov. To so dobički, kakršne smo obravnavali že v osnovnem delu igre. Gre torej za dobičke na osnovni liniji in za dobičke, ki jih prinese simbol B kot razmetani simbol igre. Drugi del bo zajemal dobičke, ki jih prinese mutiranje bonus simbola. V tretjem delu bomo upoštevali, da lahko znotraj bonus iger vstopimo v dodatne bonus igre. Pišemo lahko torej:

$$E_P = E_{\text{običajni}} + E_{\text{mutiranje}} + E_{\text{gnezdenje}}.$$

3.2.1. *Običajni dobički.* Pristop je enak kot v osnovni igri. Lotimo se zopet najprej simbola B. Izračunajmo doprinos natanko štirih pojavitev. Ta dogodek označimo z A_4. Spet dogodek zapišemo kot unijo disjunktnih dogodkov. H_i naj označuje dogodek, da se pojavijo natanko štiri knjige, pri čemer se na i-tem kolesu ne pojavi nobena. Velja:

$$P(A_4) = \sum_i P(H_i).$$

Izračunajmo verjetnost dogodka H_4. Želimo torej, da se pojavijo natanko štirje simboli B, pri čemer se na četrtem kolesu ne pojavi nobeden. Iz koles bonus iger lahko razberemo, da sta na četrtem kolesu dva simbola B. Neugodnih izidov na tem kolesu je 6, saj se lahko vsak izmed dveh simbolov B pojavi na treh mestih. Dolžina četrtega kolesa je 37, kar pomeni da je na njem 31 za nas ugodnih izidov. Iz dolžin preostalih koles in števila simbolov B na njih sledi, da je

$$P(H_4) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 6}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 0{,}000297733225694.$$

Če izračunamo še verjetnosti dogodkov H_i za $i = 1, 2, 3, 5$ dobimo

$$P(A_4) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) + P(H_5) = 0{,}00182481654.$$

Iz plačilne tabele vidimo, da nam štiri pojavitve simbola B prinesejo dobiček 20 denarnih enot. Pričakovano izplačilo dogodka A_4 je potemtakem

$$E(A_4) = P(A_4) \cdot 20 = 0{,}03649633089.$$

Na koncu za doprinos k pričakovani vrednosti s strani simbola B kot razmetanega simbola obravnavane igre dobimo

$$E(B) = E(A_3) + E(A_4) + E(A_5) = 0{,}09268147.$$

Opomba 3.4. Zgornji rezultat se nam upravičeno zdi zelo velik. Pri izračunu vseh pričakovanih vrednosti v bonus igrah se bomo namreč za začetek pretvarjali, da smo že vstopili v bonus igre in da igramo le eno bonus igro. Nato bomo na koncu rezultat pomnožili z verjetnostjo, da v bonus igre vstopimo. Prav tako bomo rezultat pomnožili še z 10, saj so bonus igre vedno sestavljene iz desetih vrtljajev. Upoštevati bomo morali še verjetnost, da smo v danem tipu bonus igre – v našem primeru torej, da je bil izžreban bonus simbol P. Ta izračun je enakovreden izračunu, v katerem v vsakem delu posebej upoštevamo zgornje faktorje. Za vsak slučaj lahko preverimo, če je zgornja pričakovana vrednost po množenju z 10, verjetnostjo, da v bonus igre iz osnovne igre vstopimo, ter verjetnostjo, da je bil izžreban bonus simbol P, ustreznega reda velikosti. Velja

$$E(B)_{\text{dejanska}} = E(B) \cdot P(\text{vstop v bonus igre iz osnovne igre}) \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 0{,}000495.$$

Zgornja pričakovana vrednost je pričakovana vrednost, ki jo prinese simbol B kot razmetani simbol obravnavane igre v bonus igrah z izžrebanim bonus simbolom P.

V ta razdelek sodijo še običajni dobički na osnovni liniji. Te v praksi podobno kot v osnovni igri izračunamo tako, da zgeneriramo tabelo izidov skupaj z njihovimi dobički. Poleg tega da ne smemo ponovno šteti dobičkov, ki jih prinese simbol B kot razmetani simbol obravnavane igre, se moramo izogniti tudi dejstvu, da je simbol P bonus simbol. Doprinos lastnosti mutiranja, ki jo kot bonus simbol ima, namreč upoštevamo posebej v naslednjem razdelku. Za doprinos k pričakovani vrednosti s strani običajnih dobičkov v bonus igri z izžrebanim bonus simbolom P dobimo

$$E_{\text{običajni}} = 0{,}9743152328488041.$$

Če upoštevamo še opozorila, navedena v prejšnji opombi, dobimo dejanski doprinos k pričakovani vrednosti igre s strani običajnih dobičkov v bonus igrah z izžrebanim bonus simbolom P. Uporabimo kar enako oznako:

$$E_{\text{običajni}} = 0{,}0052084973111347355.$$

3.2.2. *Mutiranje.* V tem razdelku bomo upoštevali, da je simbol P bonus simbol v obravnavanih bonus igrah. Zaradi lastnosti mutiranja (glej predstavitev igre) nam lahko prinese še dodaten dobiček, a do mutiranja bonus simbola pride le v primeru zadostnega števila pojavitev. Potrebno in zadostno število bonus simbolov za mutacijo je enako najmanjšemu številu teh simbolov, ki kot običajni simboli prinesejo dobiček. V primeru simbola P sta to dva simbola, saj že dva prinašata dobiček (glej plačilno tabelo). Če bi bili na primer v bonus igrah z izžrebanim bonus simbolom Q, bi za mutacijo potrebovali vsaj tri pojavitve bonus simbola, saj dva simbola Q ne prineseta nobenega dobička. Za nadaljnje izračune bodo koristni spodnji podatki.

- Dolžine koles: 37, 37, 36, 37, 37.
- Število simbolov P na posameznem kolesu: 1, 1, 2, 2, 3.
- Dobiček, ki ga prineseta dva, trije, štirje, pet simbolov P:10, 100, 1000, 5000.

Ponovno si lahko pomagamo z razbitjem. Ločimo primere glede na število simbolov P, ki mutirajo. Obravnavajmo najprej pirmer, ko mutirata natanko dva simbola P. Uberemo povsem kombinatoričen pristop, pri čemer pazimo na pravila igre in na dobičke, ki smo jih že upoštevali.

Mutiranje natanko dveh simbolov P.

Posvetimo se najprej sami verjetnosti, da do tega dogodka pride. Na koncu bomo za izračun pričakovane vrednosti upoštevali še dobiček, ki ga dani izid prinese. Želimo torej, da se pojavita natanko dva simbola P. Iz koles bonus iger vidimo, da se na nobenem kolesu ne more pojaviti več kot en simbol P naenkrat. To mimogrede velja tudi za vse ostale simbole. V drugih tipih bonus iger torej na tem mestu ne pride do nikakršnih komplikacij. Natanko dva bonus simbola se potemtakem lahko pojavita le na natanko dveh različnih kolesih. Dobiček prineseta dve pojavitvi bonus simbola na dveh poljubnih kolesih, saj je, kot vemo iz pravil iger, za bonus simbol po mutiranju pomembno le v kolikšnem številu se na liniji, na katero smo stavili, pojavi. Ni namreč treba, da pride do pojavitve na začetku linije in da se simboli pojavijo zaporedoma. Izvzeti moramo le en dogodek. Ne smemo ponovno šteti dobička, ki ga prinese pojavitev natanko dveh simbolov P na začetku osnovne linije (to je linija, na katero stavimo), saj smo doprinos tega izida že upoštevali v običajnih dobičkih v prejšnjem razdelku. Pri tem dogodku namreč to, da je simbol P bonus simbol obravnavanih bonus iger, ne igra nobene vloge. Izid prinese dobiček že pred mutiranjem, mutiranje pa stanja na osnovni liniji ne spremeni. Enega izmed takih izidov prikazuje spodnji primer.

Primer 3.5.

$$\begin{array}{ccccc} J & Q & C & C & A \\ P & P & Q & A & S \\ K & J & A & J & 1 \end{array}$$

Po mutiranu je stanje na ekranu sledeče.

$$\begin{array}{ccccc} P & P & C & C & A \\ P & P & Q & A & S \\ P & P & A & J & 1 \end{array}$$

Po mutiranju se torej stanje na osnovni liniji nič ne spremeni. Pri tem že prvotno stanje prinaša dobiček, saj imamo dva simbola P na začetku osnovne linije. Ker smo ta dobiček že upoštevali v sklopu običajnih dobičkov, ga ne smemo šteti še enkrat. ♢

Dogodek pojavitve natanko dveh bonus simbolov P lahko razdelimo na deset med sabo disjunktnih dogodkov B_{ij}. Tu smo z B_{ij} označili dogodek, v katerem se bonus simbol P pojavi izključno na i-tem in j-tem kolesu. Naj še P_2 označuje dogodek pojavitve natanko dveh simbolov P, pri čemer se ne pojavita oba na začetku osnovne linije. Velja

$$P(P_2) = \sum_{ij} P(B_{ij}).$$

Oglejmo si dogodek B_{12}. Želimo, da se simbol P pojavi izključno na prvih dveh kolesih. Tako na prvem kot na drugem kolesu je le en simbol P, vendar niso vsi načini pojavitve dovoljeni. Če se osredotočimo le na prvi dve kolesi, se lahko dva simbola P na njiju pojavita na devet načinov. Izvzeti moramo primer, ko se oba pojavita na osnovni liniji. Dovoljenih izidov je torej osem. Na tretjem, četrtem in petem kolesu se simbol P ne sme pojaviti. Na tretjem in četrtem kolesu sta dva, na petem pa trije simboli P. Če upoštevamo še dolžine koles, je za nas ugodnih izidov na vsakem izmed njih 30, 31 oziroma 28. Dogodek B_{13} bi zahteval pojavitev simbola P izključno na prvem in tretjem kolesu. Tokrat so vse pojavitve simbola P na ustreznih kolesih dovoljene, saj tudi v primeru, da se oba simbola pojavita na osnovni liniji, pred mutiranjem (kot običajna simbola) ne prineseta nobenega dobička. To preprečuje simbol, ki je na osnovni liniji na drugem mestu in je različen od P. Enega izmed takih izidov prikazuje spodnji primer.

Primer 3.6.

$$\begin{array}{ccccc} J & J & A & C & A \\ P & A & P & A & S \\ K & C & Q & J & 1 \end{array}$$

Po mutiranju je stanje sledeče.

$$\begin{array}{ccccc} P & J & P & C & A \\ P & A & P & A & S \\ P & C & P & J & 1 \end{array}$$

Stanje na osnovni liniji se z mutiranjem sicer nič ne spremeni, a vseeno po mutiranju simbol P prinese dobiček, ki ga kot običajni simbol ne bi. Pred mutiranjem izid ne prinese dobička. Takrat se namreč na simbol P gleda kot na običajni simbol. Če bi torej želeli, da bi nam prinesel dobiček, bi se moral pojaviti v ustreznem številu na začetku osnovne linije, in sicer brez prekinitev. V zgornjem primeru za prekinitev poskrbi simbol A. Po mutiranju izid prinese 10 denarnih enot dobička (dva simbola P). ♢

Vrnimo se k dogodku B_{13}. Osredotočimo se zdaj na prvo in tretje kolo. Ker so po prejšnjem primeru vse možne pojavitve dveh simbolov P na dotičnih kolesih dovoljene in ker je na prvem kolesu eden, na tretjem pa dva simbola P, je vseh ugodnih izidov $3 \cdot 6 = 18$. Na ostalih kolesih se simbol P ne sme pojaviti. Na drugem kolesu nam to pusti 34, na četrtem 31, na petem pa 28 možnih izidov. Iz podobnih premislekov za ostalih osem členov razbitja sledi

$$\begin{aligned} P(P_2) &= \sum_{ij} P(B_{ij}) \\ &= \frac{(3 \cdot 3 - 1) \cdot 30 \cdot 31 \cdot 28}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} + \cdots + \frac{34 \cdot 34 \cdot 30 \cdot 6 \cdot 9}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 0{,}133089. \end{aligned}$$

Če zdaj upoštevamo še dobiček, ki ga prineseta dva simbola P, dobimo za doprinos k pričakovani vrednosti s strani mutiranja natanko dveh simbolov P

$$E(\text{mutiranje natanko dveh simbolov } P) = 1{,}3308924188832585.$$

Še enkrat se spomnimo, da to še ni končna pričakovana vrednost tega dela igre. Pretvarjamo se namreč, da smo v bonus igre že vstopili.

