

# Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien<sup>1)</sup>

Von K. HASSELMANN

*Es werden sämtliche bei der Totalreflexion auftretenden Stoßfronten — einschließlich der v. Schmidt-schen Kopfwellen — ermittelt. Durch Änderung der Bezeichnung erhält man gleichzeitig die Totalreflexion einer harmonischen Kugelwelle. Das Problem wird in der akustischen Näherung (kleine Störfelder) behandelt.*

*All shock waves — including the v. Schmidt head waves — that occur in the total reflexion of a spherical shock wave are determined. By changing the notation the total reflexion of a harmonic spherical wave is obtained. The problem is treated in the acoustic approximation (small perturbation fields).*

Определяются все ударные волны, встречающиеся при полном отражении сферической ударной волны, включая и головную волну фон Шмидта. При помощи замены обозначений получается одновременно и полное отражение гармонической сферической волны. Задача решается в акустическом приближении (т. е., рассматриваются небольшие поля возмущений).

In der vorliegenden Arbeit werden die Stoßfronten ermittelt, die beim Auftreffen einer kugelförmigen Kompressionsfront auf die Übergangsebene von einem schalldichteren zu einem schalldünnere elastischen Medium entstehen. Vorausgesetzt werden schwache Fronten, auf die die linearisierten Bewegungsgleichungen anwendbar sind. Auf Grund einfacher Strahlengangbetrachtungen wird man zunächst je zwei reflektierte und gebrochene Fronten erwarten. Daneben treten jedoch noch drei bis fünf weitere Fronten auf, die sich mit Hilfe der geometrischen Akustik nicht mehr erklären lassen. Sie sind von O. v. SCHMIDT [1] an Hand seiner bekannten Knallwellenaufnahmen als „Kopfwellen“ gedeutet worden, die von den gebrochenen Fronten an der Trennungsebene ausgestrahlt werden. Bisher ist es erst für den einfachsten Fall der Totalreflexion einer harmonischen Kugelwelle an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten gelungen, eine solche Kopfwellen zu berechnen (H. OTT [2])<sup>2)</sup>. Sie ergab sich als Effekt zweiter Ordnung aus der Integraldarstellung der reflektierten Störung, die mit funktionentheoretischen Mitteln näherungsweise ausgewertet wurde. Eine Anwendung dieses Verfahrens auf den wichtigeren Fall der Totalreflexion in elastischen Medien erscheint jedoch aussichtslos, da die Reflexions- und Brechungsfaktoren, welche dazu explizit vorliegen müssen, äußerst kompliziert werden.

Es wird hier nun eine einfache Methode zur Ermittlung sämtlicher Fronten entwickelt, die sich auf beliebige Mediumpaare anwenden läßt. Ausgangspunkt der Methode ist die von J. NITSCHÉ [9] auf Anregung von W. TOLLIEN behandelte normale Reflexion und Brechung einer kugelförmigen Stoßfront an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten. In diesem Falle treten keine Kopfwellen auf, da sich die gebrochene Front langsamer als die einfallende Front ausbreitet. Im Falle der Totalreflexion wird nun zur Erfassung der Kopfwellen, welche einen Effekt zweiter Ordnung darstellen, die Methode von NITSCHÉ um eine Ordnung erweitert. Ferner werden die Ansätze in naheliegender Weise verallgemeinert, um die in elastischen Medien zusätzlich auftretenden Scherungsfronten mitzuerfassen. Neben Stoßfronten lassen sich mit der gleichen Methode ebenfalls periodische Wellen behandeln, wobei die Ergebnisse des einen Falls unmittelbar auf den anderen übertragbar sind.

## I. Die Fortpflanzung von Unstetigkeiten in elastischen Medien

Die Bewegungsgleichungen für die (kleine) Verschiebung  $\mathfrak{s}$  in einem isotropen elastischen Medium lauten:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathfrak{s} - \mu \text{rot rot } \mathfrak{s} \quad \dots \quad (1.1)$$

( $\lambda$  und  $\mu$  sind die LAMÉschen Elastizitätsmoduln,  $\rho$  ist die Dichte des Mediums).

<sup>1)</sup> Dissertationsauszug. Herrn Prof. Dr. W. TOLLIEN bin ich für die Anregung zur vorliegenden Arbeit sowie für die mir im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung gewährte Unterstützung zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

<sup>2)</sup> Siehe ferner [3], [4], [5], [6] und [7]. Bei dem etwas anderen Problem der Ausbreitung der Störung, die durch einen Spannungsstoß längs einer Geraden auf der Oberfläche eines elastischen Halbraums erzeugt wird, fand weiterhin F. SAUTER [8], daß eine Kopfwellen in Form einer singulären Fläche auftritt.