Mutiranje natanko treh simbolov P.

Zdaj računamo verjetnost pojavitve natanko treh simbolov P, pri čemer se ne pojavijo vsi trije na začetku osnovne linije. Označimo ta dogodek s P_3. Zopet velja, da se morajo za tovrsten izid simboli P pojaviti vsak na svojem kolesu. Naj zavoljo lažje indeksacije B_{ij} zdaj označuje dogodek, ko se pojavijo natanko trije bonus simboli P pri čemer se simbol P ne pojavi na i-tem in j-tem kolesu. Velja torej

$$P(P_3) = \sum_{ij} P(B_{ij}).$$

Oglejmo si dogodek $B_{4,5}$. Želimo, da se simbol P pojavi na prvih treh kolesih, na četrtem in petem pa se simbol P ne sme pojaviti. Osredotočimo se torej na prva tri kolesa. Prvi dve kolesi imata en simbol P, tretje pa dva. Ugodnih izidov je torej $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$. Odšteti moramo še izide, ki jih ne dopuščamo, ker smo jih šteli že v sklopu običajnih dobičkov. Taka izida sta zdaj dva, saj sta na tretjem kolesu dva simbola P. Možnih izidov je torej 52. Upoštevamo še, da se na zadnjih dveh kolesih simbol P ne sme pojaviti. Na četrtem kolesu nam tako ostane 31, na petem pa 28 izidov. Podoben razmislek naredimo še za ostalih devet členov vsote. Pri njih nam ni treba biti več pozorni na morebitne že obravnavane izide. Sledi

$$\begin{aligned} P(P_3) &= \sum_{ij} P(B_{ij}) \\ &= \frac{(3 \cdot 3 \cdot 6 - 2) \cdot 31 \cdot 28}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} + \ldots + \frac{34 \cdot 34 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 0{,}0210165. \end{aligned}$$

Če upoštevamo še dobiček, ki ga prinesejo trije simboli P, dobimo za doprinos k pričakovani vrednosti s strani mutiranja natanko treh simbolov P

$$E(\text{mutiranje natanko treh simbolov } P) = 2{,}101648565826403.$$

Mutiranje natanko štirih simbolov P.

Računamo verjetnost pojavitve natanko štirih simbolov P, pri čemer se ne pojavijo vsi na začetku osnovne linije. Označimo ta dogodek s P_4. Spet lahko dogodek zapišemo kot unijo disjunktnih dogodkov B_i (na i-tem kolesu se ne pojavi bonus simbol P). Oglejmo si dogodek B_5. Želimo, da se simbol P pojavi na vseh kolesih razen na petem. Če peto kolo sprva odmislimo in se osredotočimo na prva štiri, vidimo, da se lahko to zgodi na 324 načinov. Med njimi so štirje izidi, ki smo jih že šteli med običajnimi dobički. Iz podobnih premislekov za dogodke B_i za $i = 1, 2, 3, 4$ sledi spodnji račun:

$$\begin{aligned} P(P_4) &= \sum_{i} P(B_i) \\ &= \frac{(3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 - 4) \cdot 28 \cdot 28}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} + \ldots + \frac{34 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 0{,}0015518. \end{aligned}$$

Upoštevamo še dobiček, ki ga prinesejo štirje simboli P in dobimo

$$E(\text{mutiranje natanko štirih simbolov } P) = 1{,}5518351352359212.$$

Pri tem je opomba 3.4 še vedno aktualna.

Mutiranje natanko petih simbolov P.

Razbitje zdaj ni potrebno. Zanima nas namreč le verjetnost, da se pojavi natanko pet bonus simbolov P, torej na vsakem kolesu natanko eden. Pri tem seveda ne smejo biti vsi na osnovni liniji. Tovrstnih izidov je zdaj 12, saj je na pvih dveh kolesih po en, na tretjem in četrtem po dva, na petem pa trije simboli P. Iz podatkov o dolžinah koles sledi

$$P(P_5) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3}{37 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 37} = 4{,}304 \cdot 10^{-5}.$$

Upoštevamo še dobiček, ki ga prinese pet simbolov P in dobimo

$$E(\text{mutiranje natanko petih simbolov } P) = 0{,}2152074092531716.$$

S tem smo zajeli vse dobičke, ki jih dobimo zaradi lastnosti simbola P kot bonus simbola obravnavanih bonus iger. Če dobljene rezultate seštejemo, dobimo za doprinos k pričakovani vrednosti celotne igre s strani lastnosti simbola P kot bonus simbola obravnavanih bonus iger

$$E_{\text{mutiranje}} = 5{,}199583529198755.$$

Sedaj za končen rezultat upoštevamo še faktorje iz opombe 4.4. Uporabimo enako oznako:

$$E_{\text{mutiranje}} = 0{,}027795949316800645.$$

3.2.3. *Gnezdenje.* Upoštevati moramo še, da lahko znotraj bonus iger ponovno vstopimo v bonus igre. Verjetnost, da se to zgodi, smo že izračunali na začetku tega razdelka in jo označili s P_{BB}. To je seveda verjetnost dogodka, da v posameznem vrtljaju bonus iger vstopimo v dodatne bonus igre, vemo pa, da so vsake bonus igre sestavljene iz desetih vrtljajev. Z vstopanjem v dodatne bonus igre se torej povečuje število vrtljajev, ki jih imamo na razpolago za vstop v nadaljnje bonus igre. Prešteti vse načine, na katere lahko pride do i-tega nivoja gnezdenja (to je do vstopa v natanko $i+1$ bonus iger), ni enostavno. Sprva se morda zdi, da gre za kombinacije, a to ni res. Recimo, da nas zanima, na koliko načinov lahko pride do drugega nivoja gnezdenja. Znotraj prvotnih bonus iger bi torej radi vstopili še v dvoje bonus iger. Če bi se zadeve lotili s kombinacijami, bi med desetimi vrtljaji prvotne bonus igre izbirali dva vrtljaja, v katerih bi vstopili v druge in tretje bonus igre. S tem bi izpustili številne primere. V tretje bonus igre lahko namreč vstopimo tudi kadarkoli med vključno enajstim in dvajsetim vrtljajem bonus iger. Toliko vrtljajev imamo na voljo, ker smo pred vstopom v tretje bonus igre morali nujno vstopiti tudi v druge bonus igre, kar nam je prineslo dodatnih deset vrtljajev. Poleg tega moramo v druge bonus igre vtopiti najkasneje v desetem vrtljaju prvotnih bonus iger. Po tem se namreč bonus igre končajo in s tem se zaključi tudi vrtljaj osnovne igre, katerega sklop so obravnavane bonus igre bile. Premisleki s povečevanjem števila nivojev gnezdenj postajajo vse bolj zahtevni. Vemo, da lahko gnezdenje teoretično poteka v neskončnost, vendar bomo pokazali, da se večinoma hitro konča.

Ločili bomo primere glede na število gnezdenj in naredili izračune za nekaj začetnih nivojev. Zatem bomo iz dobljenih rezultatov izpeljali splošno formulo za verjetnost natanko n-kratnega gnezdenja (to je natanko $(n+1)$-kratnega vstopa v bonus igre). Celotno pričakovano vrednost, dobljeno s strani gnezdenja, bomo nato lahko zapisali kot vrsto, v kateri bo indeks tekel po številu gnezdenj. Na i-tem nivoju obravnavamo primer, ko pride do natanko i gnezdenj. Takrat celoten sklop gnezdenih bonus iger sestavlja natanko $i \cdot 10$ vrtljajev. Pričakovano vrednost bonus iger z izžrebanim bonus simbolom P lahko izrazimo iz enačbe

$$E_P = E_{obicajni} + E_{mutiranje} + E_{gnezdenje}.$$

Če upoštevamo zgornji razmislek, lahko enakost zapišemo kot

$$E_P = E_{obicajni} + E_{mutiranje} + \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{natanko } i \text{ gnezdenj}) \cdot i \cdot E_P.$$

Če E_P izrazimo iz zgornje enačbe, dobimo

$$E_P = \frac{E_{obicajni} + E_{mutiranje}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{natanko } i \text{ gnezdenj}) \cdot i}. \tag{1}$$

Opazimo lahko, da je vsota v imenovalcu ravno pričakovano število gnezdenj. Lotimo se izračuna edinega manjkajočega dela v zgornjem izrazu, to je verjetnosti, da pride do natanko i-tih gnezdenj. Ta verjetnost se resnično tiče le gnezdenih bonus iger. Privzemamo torej, da smo v prve bonus igre že vstopili. Zaradi kompliciranih izrazov, ki jih porodijo kombinatorični razmisleki, se splača biti čim bolj sistematičen.

Prvi nivo gnezdenja

Računamo verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger (torej verjetnost, da v bonus igre vstopimo natanko dvakrat). Premislimo, na koliko načinov lahko do tega dogodka pride. Po vstopu v prve bonus igre imamo za vstop v druge bonus igre na voljo deset vrtljajev, torej deset načinov za vstop v dodatne bonus igre. Ker nas zanima verjetnost natanko dveh vstopov v bonus igre, moramo zahtevati, da v preostalih devetnajstih vrtljajih ne pride do izida, ki bi sprožil vstop v dodatne bonus igre. Velja

$$P(\text{natanko eno gnezdenje}) = 10 \cdot P_{BB} \cdot (1 - P_{BB})^{19}.$$

Numerično nas verjetnosti zaenkrat ne zanimajo. Naš cilj je izpeljava splošne formule, zato smo pozorni predvsem na oblike izrazov, ki jih dobimo pri posameznem nivoju gnezdenja. Pri tem se osredotočamo na izraze, ki določajo število možnih načinov, na katere lahko pride do dotičnega nivoja gnezdenja. Verjetnostni del je namreč precej intuitiven za vse nivoje – člen P_{BB} bo imel potenco enako nivoju gnezdenja, člen $(1 - P_{BB})$ pa potenco enako razliki med številom odigranih bonus iger in nivojem gnezdenja.

Drugi nivo gnezdenja

Zanima nas verjetnost, da natanko trikrat vstopimo v bonus igre. V druge bonus igre lahko vstopimo v kateremkoli izmed desetih vrtljajev prvotnih bonus iger. Pozneje kot v desetem vrtljaju v druge bonus igre ne moremo vstopiti, saj se takrat, če ne pride do dodatnega vstopa v bonus igre, bonus igre zaključijo. Koliko vrtljajev imamo na voljo za vstop v tretje bonus igre, je odvisno od tega, kdaj smo vstopili v druge bonus igre. Če smo v druge bonus igre vstopili v prvem vrtljaju prvotnih bonus iger, imamo za vstop v tretje bonus igre na voljo devetnajst vrtljajev (devet preostalih od osnovne bonus igre in dodatnih deset zaradi vstopa v druge bonus igre). Če smo v druge bonus igre vstopili v drugem vrtljaju osnovnih bonus iger, imamo za vstop v tretje bonus igre na voljo osemnajst vrtljajev (osem preostalih od osnovne bonus igre in dodatnih deset zaradi vstopa v druge bonus igre). Podobno lahko razmislimo vse do primera, ko v druge bonus igre vstopimo v skrajnem, desetem vrtljaju osnovnih bonus iger. Tedaj imamo za vstop v tretje bonus igre na voljo deset vrtljajev (vseh deset pripadajočih drugim bonus igram). Tako za število načinov natanko trikratnega vstopa v bonus igre dobimo

$$19 + 18 + \ldots + 10 = \sum_{i=10}^{19} i = 145.$$

Upoštevamo še verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger in zahtevo, da v bonus igre vstopimo natanko trikrat (dvakrat znotraj prvotnih bonus iger). Dobimo

$$P(\text{natanko dve gnezdenji}) = \left(\sum_{i=10}^{19} i \right) \cdot P_{BB}^2 \cdot (1 - P_{BB})^{28}.$$

Tretji nivo gnezdenja

Da bomo prešteli število načinov, na katere lahko pride do tretjega nivoja gnezdenja, se bomo morali že malo bolj potruditi. Imejmo v mislih, da moramo v druge bonus igre vstopiti znotraj prvih desetih, v tretje znotraj prvih dvajsetih, v četrte pa znotraj prvih tridestih vrtljajev.

Recimo, da smo v druge bonus igre vstopili v prvem vrtljaju. Potem imamo za vstop v tretje bonus igre na voljo devetnajst vrtljajev. Denimo, da smo v tretje bonus igre vstopili v drugem vrtljaju. Potem imamo za vstop v četrte bonus igre na voljo osemindvajset vrtljajev. Poskusimo sistematično zapisati vse možnosti. V spodnjem zapisu prva številka predstavlja vrtljaj vstopa v druge bonus igre, druga pa vrtljaj vstopa v tretje bonus igre. Tretja številka je enaka številu vrtljajev, ki jih imamo v danem primeru na voljo za vstop v četrte bonus igre. Zgornji primer v spodnjem zapisu ustreza prvi vrstici prve matrike.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 28 \\ 1 & 3 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 19 & 11 \\ 1 & 20 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{28} i \qquad \left.\begin{matrix} 2 & 3 & 27 \\ 2 & 4 & 26 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 19 & 11 \\ 2 & 20 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{27} i \qquad \dots \qquad \left.\begin{matrix} 10 & 11 & 19 \\ 10 & 12 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 19 & 11 \\ 10 & 20 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

Posamezne vsote v zgornjem izrazu so enake številu načinov za štirikratni vstop v bonus igre, če v druge bonus igre vstopimo v navedenem vrtljaju. Ker lahko v druge bonus igre vstopimo le v prvih desetih vrtljajih, smo v zgornjem izrazu zajeli vse možnosti. Število načinov za štirikratni vstop v bonus igre je torej

$$\sum_{i=10}^{28} i + \ldots + \sum_{i=10}^{19} i = \sum_{j=0}^{9} \sum_{i=10}^{28-j} i.$$

Spodnji račun nam da verjetnost obravnavanega dogodka:

$$P(\text{natanko tri gnezdenja}) = \left(\sum_{j=0}^{9} \sum_{i=10}^{28-j} i \right) \cdot P_{BB}^3 \cdot (1 - P_{BB})^{37}.$$

Četrti nivo gnezdenja

Pomnimo, da lahko v druge bonus igre vstopimo najkasneje v desetem, v tretje najkasneje v dvajsetem, v četrte najkasneje v tridesetem, v pete pa najkasneje v štiridesetem vrtljaju. Predstavljajmo si enega izmed dveh najbolj skrajnih primerov. Recimo, da v druge bonus igre vstopimo v prvem, v tretje v drugem in v četrte v tretjem vrtljaju. Tedaj imamo za vstop v pete bonus igre na voljo sedemintrideset vrtljajev. Uporabimo podoben zapis kot pri tretjem nivoju gnezdenja. Prva številka naj predstavlja vrtljaj vstopa v druge, druga vrtljaj vstopa v tretje, tretja pa vrtljaj vstopa v četrte bonus igre. Četrta številka šteje število načinov za petkratni vstop pri danih indeksih za prve štiri vstope in je enaka številu vrtljajev, v katerih lahko vstopimo v pete bonus igre. Zgornjemu skrajnemu primeru ustreza prva vrstica prve matrike.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 37 \\ 1 & 2 & 4 & 36 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 29 & 11 \\ 1 & 2 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{37} i \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 36 \\ 1 & 3 & 5 & 35 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 29 & 30 \\ 1 & 3 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{36} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 1 & 20 & 21 & 19 \\ 1 & 20 & 22 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 20 & 29 & 11 \\ 1 & 20 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 36 \\ 2 & 3 & 5 & 35 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 29 & 11 \\ 2 & 3 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{36} i \quad \left.\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 35 \\ 2 & 4 & 6 & 34 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 29 & 11 \\ 2 & 4 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{35} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 2 & 20 & 21 & 19 \\ 2 & 20 & 22 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 20 & 29 & 11 \\ 2 & 20 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 28 \\ 10 & 11 & 13 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 11 & 29 & 11 \\ 10 & 11 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{36} i \quad \left.\begin{matrix} 10 & 12 & 13 & 27 \\ 10 & 12 & 14 & 26 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 12 & 29 & 11 \\ 10 & 20 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{35} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 10 & 20 & 21 & 19 \\ 10 & 20 & 22 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 20 & 29 & 11 \\ 10 & 20 & 30 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

Če seštejemo vse dobljene vsote, dobimo število načinov vstopa v natanko pet bonus iger (to je število načinov, na katere lahko pride do natanko četrtega nivoja gnezdenja). Opaziti se splača, da so si vrstice vsot, ki jih porodijo matrike v zgornjem izrazu, med seboj podobne. Vsako izmed njih lahko zapišemo s podobnim izrazom (zadnjo celo z enakim), s kakršnim smo zapisali število načinov natanko štirikratnega vstopa v bonus igre (tretji nivo gnezdenja).

- Prva vrstica:
$$\sum_{j=0}^{18} \sum_{i=10}^{37-j} i.$$
- Druga vrstica:
$$\sum_{j=0}^{17} \sum_{i=10}^{36-j} i.$$

$$\vdots$$

- Deseta vrstica:
$$\sum_{j=0}^{9} \sum_{i=10}^{28-j} i.$$

Z uvedbo dodatnega indeksa lahko število načinov natanko petkratnega vstopa v bonus igre zapišemo kot

$$\sum_{k=0}^{9} \sum_{j=0}^{18-k} \sum_{i=10}^{37-j-k} i.$$

Verjetnost za natanko petkratni vstop v bonus igre (natanko štiri gnezdenja) je torej enaka

$$P(\text{natanko štiri gnezdenja}) = \left(\sum_{k=0}^{9} \sum_{j=0}^{18-k} \sum_{i=10}^{37-j-k} i \right) \cdot P_{BB}^4 \cdot (1-P_{BB})^{46}.$$

Peti nivo gnezdenja

Izračunajmo še verjetnost natanko šestkratnega vstopa v bonus igre. Naredimo razmislek za enega izmed skrajnih primerov. Denimo, da v druge bonus igre vstopimo v prvem, v tretje v drugem, v četrte v tretjem in v pete v četrtem vrtljaju. Ker smo v bonus igre vstopili petkrat, bomo vse skupaj odigrali petdeset vrtljajev. Za vstop v šeste bonus igre nam jih torej preostane šestinštirideset. Uporabimo enak zapis kot v prejšnjih primerih. Prva številka predstavlja indeks vstopa v druge, druga v tretje, tretja v četrte in četrta v pete bonus igre. Peta številka šteje število načinov za natanko petkratni vstop v bonus igre oziroma število prostalih vrtljajev za vstop v šeste bonus igre pri danih indeksih vstopa v prvih pet bonus iger. Zgornjemu skrajnemu primeru ustreza prva vrstica prve matrike.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 46 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{46} i \quad \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 45 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 4 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{45} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 30 & 31 & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 30 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 45 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 4 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{45} i \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 44 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 5 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{44} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 & 30 & 31 & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 30 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 20 & 21 & 22 & 28 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 20 & 21 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{28} i \quad \left.\begin{matrix} 1 & 20 & 22 & 23 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 20 & 22 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{27} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 1 & 20 & 30 & 31 & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 20 & 30 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 37 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 11 & 12 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{37} i \quad \left.\begin{matrix} 10 & 11 & 13 & 14 & 36 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 11 & 13 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{36} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 10 & 11 & 30 & 31 & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 11 & 30 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{matrix} 10 & 20 & 21 & 22 & 28 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 20 & 21 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{28} i \quad \left.\begin{matrix} 10 & 20 & 22 & 23 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 20 & 22 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{27} i \quad \dots \quad \left.\begin{matrix} 10 & 20 & 30 & 31 & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 10 \end{matrix}\right\} \sum_{i=10}^{19} i$$

Če seštejemo vse dobljene vsote, dobimo število načinov vstopa v natanko šest bonus iger (to je število načinov, na katere lahko pride do petega nivoja gnezdenja).

Zopet lahko opazimo, da so si vrstice vsot, ki jih porodijo matrike v zgornjem izrazu, med seboj podobne. Vsako izmed njih lahko zapišemo s podobnim izrazom, s kakršnim smo zapisali število načinov natanko petkratnega vstopa v bonus igre (četrti nivo gnezdenja). Vseh vrstic je toliko, kolikor je načinov vstopa v natanko tri bonus igre (v nove vrstice prehajamo s spreminjanjem indeksa tretjega vstopa v bonus igre – glej zgornji zapis). Število načinov vstopa v natanko tri bonus igre smo že izračunali in je enako 145.

- Prva vrstica:
$$\sum_{k=0}^{18}\sum_{j=0}^{27-k}\sum_{i=10}^{46-j-k} i.$$
- Druga vrstica:
$$\sum_{k=0}^{17}\sum_{j=0}^{26-k}\sum_{i=10}^{45-j-k} i.$$
$$\vdots$$
- Stopetinštirideseta vrstica:
$$\sum_{k=0}^{9}\sum_{j=0}^{18-k}\sum_{i=10}^{37-j-k} i.$$

Z uvedbo novega indeksa za število načinov za natanko šestkratni vstop v bonus igre (peti nivo gnezdenja) dobimo

$$\sum_{l=0}^{9}\sum_{k=0}^{18-l}\sum_{j=0}^{27-k-l}\sum_{i=10}^{46-j-k-l} i.$$

Verjetnost natanko šestkratnega vstopa v bonus igre (natanko pet gnezdenj) je torej enaka

$$P(\text{natanko pet gnezdenj}) = \left(\sum_{l=0}^{9}\sum_{k=0}^{18-l}\sum_{j=0}^{27-k-l}\sum_{i=10}^{46-j-k-l} i\right)\cdot P_{BB}^{5}\cdot(1-PBB)^{55}.$$

Naredili smo izračune za prvih pet nivojev gnezdenja in kot rezultat za število načinov, da do posmeznega nivoja gnezdenja pride, dobili naslednje rezultate.

- Prvi nivo:
$$10.$$
- Drugi nivo:
$$\sum_{i=10}^{19} i.$$
- Tretji nivo:
$$\sum_{j=0}^{9}\sum_{i=10}^{28-j} i.$$
- Četrti nivo:
$$\sum_{k=0}^{9}\sum_{j=0}^{18-k}\sum_{i=10}^{37-j-k} i.$$

- Peti nivo:
$$\sum_{l=0}^{9}\sum_{k=0}^{18-l}\sum_{j=0}^{27-k-l}\sum_{i=10}^{46-j-k-l} i.$$

Zdaj, ko imamo vse rezultate na enem mestu, lahko z nekaj premisleka izpeljemo splošno formulo za število načinov, na katere lahko pride do natanko n-kratnega gnezdenja. Z vsakim gnezdenjem izraz očitno dobi dodaten sumacijski znak. Število gnezdenih vsot je enako nivoju gnezdenja bonus iger manj ena (na drugem nivoju imamo eno vsoto, na tretjem dve in tako naprej). Spodnja meja indeksa je v vseh vsotah z izjemo zadnje enaka nič. V prvi vsoti indeks vedno teče do devet. Zgornje meje preostalih vsot (z izjemo zadnje) dobimo tako, da od produkta devetke in zaporedne številke vsote odštejemo indekse vseh prejšnjih vsot. Zgornja meja druge vsote je tako enaka $9 \cdot 2 - i_1$, kjer je i_1 indeks prve vsote. Spodnja meja najbolj notranje vsote je vedno deset, saj imamo za zadnji vstop v bonus igre vselej na voljo vsaj deset vrtljajev. Zgornjo mejo dobimo tako, da devetko množimo z nivojem gnezdenja, dobljenemu prištejemo ena in odštejemo indekse vseh prejšnjih vsot. Splošna formula za število načinov, na katere lahko pride do natanko n-tega nivoja gnezdenja, je torej

$$G_n = \sum_{i_1=0}^{9}\sum_{i_2=0}^{2\cdot 9-i_1}\cdots\sum_{i_{n-2}=0}^{(n-2)\cdot 9-i_1-\ldots-i_{n-3}}\ \sum_{i_{n-1}=10}^{n\cdot 9+1-i_1-\ldots-i_{n-2}} i_{n-1}.$$

Opomba 3.7. Število načinov, na katere lahko pride do n-tega nivoja gnezdenja, zelo hitro narašča. Naprimer že za sedmi nivo gnezdenja dobimo skoraj štiristo milijonov možnosti. Še precej hitreje se manjša verjetnost n-kratnega vstopa v bonus igre (del izrazov s P_{BB} in $(1 - P_{BB})$). Navkljub hitremu naraščanju števila načinov gnezdenja je torej strah pred divergenco obravnavane vrste odveč, a konvergenca ni vse, kar od dane vrste pričakujemo. V enačbi (1), ki nam bo dala končni rezultat pričakovane vrednosti bonus iger z izžrebanim bonus simbolom P, namreč vrsto odštejemo od števila 1. Če bi nam torej vrsta dala rezultat, večji od ena, bi za E_P dobili negativno vrednost. Seveda se tudi to ne zgodi. Spodaj je za občutek hitrosti padanja členov navedenih nekaj začetnih členov vrste (verjetnosti so že pomnožene s faktorjem i). Označimo i-ti člen te vrste z V_i.

$V_1 = 0{,}03039616296382084$
$V_2 = 0{,}128385$
$V_3 = 0{,}020506$
$V_4 = 0{,}00983705$
$V_5 = 0{,}0047171279$
$V_6 = 0{,}002265641$
$\vdots$

Opazimo, da je zaporedje na začetku celo naraščajoče. Največji je drugi člen. Sklepamo lahko, da bo v primeru gnezdenja najverjetneje prišlo do drugega nivoja gnezdenja. Ta razplet je bolj verjeten tudi od tega, da bonus igre zapustimo že po prvem gnezdenju. Povedano drugače – če smo vstopili v bonus igre znotraj bonus iger, bomo najverjetneje v bonus igre vstopili še natanko enkrat.

Komentirajmo zdaj še zgornjo formulo za število načinov, na katere lahko pride do natanko n-kratnega gnezdenja. Izraz je zelo kompliciran in tudi za računalnik predstavlja velik zalogaj. Velika časovna zahtevnost seveda izhaja iz izjemno velikega števila vsot, ki tvorijo izraz. V namene računanja se da formulo sicer nekoliko izboljšati, a le do te mere da je praktično uporabna do desetega nivoja gnezdenja. Opazimo lahko namreč, da se v izrazu za izračun števila načinov natanko n-kratnega gnezdenja, številne vsote ponovijo. Ne samo to – te vsote so celo rezultat prejšnjega nivoja gnezdenja. S preoblikovanjem dobljene formule lahko torej izpeljemo nekakšno rekurzivno zvezo, ki nekoliko pohitri izračune. Dobimo enakost

$$G_n = 10 \cdot G_{n-1} + \sum_{i_1=0}^{9} i_1 \cdot \sum_{i_2=0}^{3\cdot 9+1-i_1} \cdots \sum_{i_{n-3}=0}^{(n-2)\cdot 9+1-i_1-\ldots-i_{n-4}} \sum_{i_{n-2}=10}^{n\cdot 9+2-i_1-\ldots-i_{n-3}} i_{n-2}.$$

Morda se bi dalo z dodatnim razmislekom formulo še nekoliko izboljšati, a bomo na srečo opazili, da členi dotične vrste padajo tako hitro, da lahko njen ostanek brez slabe vesti zanemarimo. Časovno gledano tudi dejstvo, da izračuni potekajo v Mathematici [8], pušča prostor za izboljšave.

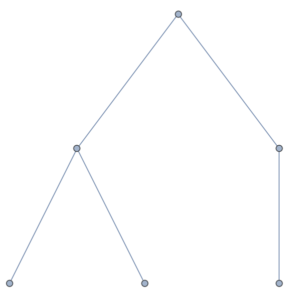
Zdaj lahko določimo končni rezultat tega razdelka – pričakovano vrednost bonus iger z izžrebanim bonus simbolom P. Zaradi kompleksnosti splošne formule za število načinov, na katere lahko pride do natanko n-kratnega gnezdenja, smo se primorani zateči k aproksimaciji

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\text{natanko } i \text{ gnezdenj}) \cdot i = \sum_{i=1}^{10} P(\text{natanko } i \text{ gnezdenj}) \cdot i = 0{,}319238.$$

Upoštevajoč rezultate za pričakovano vrednost doprinosa običajnih dobičkov in mutiranja k pričakovani vrednosti bonus iger z izžrebanim bonus simbolom P dobimo

$$E_P = \frac{E_{obicajni} + E_{mutiranje}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{natanko } i \text{ gnezdenj}) \cdot i} = 0{,}04848162298708709.$$

Opomba 3.8. Izračunov v povezavi z gnezdenjem bonus iger smo se lotili na najbolj direkten način, ki je intuitivno morda najbolj jasen, a zaradi kombinatoričnih premislikov tehnično precej zahteven in ne preveč eleganten. Ena od alternativ so rodovne funkcije. Gnezdenje bonus iger lahko obravnavamo kot proces razvejanja. Na začetku imamo eno osebo – to je eno bonus igro (skupek desetih vrtljajev). Ta bonus igra ima z verjetnostjo $(1-P_{BB})^{10}$ nič potomcev, z verjetnostjo $P_{BB}\cdot(1-P_{BB})^9$ enega potomca in tako naprej. Največje možno število potomcev je deset; v vsakem vrtljaju bonus igre vstopimo v nove bonus igre. To se zgodi z verjetnostjo P_{BB}^{10}. Tudi vsi morebitni potomci prvotne bonus igre imajo nadaljnje potomce z enako porazdelitvijo. Označimo z Z_i število oseb v i-ti generaciji.



$Z_0 = 1$

$Z_1 = 2$

$Z_2 = 3$

Ker je verjetnost P_{BB} zelo majhna, lahko pričakujemo, da se bo proces razvejanja dokaj hitro zaključil. To pomeni, da bo Z_i različen od nič le za $i \leq n$ za nek »majhen« $n \in \mathbb{N}$. Zanima nas porazdelitev slučajne spremenjivke $W_n := Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n$. Tako definirana slučajna spremenljivka predstavlja število odigranih bonus iger. Potrebujemo njeno pričakovano vrednost. Če poznamo rodovno funkcijo neke slučajne spremenljivke, poznamo tudi njeno porazdelitev. Lahko torej izračunamo dotično pričakovano vrednost. Izpeljimo rekurzivno zvezo, ki bi bila lahko osnova za nadaljnje izračune na podlagi tega pristopa. Za rodovne funkcije po definiciji velja enakost $G_X(s) = E(s^X)$. Oglejmo si rodovno funkcijo $G_{W_n}(s)$:

$$G_{W_n}(s) = E(s^{Z_0+\ldots+Z_n}) = E(E(s^{Z_0+\ldots+Z_n}|Z_0)).$$

Upoštevamo neodvisnost in predpostavko, da je $Z_0 = 1$ (na začetku imamo eno bonus igro). Če želimo, da se zaključi celoten proces razvejanja, se mora zaključiti vsak izmed Z_1 podprocesov. Velja

$$E(E(s^{Z_0+\ldots+Z_n}|Z_0)) = s \cdot E(G_{W_{n-1}}^{Z_1}(s)) = s \cdot G_{Z_1}(G_{W_{n-1}}(s)).$$

Na podlagi te enakosti bi lahko z dodatnimi razmisleki prišli do rezultata na bolj eleganten način. Vprašanje je, če bi bilo enostavno iz končne zveze dobiti numeričen rezultat.

Možen je še en pristop, s katerim do rezultata pridemo zelo hitro. Vse, kar v resnici potrebujemo za izračun pričakovane vrednosti dobička igre, je pričakovano število gnezdenj. To se s pričakovanim številom bonus iger izraža na sledeč način:

$$E(\text{število bonus iger}) = 10 + 10 \cdot E(\text{število gnezdenj}).$$

Pričakovano število bonus iger lahko izračunamo iz naslednje zveze:

$$E(\text{število bonus iger}) = 10 + 10 \cdot P_{BB} \cdot E(\text{število bonus iger}).$$

Ideja je podobna kot pri rodovnih funkcijah. Ko enkrat vstopimo v bonus igre, bomo gotovo odigrali vsaj deset iger. V vsaki izmed teh desetih iger imamo možnost vstopiti v dodatne bonus igre, v katerih je pričakovano število odigranih iger enako pričakovanemu številu odigranih bonus iger. Enačbo nekoliko preoblikujemo in dobimo

$$E(\text{število bonus iger}) = \frac{10}{1 - 10 \cdot P_{BB}} = 13{,}1947766.$$

Seveda se vprašamo, če se to ujema z rezultatom, ki smo ga dobili na podlagi kombinatoričnega pristopa. Tam smo izračunali, da je pričakovano število gnezdenj enako 0,319238. Iz zgornje zveze med številom gnezdenj in številom bonus iger dobimo

$$E(\text{število bonus iger}) = 10 + 10 \cdot 0{,}319238 = 13{,}19238.$$

Rezultata se torej zelo dobro ujemata. Razlika očitno nastane zaradi aproksimacije, ki smo jo naredili v kombinatoričnem pristopu.

Čeprav obstajajo bistveno hitrejši in bolj elegantni načini izračuna, našega pristopa ne smemo podcenjevati. Da nam namreč precej več informacij o slučajni spremenljivki, kot zgornja pristopa. Kar smo s kombinatoričnimi premisleki izpeljali, je algoritem za generiranje porazdelitve dane slučajne spremenljivke. To nam bi v primeru nadaljne analize lahko prišlo prav.

4. Končni rezultat in simulacija

V prvem delu smo izračunali doprinos osnovne igre, v prejšnjem poglavju pa doprinos bonus igre z izžrebanim bonus simbolom P k pričakovani vrednosti celotne igre. Izračun za ostale tipe bonus iger poteka podobno. Doprinos običajnih dobičkov je neodvisen od izžrebanega bonus simbola. Prav tako tip igre ne vpliva na verjetnosti povezane z gnezdenjem. Edina razlika v rezultatu nastane v sklopu mutiranja. Če torej izračunamo še pričakovano vrednost ostalih tipov bonus iger, dobimo končni rezultat

$$E = E_{osnovna} + E_{bonus} = 0{,}9352057116435764.$$

Igralec dane igre na srečo lahko potemtakem pričakuje, da bo na dolgi rok izgubil približno 6,5 odstotka vloženega denarja. Rezultat se sklada s pričakovanji, navedenimi v uvodu. Igra na dolgi rok zagotavlja dobiček igralnici, a hkrati igralcu dopušča dovolj mamljivo možnost zaslužka. Če ne drugega, se lahko nadeja, da njegove izgube, relativno gledano, ne bodo prevelike. Posledično bo v igri najverjetneje vztrajal, s čimer bo povečeval svojo absolutno izgubo oziroma dobiček igralnice.

4.1. Simulacija.

Simulacija poteka v Pythonu [7] in je v skladu s predpostavkami izračuna. Privzemamo torej, da stavimo le eno denarno enoto na osnovno linijo. Poleg tega odmislimo del igre, imenovan tveganje. Izid generiramo z izbiro naključnih celih števil v mejah dolžin koles, pri čemer so izbire neodvisne in je vsako izmed števil izbrano z enako verjetnostjo. Najprej upoštevamo izid na osnovni liniji. Morebiten dobiček poiščemo v tabeli izidov in njim pripadajočih dobičkov, ki smo jo zgenerirali že za potrebe izračuna. Zatem preverimo število simbolov B na ekranu. Če se jih je pojavilo dovolj, se izžreba bonus simbol in simulacija preide v bonus igre. Te so zavoljo gnezdenja vpeljane z lastno funkcijo, katere argument je izžrebani bonus simbol. Kot v osnovni igri tudi tokrat zgeneriramo izid in preverimo stanje na osnovni liniji. V primeru zadostnega števila pojavitev bonus simbolov vzamemo v zakup še lastnost mutiranja. Zaradi večih možnosti števila pojavitev in različnih dobičkov, ki jih posamezni simboli prinašajo, moramo na tem mestu ločiti veliko primerov. Funkcija, ki simulira bonus igre, se po desetih izidih zaključi. Če je v kakšnem izmed izidov izpolnjen pogoj za dodaten vstop v bonus igre, funkcija kliče samo sebe z istim argumentom. V končni fazi funkcija vrne skupni dobiček bonus iger, ki se prišteje dotedanjemu izkopičku v osnovnih igrah. Dobljeni rezultat se v zaključku deli s številom iger, ki smo jih simulirali. Za več informacij o poteku simulacije naj bralec gleda priloge.

Simulacija nadomešča veliko bazo podatkov o finančnih izidih igranja igre na srečo, do katere razumljivo nimamo dostopa. Simuliramo lahko zelo veliko število iger. Če so naši izračuni – in seveda tudi simulacija – kolikor toliko pravilni, mora pričakovani izkupiček, ko pošljemo število iger, ki jih simuliramo, proti neskončno, konvergirati proti dobljenemu rezultatu. Pričakovana vrednost torej napoveduje izkupiček v limiti, zato so vsi rezultati, ki nam jih vrne simulacija, le njen približek. Ta naj bi bil z večanjem števila simuliranih iger vedno boljši. V spodnji tabeli so navedeni rezultati simulacije in rezultati izračunov za posamezne dele igre ter celotno igro. Za posamezne tipe bonus iger je bilo simuliranih tisoč iger, za osnovno igro in igro v celoti pa milijon.

del igre	simulacija	izračun
osnovna	0,50833	0,50471
bonus P	0,04994	0,04848
bonus M	0,04071	0,04197
bonus S	0,03993	0,03887
bonus C	0,03434	0,03709
bonus A	0,05317	0,05605
bonus K	0,06215	0,06661
bonus Q	0,05262	0,05476
bonus J	0,05272	0,05407
bonus 1	0,04649	0,04810
celotna igra	0,93624	0,93521

Simulacija in izračun se precej dobro ujemata. Pri posamzenih tipih bonus iger, kjer smo simulirali le tisoč iger, so razlike vidno večje kot pri osnovni igri in celotni igri. Simulacija je seveda le približek. Z njeno pomočjo lahko izračunamo tudi oceno variance dobička. Ta pri simulaciji sto tisočih iger znaša 187. Povprečni dobiček je potemtakem porazdeljen normalno $N(0{,}93521; 0{,}00187)$. Ocenjujemo torej, da se bo z verjetnostjo 68% ocena na podlagi simulacije od dejanske vrednosti razlikovala za manj kot

$$se(\overline{X}) = \sqrt{0{,}00187} = 0{,}0432.$$

Omenimo na tem mestu, da uradna pričakovana vrednost avtorjev igre na srečo znaša 0,92167. Možnost, da sta oba rezultata pravilna, ni izključena. Povsem verjetno je, da smo bili za nekatere podatke o pravilih igre prikrajšani ali pa smo si kakšen del igre narobe interpretirali in posledično dobili malenkost drugačen rezultat od uradnega. Rezultati simulacije kažejo na to, da se naša izračunana pričakovana vrednost dobro ujema z rezultati iz prakse (oziroma njihovo simulacijo). Samozavestno lahko torej trdimo, da so bili izračuni, glede na podatke, ki jih imamo o igri na razpolago, korektni in posledično tudi rezultat pravilen. Odstopanje od uradne pričakovane vrednosti ne more izvirati iz edine aproksimacije v našem izračunu. To, da smo vsoto dane vrste nadomestili z vsoto njenih prvih desetih členov, je namreč končni rezultat kvečjemu zmanjšalo.

Omenim lahko še, da obstaja precej verzij igre Book of Ra, ki jih lahko brez tveganja igramo tudi na spletu [5, 6]. Njihove pričakovane vrednosti znašajo od 0,92 do več kot 0,94, čeprav sam med njimi nisem opazil nikakršne razlike. Prav tako so na videz ustrezale podatkom in pravilom igre, ki smo jo obravnavali v diplomski nalogi. Kljub temu so se seveda lahko razlikovale v kolesju, tabeli verjetnosti za določanje bonus simbola ali v kakšnem drugem gradniku igre, ki je očem skrit.

5. Priloge

Priloga 1 - Pričakovana vrednost; Python

```
import random
#Podatki potrebni za analizo.
def prestej():
    with open('BG.txt') as f:
        i=0
        for line in f.readlines():
            i+=1
```

```
    return i

#Kolesa:

#Osnovna igra.
kolo1='ASPJAQMJCKSJACP1JCPMCJPMCKQACQSPAS1QPSAQMPSCB1MS1K'
kolo2='JS1PACSK1SQC1PMJ1PB1CJS1JAPK1AQPSQASQK1QMPJC1'
kolo3='1PACQ1SJK1PSQJA1QKS1AP1QSJQS1AMCPKMC1PK1JAPKBP'
kolo4='1JMQ1JP1KJCMQCK1JCAMCSKQJMPSJQA1MAQ1KQBACJA1PACMAB'
kolo5='MP1QSKJC1APMSAJSM1QAPQ1JBMCPMKCSQAKPAS1JCPAQMPABQ'
kolesa=[kolo1,kolo2,kolo3,kolo4,kolo5]

#Bonus igre.
kolo1_B='J1QJSAC1AMQK1MCQKJCBQAJSCP1BCKQAJCMQK'
kolo2_B='CBQMA1QPSMBKJ1MJ1MASC1KC1SJQCJACSQCJM'
kolo3_B='CQJA1KMCQMCSPA1KAM1JCKJCPA1KS1CJSC1B'
kolo4_B='AQJ1QMKA1CKJQSJKAMB1CKJBKJ1SCPJMPJAK1'
kolo5_B='AC1SMJKS1PKQAJSC1AMPQ1CAMB1SJKSAMPBMQ'
kolesa_B=[kolo1_B,kolo2_B,kolo3_B,kolo4_B,kolo5_B]


#Pomožna funkcija, ki izračuna verjetnost za vstop v bonus igro
#v osnovni igri.

def osnovna():
    #Tri knjige.
    tri=(3*3*3*44*43)+(3*3*6*43*43)+(3*3*6*43*44)+(3*3*6*42*43)+\
           (3*3*6*42*44)+(3*6*6*42*43)+ (3*3*6*47*43)+(3*3*6*47*44)+\
           (3*6*6*47*43)+(3*6*6*47*42)

    #Štiri knjige.
    stiri=(3*3*3*6*43)+(3*3*3*6*44)+(3*3*6*6*43)+(3*3*6*6*42)+\
          (3*3*6*6*47)

    #Pet knjig.
    pet=3*3*3*6*6
    return (tri+stiri+pet)/(50*45*46*50*49)

#Pomožna funkcija, ki izračuna verjetnost za vstop v dodatno bonus
#igro znotraj bonus igre. Ni potrebno ločiti primerov glede na to v
#katerem tipu bonus igre sem (kateri bonus simbol je bil izžreban),
#saj so kolesa v vseh bonus igrah enaka.

def bonus():
    #Tri kjige.
    tri=(6*6*3*31*31)+(6*6*6*33*31)+(6*6*6*33*31)+(6*3*6*31*31)+\
           (6*3*6*31*31)+(6*6*6*31*33)+(6*3*6*31*31)+(6*3*6*31*31)+\
           (6*6*6*31*33)+(3*6*6*31*31)
```

```
    #Štiri knjige.
    stiri=(6*6*3*6*31)+(6*6*3*6*31)+(6*6*6*6*33)+(6*3*6*6*31)+\
          (6*3*6*6*31)

    #Pet knjig.
    pet=(6*6*3*6*6)
    return (tri+stiri+pet)/(37*37*36*37*37)

################################################################
#Funkcija pricakovana_vrednost_BG računa pričakovano
#vredost osnovne igre. Uporabim jo tudi za računanje doprinosa
#'običajnih dobičkov' (dobičkov, ki niso plod mutiranja) v
#bonus igrah.  Funkcija je sestavljena iz dveh delov - posebej
#obravnavam simbol B(book), ker je scatter in posebej vse
#ostale (običajne) dobičke, pri čemer moram biti pozoren,
#da tistih s simbolom book ne štejem dvakrat.
#Dejstvo, da je simbol book joker, je zajeto v običajnih dobičkih.
################################################################

def pricakovana_vrednost_BG(file='BG_1.txt',tip=kolesa):
    E=0
    #Obravnavam simbol book.
    imenovalec=len(tip[0])*len(tip[1])*len(tip[2])*len(tip[3])*
               len(tip[4])
    #Trije simboli book.
    tri=((((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*
        (tip[2].count('B')*3)*
        (len(tip[3])-3*(tip[3].count('B')))*(len(tip[4])-3*
        (tip[4].count('B'))))/imenovalec)+\
        (((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*(len(tip[2])-3*
        (tip[2].count('B')))*(tip[3].count('B')*3)*
        (len(tip[4])-3*(tip[4].count('B'))))/imenovalec)+\
        (((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*(len(tip[2])-3*
        (tip[2].count('B')))*(len(tip[3])-3*(tip[3].count('B')))*
        (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
        (((tip[0].count('B')*3)*(len(tip[1])-3*(tip[1].count('B')))*
        (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*(len(tip[4])-3*
        (tip[4].count('B'))))/imenovalec)+\
        (((tip[0].count('B')*3)*(len(tip[1])-3*(tip[1].count('B')))*
        (tip[2].count('B')*3)*(len(tip[3])-3*(tip[3].count('B')))*
        (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
        (((tip[0].count('B')*3)*(len(tip[1])-3*(tip[1].count('B')))*
        (len(tip[2])-3*(tip[2].count('B')))*(tip[3].count('B')*3)*
        (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
        (((len(tip[0])-3*(tip[0].count('B')))*(tip[1].count('B')*3)*
        (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*(len(tip[4])-3*
        (tip[4].count('B'))))/imenovalec)+\
        (((len(tip[0])-3*(tip[0].count('B')))*(tip[1].count('B')*3)*
        (tip[2].count('B')*3)*(len(tip[3])-3*(tip[3].count('B')))*
```

```
    (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
    (((len(tip[0])-3*(tip[0].count('B')))*(tip[1].count('B')*3)*
    (len(tip[2])-3*(tip[2].count('B')))*(tip[3].count('B')*3)*
    (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
    (((len(tip[0])-3*(tip[0].count('B')))*(len(tip[1])-3*
    (tip[1].count('B')))*(tip[2].count('B')*3)*
    (tip[3].count('B')*3)*(tip[4].count('B')*3))/imenovalec))*2

#Štirje simboli book.
stiri=((((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*
          (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*
          (len(tip[4])-3*
          (tip[4].count('B'))))/imenovalec)+\
          (((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*
          (tip[2].count('B')*3)*(len(tip[3])-3*
          (tip[3].count('B')))*
          (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
          (((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*
          (len(tip[2])-3*(tip[2].count('B')))*
          (tip[3].count('B')*3)*
          (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
          (((tip[0].count('B')*3)*(len(tip[1])-3*
          (tip[1].count('B')))*
          (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*
          (tip[4].count('B')*3))/imenovalec)+\
          (((len(tip[0])-3*(tip[0].count('B')))*
          (tip[1].count('B')*3)*
          (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*
          (tip[4].count('B')*3))/imenovalec))*20


#Pet simbolov book.
pet=(((tip[0].count('B')*3)*(tip[1].count('B')*3)*
     (tip[2].count('B')*3)*(tip[3].count('B')*3)*
     (tip[4].count('B')*3)/imenovalec))*200



#Upoštevam še vse ostale (običajne) dobičke.
with open(file) as f:
    for line in f.readlines():
        P=1
        for i in range(5):
            P=P*(tip[i].count(line[i])/len(tip[i]))
        E+=P*int(line[6:])
return E


################################################################
```

```
#Naslednjih 9 funkcij računa pričakovano vrednost posameznih
#tipov bonus iger (glede na izžrebani bonus simbol).
#Posamezna funkcija je sestavljena iz treh delov.
#V prvem delu so zajeti običajni dobički,
#katerih pričakovano vrednost dobim s pomočjo funkcije
#pricakovana_vrdnost_BG(file,tip). V drugem delu
#obravnavam dobičke, ki jih prinese mutiranje bonus simbola.
#Na koncu upoštevam še dejstvo, da lahko znotraj bonus igre
#vstopim v dodatne bonus igre z istim bonus simbolom.
#Opomba: Bonus igre so vselej sestavljene iz desetih vrtljajev,
#zato bi morda človek sprva mislil, da je potrebno za izračun
#pričakovane vrednosti iti čez vse možne deseterice iger,
#a lahko zaradi linearnosti pričakovane vrednosti, računamo
#pričakovano vrednost za eno igro in rezultat pomnožimo z deset.
################################################################

def pricakovana_P():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.1*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje.

    #Podatki:
    #število simbolov P na posameznem kolesu: 1,1,2,2,3
    #dobiček, ki ga prineseta dva,trije,štirje,pet simbolov P:
    #10,100,1000,5000
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Mutiranje deveh simbolov P. Grem čez vse načine na katere
    #lahko dobim natanko dva simbola P, pri čemer nista oba
    #NA OSNOVNI LINIJI NA ZAČETKU (ti dobitki so že upoštevani
    #v prvem delu funkcije(v resnici je v sami igri ravno
    #obratno - v osnovne dobitke bonus simbol ni vštet,
    #ampak se njegov doprinos upošteva naknadno po mutiranju,
    #a lahko zaradi nekakšne simetrije računamo na
    #zgoraj omenjeni način, ki dovoljuje reciklacijo funkcije
    #pricakovana_vrednost in je, kar se mene tiče bolj pregleden);
    #mutiranje v teh primerih ne igra nobene vloge). Pozor!
    #To še ni vse! Bonus simbol je tudi nekakšen 'semiscatter' -
    #dobiček prinaša, če se v ustreznem številu pojavi
    #na liniji na katero smo stavili, neglede na to kje na liniji
    #se pojavi (ne nujno na začetku, ne nujno skupaj).

    P_2=((((3*3-1)*30*31*28)/imenovalec)+
    ((3*34*6*31*28)/imenovalec)+((3*34*30*6*28)/imenovalec)+\
    ((3*34*30*31*9)/imenovalec)+
    ((34*3*6*31*28)/imenovalec)+((34*3*30*6*28)/imenovalec)+\
    ((34*3*30*31*9)/imenovalec)+
```

```
    ((34*34*6*6*28)/imenovalec)+((34*34*6*31*9)/imenovalec)+\
    ((34*34*30*6*9)/imenovalec))*10*10*0.1*osnovna()

    #Mutiranje treh simbolov P.
    #Kvečjemu dva smeta biti na začetku osnovne linije.
    #Zaporedje členov v vsoti (mesta simbola 'P'):
    #123,124,125,234,235,345,134,135,245,145

    P_3=((((3*3*6-2)*31*28)/imenovalec)+
    ((3*3*30*6*28)/imenovalec)+((3*3*30*31*9)/imenovalec)+\
    ((34*3*6*6*28)/imenovalec)+((34*3*6*31*9)/imenovalec)+\
    ((34*34*6*6*9)/imenovalec)+\
    ((3*34*6*6*28)/imenovalec)+((3*34*6*31*9)/imenovalec)+\
    ((34*3*30*6*9)/imenovalec)+\
    ((3*34*30*6*9)/imenovalec))*100*10*0.1*osnovna()

    #Mutiranje štirih simbolov P.
    #Kvečjemu trije smejo biti na začetku osnovne linije.

    P_4=((((3*3*6*6-4)*28)/imenovalec)+((3*3*6*31*9)/imenovalec)+\
    ((3*3*30*6*9)/imenovalec)+((3*34*6*6*9)/imenovalec)+\
    ((34*3*6*6*9)/imenovalec))*1000*10*0.1*osnovna()

    #Mutiranje petih simbolov P.
    #Kvečjemu štirje na osnovni liniji.

    P_5=((3*3*6*6*9-2*2*3)/imenovalec)*5000*10*0.1*osnovna()

    #Upoštevam še gnezdenje - vstopanje v bonus igre znotraj bonus
    #iger. Dobljeno pomnožim še z verjetnostjo za vstop v bonus igre
    #(v osnovni igri) in verjetnostjo, da je izžreban bonus simbol P.
    #Upoštevam tudi dejstvo, da so bonus igre sestavljene iz
    #desetih vrtljajev. Izračuni v povezavi z gnezdenjem so
    #narejeni v Mathematici in se nahajajo v prilogi 3(od tam število
    #0.319238). Za razlago formule glej diplomsko
    #nalogo - poglavje o gnezdenju.

    E=(E_obicajni+P_2+P_3+P_4+P_5)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_M():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.1*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje

    #Podatki:
```

```
    #število simbolov M na posameznem kolesu: 4,1,2,1,4
    #dobitek, ki ga prineseta dva,trije,štirje,pet simbolov M:
    #5,40,400,2000
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Dva simbola M.

    E_mutiranje+=((((12*3-4)*30*34*25)/imenovalec)+
    ((12*34*6*34*25)/imenovalec)+((12*34*30*3*25)/imenovalec)+\
    ((12*34*30*34*12)/imenovalec)+
    ((25*3*6*34*25)/imenovalec)+((25*3*30*3*25)/imenovalec)+\
    ((25*3*30*34*12)/imenovalec)+
    ((25*34*6*3*25)/imenovalec)+((25*34*6*34*12)/imenovalec)+\
    ((25*34*30*3*12)/imenovalec))*5*10*0.1*osnovna()

    #Trije simboli M.

    E_mutiranje+=((((12*3*6-8)*34*25)/imenovalec)+
    ((12*3*30*3*25)/imenovalec)+((12*3*30*34*12)/imenovalec)+\
    ((25*3*6*3*25)/imenovalec)+
    ((25*3*6*34*12)/imenovalec)+((25*34*6*3*12)/imenovalec)+\
    ((12*34*6*3*25)/imenovalec)+
    ((12*34*6*34*12)/imenovalec)+((25*3*30*3*12)/imenovalec)+\
    ((12*34*30*3*12)/imenovalec))*40*10*0.1*osnovna()

    #Štirje simboli M.

    E_mutiranje+=((((12*3*6*3-8)*25)/imenovalec)+
    ((12*3*6*34*12)/imenovalec)+((12*3*30*3*12)/imenovalec)+\
    ((12*34*6*3*12)/imenovalec)+((25*3*6*3*12)/imenovalec))*
    400*10*0.1*osnovna()

    #Pet simbolov M.

    E_mutiranje+=((12*3*6*3*12-32)/imenovalec)*2000*10*0.1*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_S():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.11*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje
```

```
    #Podatki:
    #število simbolov S na posameznem kolesu: 2,2,2,3,4
    #dobitek, ki ga prineseta dva,trije,štirje,pet simbolov S:
    #5,30,100,750
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Dva simbola S.

    E_mutiranje+=((((6*6-4)*30*28*25)/imenovalec)+
    ((6*31*6*28*25)/imenovalec)+((6*31*30*9*25)/imenovalec)+\
    ((6*31*30*28*12)/imenovalec)+
    ((31*6*6*28*25)/imenovalec)+((31*6*30*9*25)/imenovalec)+\
    ((31*6*30*28*12)/imenovalec)+
    ((31*31*6*9*25)/imenovalec)+((31*31*6*28*12)/imenovalec)+\
    ((31*31*30*9*12)/imenovalec))*5*10*0.11*osnovna()

    #Trije simboli S.

    E_mutiranje+=((((6*6*6-8)*28*25)/imenovalec)+
    ((6*6*30*9*25)/imenovalec)+((6*6*30*28*12)/imenovalec)+\
    ((31*6*6*9*25)/imenovalec)+
    ((31*6*6*28*12)/imenovalec)+((31*31*6*9*12)/imenovalec)+\
    ((6*31*6*9*25)/imenovalec)+
    ((6*31*6*28*12)/imenovalec)+((31*6*30*9*12)/imenovalec)+\
    ((6*31*30*9+12)/imenovalec))*30*10*0.11*osnovna()

    #Štirje simboli S.

    E_mutiranje+=((((6*6*6*9-24)*25)/imenovalec)+
    ((6*6*6*28*12)/imenovalec)+((6*6*30*9*12)/imenovalec)+\
    ((6*31*6*9*12)/imenovalec)+((31*6*6*9*12)/imenovalec))*
    100*10*0.11*osnovna()

    #Pet simbolov S.

    E_mutiranje+=((6*6*6*9*12-96)/imenovalec)*
    750*10*0.11*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)
    return E

def pricakovana_C():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.1*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje
```

```
    #Podatki:
    #število simbolov C na posameznem kolesu: 2,3,1,4,3
    #dobitek, ki ga prineseta dva,trije,štirje,pet simbolov C:
    #5,30,100,750
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Dva simbola C.

    E_mutiranje+=((((6*9-6)*33*25*28)/imenovalec)+
    ((6*28*3*25*28)/imenovalec)+((6*28*33*12*28)/imenovalec)+\
    ((6*28*33*25*9)/imenovalec)+
    ((31*9*3*25*28)/imenovalec)+((31*9*33*12*28)/imenovalec)+\
    ((31*6*33*25*9)/imenovalec)+
    ((31*28*3*12*28)/imenovalec)+((31*28*3*25*9)/imenovalec)+\
    ((31*28*33*12*9)/imenovalec))*5*10*0.1*osnovna()

    #Trije simboli C.

    E_mutiranje+=((((6*9*3-6)*25*28)/imenovalec)+
    ((6*9*33*12*28)/imenovalec)+((6*9*33*25*9)/imenovalec)+\
    ((31*9*6*12*28)/imenovalec)+((31*9*6*25*9)/imenovalec)+
    ((31*28*3*12*9)/imenovalec)+\
    ((6*28*3*12*28)/imenovalec)+((6*28*3*25*9)/imenovalec)+
    ((31*9*33*12*9)/imenovalec)+\
    ((6*28*33*12*9)/imenovalec))*30*10*0.1*osnovna()

    #Štirje simboli C.

    E_mutiranje+=((((6*9*3*12-24)*28)/imenovalec)+
    ((6*9*3*25*9)/imenovalec)+((6*9*33*12*9)/imenovalec)+\
    ((6*28*3*12*9)/imenovalec)+((31*9*3*12*9)/imenovalec))*
    100*10*0.1*osnovna()

    #Pet simbolov C.

    E_mutiranje+=((6*9*3*12*9-72)/imenovalec)*750*10*0.1*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_A():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.12*osnovna()
    E_mutiranje=0
```

```
    #Mutiranje

    #Podatki:
    #število simbolov A na posameznem kolesu: 6,6,5,3,4
    #dobitek, ki ga prinesejo trije,štirje,pet simbolov A:
    #5,40,150
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Trije simboli A.

    E_mutiranje+=((((18*18*15-180)*28*25)/imenovalec)+
    ((18*18*21*9*25)/imenovalec)+((18*18*21*28*12)/imenovalec)+\
    ((19*18*15*9*25)/imenovalec)+
    ((19*18*15*28*12)/imenovalec)+((19*19*15*9*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*15*9*25)/imenovalec)+
    ((18*19*15*28*12)/imenovalec)+((19*18*21*9*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*21*9*12)/imenovalec))*5*10*0.12*osnovna()

    #Štirje simboli A.

    E_mutiranje+=((((18*18*15*9-540)*25)/imenovalec)+
    ((18*18*15*28*12)/imenovalec)+((18*18*21*9*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*15*9*12)/imenovalec)+((19*18*15*9*12)/imenovalec))*
    40*10*0.12*osnovna()

    #Pet simbolov A.

    E_mutiranje+=((18*18*15*9*12-2160)/imenovalec)*
    150*10*0.12*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_K():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
   10*0.11*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje

    #Podatki:
    #število simbolov K na posameznem kolesu: 6,4,6,6,4
    #dobitek, ki ga prinesejo trije,štirje,pet simbolov K:
    #5,40,150
    imenovalec=(37*37*36*37*37)
```

```
    #Trije simboli K.

    E_mutiranje+=((((18*12*18-144)*19*25)/imenovalec)+
    ((18*12*18*18*25)/imenovalec)+((18*12*18*19*12)/imenovalec)+\
    ((19*12*18*18*25)/imenovalec)+
    ((19*12*18*19*12)/imenovalec)+((19*25*18*18*12)/imenovalec)+\
    ((18*25*18*18*25)/imenovalec)+
    ((18*25*18*19*12)/imenovalec)+((19*18*18*18*12)/imenovalec)+\
    ((18*25*18*18*12)/imenovalec))*5*10*0.11*osnovna()

    #Štirje simboli K.

    E_mutiranje+=((((18*12*18*18-864)*25)/imenovalec)+
    ((18*12*18*19*12)/imenovalec)+((18*12*18*18*12)/imenovalec)+\
    ((18*25*18*18*12)/imenovalec)+((19*12*18*18*12)/imenovalec))*
    40*10*0.11*osnovna()

    #Pet simbolov K.

    E_mutiranje+=((18*12*18*18*12-20736)/imenovalec)*
    150*10*0.11*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_Q():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.12*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje

    #Podatki:
    #število simbolov Q na posameznem kolesu: 5,6,5,6,4
    #dobitek, ki ga prinesejo trije,štirje,pet simbolov K:
    #5,25,100
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Trije simboli Q.

    E_mutiranje+=((((15*18*15-150)*19*25)/imenovalec)+
    ((15*18*21*18*25)/imenovalec)+((15*18*21*19*12)/imenovalec)+\
    ((22*18*15*18*25)/imenovalec)+
    ((22*18*15*19*12)/imenovalec)+((22*19*15*18*12)/imenovalec)+\
    ((15*19*15*18*25)/imenovalec)+
    ((15*19*15*19*12)/imenovalec)+((22*18*21*18*12)/imenovalec)+\
```

```
    ((15*19*21*18*12)/imenovalec))*5*10*0.12*osnovna()

    #Štirje simboli Q.

    E_mutiranje+=((((15*18*15*18-900)*25)/imenovalec)+
    ((15*18*15*19*12)/imenovalec)+((15*18*21*18*12)/imenovalec)+\
    ((15*19*15*18*12)/imenovalec)+((22*18*15*18*12)/imenovalec))*
    25*10*0.12*osnovna()

    #Pet simbolov Q.

    E_mutiranje+=((15*18*15*18*12-3600)/imenovalec)*
    100*10*0.12*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_J():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.12*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje

    #Podatki:
    #število simbolov J na posameznem kolesu: 6,6,6,4,4
    #dobitek, ki ga prinesejo trije,štirje,pet simbolov K:
    #5,25,100
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Trije simboli J.

    E_mutiranje+=((((18*18*18-216)*25*25)/imenovalec)+
    ((18*18*18*12*25)/imenovalec)+((18*18*18*25*12)/imenovalec)+\
    ((19*18*18*12*25)/imenovalec)+
    ((19*18*18*25*12)/imenovalec)+((19*19*18*12*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*18*12*25)/imenovalec)+
    ((18*19*18*25*12)/imenovalec)+((19*18*18*12*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*18*12*12)/imenovalec))*5*10*0.12*osnovna()

    #Štirje simboli J.

    E_mutiranje+=((((18*18*18*12-864)*25)/imenovalec)+
    ((18*18*18*25*12)/imenovalec)+((18*18*18*12*12)/imenovalec)+\
    ((18*19*18*12*12)/imenovalec)+((19*18*18*12*12)/imenovalec))*
    25*10*0.12*osnovna()
```

```
    #Pet simbolov J.

    E_mutiranje+=((18*18*18*12*12-3456)/imenovalec)*
    100*10*0.12*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.

    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

def pricakovana_1():
    E_obicajni=pricakovana_vrednost_BG('BG_1.txt',kolesa_B)*
    10*0.12*osnovna()
    E_mutiranje=0

    #Mutiranje

    #Podatki:
    #število simbolov 1 na posameznem kolesu: 3,6,5,6,5
    #dobitek, ki ga prinesejo trije,štirje,pet simbolov K:
    #5,25,100
    imenovalec=(37*37*36*37*37)

    #Trije simboli 1.

    E_mutiranje+=((((9*18*15-90)*19*22)/imenovalec)+
    ((9*18*21*18*22)/imenovalec)+((9*18*21*19*15)/imenovalec)+\
    ((28*18*15*18*22)/imenovalec)+
    ((28*18*15*19*15)/imenovalec)+((28*19*15*18*15)/imenovalec)+\
    ((9*19*15*18*22)/imenovalec)+
    ((9*19*15*19*15)/imenovalec)+((28*18*21*18*15)/imenovalec)+\
    ((9*19*21*18*15)/imenovalec))*5*10*0.12*osnovna()

    #Štirje simboli 1.

    E_mutiranje+=((((9*18*15*18-540)*22)/imenovalec)+
    ((9*18*15*19*15)/imenovalec)+((9*18*21*18*15)/imenovalec)+\
    ((9*19*15*18*15)/imenovalec)+((28*18*15*18*15)/imenovalec))*
    25*10*0.12*osnovna()

    #Pet simbolov 1.

    E_mutiranje+=((9*18*15*18*15-2700)/imenovalec)*
    100*10*0.12*osnovna()

    #Gnezdenje in končen rezultat.
```

```
    E=(E_obicajni+E_mutiranje)/(1-0.319238)

    return E

#Funkcija, ki vrne pričakovano vrednost celotne igre.
def celotna():
    return pricakovana_vrednost_BG()+pricakovana_P()+
    pricakovana_M()+pricakovana_S()+pricakovana_C()+
    pricakovana_A()+pricakovana_K()+pricakovana_Q()+
    pricakovana_J()+pricakovana_1()
```

Priloga 2 - Simulacija; Python

```
#Program simulira celotno igro 'Book of Ra' (skupaj z bonus igrami).
#Stavimo eno denarno enoto na osnovno linijo.

from random import *

#Kolesa osnovne igre.
kolo1='ASPJAQMJCKSJACP1JCPMCJPMCKQACQSPAS1QPSAQMPSCB1MS1K'
kolo2='JS1PACSK1SQC1PMJ1PB1CJS1JAPK1AQPSQASQK1QMPJC1'
kolo3='1PACQ1SJK1PSQJA1QKS1AP1QSJQS1AMCPKMC1PK1JAPKBP'
kolo4='1JMQ1JP1KJCMQCK1JCAMCSKQJMPSJQA1MAQ1KQBACJA1PACMAB'
kolo5='MP1QSKJC1APMSAJSM1QAPQ1JBMCPMKCSQAKPAS1JCPAQMPABQ'
kolesa=[kolo1,kolo2,kolo3,kolo4,kolo5]

#Kolesa bonus iger.
kolo1_B='J1QJSAC1AMQK1MCQKJCBQAJSCP1BCKQAJCMQK'
kolo2_B='CBQMA1QPSMBKJ1MJ1MASC1KC1SJQCJACSQCJM'
kolo3_B='CQJA1KMCQMCSPA1KAM1JCKJCPA1KS1CJSC1B'
kolo4_B='AQJ1QMKA1CKJQSJKAMB1CKJBKJ1SCPJMPJAK1'
kolo5_B='AC1SMJKS1PKQAJSC1AMPQ1CAMB1SJKSAMPBMQ'
kolesa_B=[kolo1_B,kolo2_B,kolo3_B,kolo4_B,kolo5_B]

#Funkcija, ki vrne vse indekse pojavitve elementa 'el' v nizu 'niz'
#(uporabim pri mutiranju).

def indeksi(niz, el):
    return [i for i, ltr in enumerate(niz) if ltr == el]

#Definiram funkcijo 'Bonus_Simulacija', ki simulira bonus igre.
#Ta bo pozneje vključena v simulacijo osnovne igre
#(v bonus igre vstopimo preko osnovne). Gre za funkcijo,
#ki v primeru pojavitve vsaj treh simbolov B na ekranu
#kliče samo sebe. Teoretično se lahko zadeva zacikla,
#a je verjetnost za to tako majhna, da se niti ne splača
#delati kakega 'varovala'. Bonus simbol je potrebno izžrebati
#le pri prvem vstopu v bonus igre - pri vgnezdenih
```

```
#bonus igrah bonus simbol ostane enak kot v prvotni bonus igri.

def Bonus_Simulacija(Bonus_Simbol):
    #Tudi tokrat je 'BG_1.txt' v redu.
    #Tako vsi možni izidi na osnovni liniji kot tudi njihovi
    #dobički so namreč še vedno enaki.
    f_B=open('BG_1.txt')
    r_B=f_B.readlines()
    vsota_B=0
    m=0
    #Bonus igre so sestavljene iz desetih iger.
    while m<10:
        simboli_B=''
        izid_B=''
        for j in range(5):
            #Izberem naključno število iz intervala
            #dolžine kolesa - zgeneriram izid.
            indeks=choice(range(len(kolesa_B[j])))
            #Spremenljivka 'izid_B' predstavlja izid
            #na osnovni liniji.
            izid_B=izid_B+str(kolesa_B[j][indeks])
            #V spremenljivko 'simboli_B' shranim vse simbole,
            #ki se pojavijo na ekranu (za preštevanje B in mutacijo).
            simboli_B=
            simboli_B+str(kolesa_B[j][(indeks-1)%len(kolesa_B[j])])+
            str(kolesa_B[j][indeks])+
            str(kolesa_B[j][(indeks+1)%len(kolesa_B[j])])
        B=simboli_B.count('B')
        if B==3:
            vsota_B+=2
        elif B==4:
            vsota_B+=20
        elif B==5:
            vsota_B+=200

        for line in r_B:
            if line[:5]==izid_B:
                vsota_B+=int(line[6:])

        #Upoštevam še mutiranje.
        #'Slabe' pojavitve bonus simbolov - če se naprimer pri
        #dveh pojavitvah bonus simbola oba pojavita na začetku
        #osnovne linije, mutiranje ne prinese nobenega
        #dodatnega dobička.

        B_S=simboli_B.count(Bonus_Simbol)
        slabo_2=[1,4]
        slabo_3=[1,4,7]
        slabo_4=[1,4,7,10]
```

```
slabo_5=[1,4,7,10,13]
pojavitve=indeksi(simboli_B,Bonus_Simbol)

#Natanko dva bonus simbola.
if B_S==2:

    #Simboli, ki mutirajo, že če se pojavijo zgolj dvakrat.

    if Bonus_Simbol=='S' or Bonus_Simbol=='C' or
        Bonus_Simbol=='M' or Bonus_Simbol=='P':

        #Zanimajo me izidi, kjer se pojavita natanko
        #dva simbola - ne oba na začetku osnovne linije.
        #Indeksa pojavitev torej ne smeta biti oba v
        #seznamu 'slabo_2'. Prav tako morata biti deljena
        #po modulu pet različna - da se ne pojavita v
        #istem stolpcu. Če pogledamo kolesa igre,
        #vidimo, da zadnjega pogoja ni potrebno preverjati.
        #Na nobenem kolesu bonus iger se namreč ne more noben
        #simbol pojaviti več kot enkrat v enem vrtljaju.

        if pojavitve[0] in slabo_2 and pojavitve[1]
            in slabo_2:
            pass
        else:
            if Bonus_Simbol=='S' or Bonus_Simbol=='C' or
               Bonus_Simbol=='M':
                vsota_B+=5
            #Sicer je bonus simbol P.
            else:
                vsota_B+=10

#Natanko trije bonus simboli (ob treh pojavitvah že
#vsi bonus simboli zmutirajo).
elif B_S==3:
    if pojavitve[0] in slabo_3 and
        pojavitve[1] in slabo_3 and pojavitve[2] in slabo_3:
        pass
    else:
        if Bonus_Simbol=='1' or Bonus_Simbol=='J' or
            Bonus_Simbol=='Q' or Bonus_Simbol=='K' or
            Bonus_Simbol=='A':
            vsota_B+=5
        elif Bonus_Simbol=='S' or Bonus_Simbol=='C':
            vsota_B+=30
        elif Bonus_Simbol=='M':
            vsota_B+=40
        elif Bonus_Simbol=='P':
            vsota_B+=100
```

```
        #Natanko štirje bonus simboli.
        elif B_S==4:
            if pojavitve[0] in slabo_4 and
               pojavitve[1] inslabo_4 and
               pojavitve[2] in slabo_4 and pojavitve[3] in slabo_4:
                pass
            else:
                if Bonus_Simbol=='1' or Bonus_Simbol=='J' or
                    Bonus_Simbol=='Q':
                    vsota_B+=25
                elif Bonus_Simbol=='K' or Bonus_Simbol=='A':
                    vsota_B+=40
                elif Bonus_Simbol=='S' or Bonus_Simbol=='C':
                    vsota_B+=100
                elif Bonus_Simbol=='M':
                    vsota_B+=400
                elif Bonus_Simbol=='P':
                    vsota_B+=1000
        #Natanko pet bonus simbolov.
        elif B_S==5:
            if pojavitve[0] in slabo_5 and pojavitve[1] in slabo_5
                and
                pojavitve[2] in slabo_5 and pojavitve[3] in slabo_5
                and
                pojavitve[4] in slabo_5:
                pass
            else:
                if Bonus_Simbol=='1' or Bonus_Simbol=='J' or
                    Bonus_Simbol=='Q':
                    vsota_B+=100
                elif Bonus_Simbol=='K' or Bonus_Simbol=='A':
                    vsota_B+=150
                elif Bonus_Simbol=='S' or Bonus_Simbol=='C':
                    vsota_B+=750
                elif Bonus_Simbol=='M':
                    vsota_B+=2000
                elif Bonus_Simbol=='P':
                    vsota_B+=5000

        #Vstop v bonus igre znotraj bonus iger.
        if B>=3:
            vsota_B+=Bonus_Simulacija(Bonus_Simbol)
        m+=1
    return vsota_B


#Tole je zdaj funkcija, ki simulira celotno igro.
```

```
#Znotraj nje uporabim zgoraj definirano
#funkcijo za simulacijo bonus iger.

def simulacija_BoR(n):
    f=open('BG_1.txt')
    r=f.readlines()
    vsota=0
    i=0
    while i<n:
        simboli=''
        izid=''
        for j in range(5):

            #Izberem naključno število iz intervala dolžine kolesa -
            #zgeneriram izid.

            indeks=choice(range(len(kolesa[j])))
            #Spremenljivka 'izid' predstavlja izid na osnovni liniji.
            izid=izid+str(kolesa[j][indeks])

            #V spremenljivko 'simboli' shranim vse simbole,
            #ki se pojavijo na ekranu (za preštevanje B).

            simboli=simboli+
                    str(kolesa[j][(indeks-1)%len(kolesa[j])])+
                    str(kolesa[j][indeks])+
                    str(kolesa[j][(indeks+1)%len(kolesa[j])])
        B=simboli.count('B')
        if B==3:
            vsota+=2
        elif B==4:
            vsota+=20
        elif B==5:
            vsota+=200
        for line in r:
            if line[:5]==izid:
                vsota+=int(line[6:])

        #Sedaj se lotimo še bonus iger.
        #Te nastopijo, če se na ekranu pojavijo
        #vsaj trije simboli 'B'.

        if B>2:
            #Kar tako (po zdravi pameti) simuliram diskretno
            #porazdelitev slučajne spremenljivke, ki je v
            #konkretni bonus igri enaka enemu izmed bonus
            #simbolov. (Morda obstaja kakšna knjižnica, v kateri
            #morda obstaja kakšna funkcija, s katero bi morda
            #lahko vpeljal diskretno porazdelitev, ampak ...
```

```
        #Te knjižnice ... z njimi so same težave.
        #Potem pa zadeva nekje dela nekje pa ne.)

        Porazdelitev=['P','P','P','P','P','P','P','P','P','P',
                'M','M','M','M','M','M','M','M','M','M',
                'S','S','S','S','S','S','S','S','S','S','S',
                'C','C','C','C','C','C','C','C','C','C',
                'A','A','A','A','A','A','A','A','A','A','A','A',
                'K','K','K','K','K','K','K','K','K','K','K',
                'Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q','Q',
                'J','J','J','J','J','J','J','J','J','J','J','J',
                '1','1','1','1','1','1','1','1','1','1','1','1']

        Bonus_Simbol=choice(Porazdelitev)

        vsota+=Bonus_Simulacija(Bonus_Simbol)
    i+=1
return vsota/n
```

Priloga 3 - Gnezdenje; Mathematica

```
V tej prilogi so izračuni v povezavi z gnezdenjem
(število načinov za vstop v posamezni nivo gnezdenja
 in verjetnosti vstopa). Tale zadeva (Indeksi [n_,i[0]=0])
zgenerira vse argumente, ki naj jih bi imel v
Sum[i[n-1] ,tukaj], da se bodo vsote ustrezno gnezdile.

Indeksi[n_, i[0] = 0] :=
 Append[Table[{i[j], 0, j*9 - Sum[i[k - 1], {k, 1, j}]},
     {j, 1, n - 2}], {i[n - 1], 10, (9*n) + 1 - Sum[i[k - 1],
     {k, 1, n - 1}]}]

Indeksi[5, i[0]]

{{i[1], 0, 9}, {i[2], 0, 18 - i[1]},
  {i[3], 0, 27 - i[1] - i[2]}, {i[4], 10,
  46 - i[1] - i[2] - i[3]}}

Spodnja funkcija G[n_] izračuna število načinov
za n-kratno gnezdenje, to je natanko (n+1)-kratni
vstop v bonus igre.

G[n_] := Sum[i[n - 1], Evaluate[Sequence @@ Indeksi[n, i[0] = 0]]]

G[2]

145
```

```
G[3]

2470

G[4]

46060

G[5]

910252

G[6]

18730855
```

Verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger.

```
p = 0.024212434257248977;
```

Verjetnost, da pride do natanko n gnezdenj, to je n+1 vstopov v bonus igre.

```
PG[n_] := p^n (1 - p)^((n + 1)*10 - n)*G[n]

P[1] = 10*p*(1 - p)^19;

P[2] = PG[2]

0.042795

P[3] = PG[3]

0.0141566

P[4] = PG[4]

0.0051265

P[5] = PG[5]

0.00196741

P[6] = PG[6]

0.000786188

PG[7]
```

```
0.000323663

P[7] = 0.0003236630012251595`;

PG[8]

0.000136329

P[8] = 0.00013632852435350055`;

PG[9]

0.0000584709

P[9] = 0.00005847092733288244`;
```

Uf! Tole je pa vzelo nekaj časa.
Računalnik skoraj pregorel.
Bo treba izpeljati kakšno bol prebavljivo
formulo (v smislu časovne zahtevnosti).
Na nekaj že izračunanih rezultatih
preverjam hitrejšo rekurzivno formulo.

```
10*G[3] + Sum[j*Sum[i, {i, 10, 38 - j}], {j, 1, 9}]

46060

10*G[4] + Sum[k*Sum[Sum[i, {i, 10, 47 - k - j}],
{j, 0, 28 - k}], {k, 0, 9}]

910252

10*G[5] + Sum[
  k*Sum[Sum[Sum[l, {l, 10, 56 - k - j - i}], {i, 0, 37 - k - j}],
     {j, 0, 28 - k}], {k, 0, 9}]

18730855
```

Zgleda, da v redu deluje. Dajmo jo implementirat.

```
IndeksiR[n_] :=
 Append[Table[{i[j], 0, (j + 1)*9 + 1 - Sum[i[k - 1],
    {k, 2, j}]}, {j, 2, n - 3}], {i[n - 2], 10, (9*n) + 2 -
    Sum[i[k - 1], {k, 1, n - 2}]}]

IndeksiR[5]

{{i[2], 0, 28 - i[1]}, {i[3], 10, 47 - i[1] - i[2]}}
```

Nekoliko boljša - rekurzivna formula.

```
GR[n_, prejsnji_] :=
 10*prejsnji +
  Sum[i[1]*Sum[i[n - 2], Evaluate[Sequence @@ IndeksiR[n]]],
  {i[1], 1, 9}]
```

```
GR[4, 2470]
```

46060

```
GR[5, 46060]
```

910252

```
GR[6, 910252]
```

18730855

```
GR[7, 18730855]
```

397089550

```
GR[8, 397089550]
```

8612835715

```
GR[9, 8612835715]
```

190223180840

```
GR[10, 190223180840]
```

4263421511271

V redu. Nazaj k verjetnosti - verjetnost za deseti nivo gnezdenja:

```
P[10] = 4263421511271*p^10 (1 - p)^((10 + 1)*10 - 10)
```

0.000025449

Torej. Približek za tisto vrsto - vsota prvih desetih členov:

```
rezultat =
 P[1]*1 + P[2]*2 + P[3]*3 + P[4]*4 + P[5]*5 + P[6]*6 + P[7]*7 +
   P[8]*8 + P[9]*9 + P[10]*10
```

0.319238

Slovar strokovnih izrazov

scatter symbol razmetani simbol – simbol, ki ima v igrah na srečo posebno lastnost – tipično prinaša dobiček, tudi če se pojavi izven linij na katere smo stavili (pogosto omogoča tudi vstop v bonus igre)

gamble tveganje – del dane igre na srečo, v katerem lahko z ugibanjem barve karte svoj dobiček podvojimo ali pa izgubimo

mutation mutiranje – posebna lastnost, ki jo ima bonus simbol v času bonus iger

Literatura

[1] C. Barboianu, *Probability guide to gambling: The mathematics of dice, slots, roulette, baccarat, blackjack, poker, lottery and sport bets*, Infarom, Craiova, 2006.

[2] R. A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*, 2nd edition, Academic Press, New York, 2009.

[3] J. Gravner, *Lecture notes for introductory probability*, verzija 5. 1. 2014, [ogled 21. 4. 2016], dostopno na `www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135A/resources/lecturenotes.pdf`.

[4] E. W. Packel, *The mathematics of games and gambling*, 3rd edition, The Anneli Lax New Mathematical Library **28**, Mathematical association of America, Washington 1981.

[5] *Book of Ra*, [ogled 21. 4. 2016], `www.slot-games2.com/book-of-ra.html`.

[6] *Book of Ra paradise*, [ogled 21. 4. 2016], `www.bookofra-paradise.com/en/`.

[7] *Python 3.4.4 documentation*, [ogled 21. 4. 2016], `docs.python.org/3.4/`.

[8] *Wolfram documentation center*, [ogled 21. 4. 2016], `reference.wolfram.com/language/`.

[9] Zakon o igrah na srečo – ZIS, Uradni list RS, št. 14/2011 z dne 4. 3. 2011, dostopno na `www.pisrs.si/Pis.web/pregledPredpisa?id=ZAKO409`.