Sie lassen sich durch zwei Typen von Grundlösungen befriedigen: Bei einem wirbelfreien Verschiebungsfeld ist  $\mathfrak{s}$  durch ein skalares Potential  $\varphi$  darstellbar, welches der Wellengleichung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c^k = \left(\frac{2\mu + \lambda}{\rho}\right)^{1/2}$  genügt:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{(c^k)^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (1.2).$$

Im Falle eines quellenfreien Verschiebungsfeldes läßt sich  $\mathfrak{s}$  dagegen aus einem Vektorpotential  $\mathfrak{a}$  ableiten, welches die Wellengleichung mit der kleineren Wellengeschwindigkeit  $c^w = (\mu/\rho)^{1/2}$  befriedigt:

$$\Delta\mathfrak{a} - \frac{1}{(c^w)^2} \frac{\partial^2\mathfrak{a}}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (1.3).$$

Die bekanntesten Spezialfälle der Grundlösungen von Typ (1.2) und (1.3) sind die longitudinalen und transversalen ebenen Wellen.

Wir werden hier vorwiegend Lösungen betrachten, die auf gewissen Unstetigkeitsflächen Sprünge in den Spannungen und in der Teilchengeschwindigkeit  $\mathfrak{v} = \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}$  (oder in deren Ableitungen) aufweisen. Dabei werden als Kompressionsfronten Flächen bezeichnet, auf denen die zweite Normalableitung  $\partial^2\varphi/\partial n^2$  des skalaren Potentials und folglich die Normalkomponenten der Teilchengeschwindigkeit und der Spannung unstetig sind. Flächen, auf denen die zweite Normalableitung von  $\mathfrak{a}$  und damit die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit und der Spannung unstetig sind, bezeichnen wir dann nach einem Vorschlag von W. TOLLMJEN, da hier eine Unstetigkeit in dem Wirbelanteil der Verschiebung vorliegt, als Wirbelfronten.

Da sich bekanntlich Unstetigkeitsflächen von Lösungen der Wellengleichung mit der Wellengeschwindigkeit ausbreiten [10], werden die Unstetigkeiten in den Normalableitungen mit Unstetigkeiten in den zeitlichen Ableitungen gekoppelt sein. Als maßgebende Sprunggrößen führen wir daher die Unstetigkeiten in den Ableitungen  $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \varphi(\mathfrak{r}, \tau)$  und  $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \mathfrak{a}(\mathfrak{r}, \tau)$  ein, wo  $\tau(\mathfrak{r}, t) = 0$  die Gleichung der Unstetigkeitsfläche darstellt. Die Sprünge in den Komponenten der Geschwindigkeit und der Spannung auf einer Kompressionsfront lassen sich dann mit Hilfe von (1.2) und der Beziehung

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_i \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \dots\dots\dots (1.4)$$

zwischen dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  und den Verschiebungen  $s_i$  folgendermaßen durch  $\Phi_1 = \left[ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} \right]$  ausdrücken:

$$[v_n] = \frac{\partial\tau}{\partial t} \frac{\partial\tau}{\partial n} \cdot \Phi_1, \quad [v_m] = 0 \dots\dots\dots (1.5),$$

$$[\sigma_{nn}] = \rho \left( \frac{\partial\tau}{\partial n} \right)^2 (c^k)^2 \Phi_1, \quad [\sigma_{mm}] = \rho \left( \frac{\partial\tau}{\partial n} \right)^2 ((c^k)^2 - 2(c^w)^2) \cdot \Phi_1, \quad [\sigma_{nm}] = 0 \dots (1.6).$$

Die eckigen Klammern bezeichnen Unstetigkeiten. Als positive Richtung der Frontnormalen  $n$  wählen wir die Fortschrittrichtung. Das Vorzeichen der Tangentialrichtung  $m$  (in der  $rz$ -Ebene) wird durch die Bedingung  $\partial(r, z)/\partial(m, n) = 1$  festgelegt.

Auf einer Wirbelfront werden die Unstetigkeiten der Tangentialkomponenten der Spannung und Geschwindigkeit im allgemeinen auf zwei unabhängige Sprunggrößen, die den beiden unabhängigen Verschiebungskomponenten tangential zur Front entsprechen, zurückzuführen sein. Wir werden uns jedoch im folgenden auf rotationssymmetrische Verschiebungsfelder mit verschwindenden Azimutalkomponenten beschränken. In diesem Fall reduziert sich das Vektorpotential  $\mathfrak{a}$  auf die skalare Stromfunktion  $\omega$  mit ( $r, z$  Zylinderkoordinaten)

$$s_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\omega}{\partial z} \quad s_z = \frac{1}{r} \frac{\partial\omega}{\partial r} \dots\dots\dots (1.7).$$

Aus (1.3) ergibt sich für  $\frac{\omega}{r}$  die etwas modifizierte Wellengleichung:

$$\Delta \left( \frac{\omega}{r} \right) - \frac{1}{(c^w)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) = 0 \dots\dots\dots (1.8).$$

Die Sprünge in den Komponenten der Geschwindigkeiten und Spannungen auf einer Wirbelfront sind nun auf die eine Sprunggröße

$$\Omega_1 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) \right]$$

zurückführbar:

$$[v_n] = 0, \quad [v_m] = - \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right) \Omega_1 \quad \dots \quad (1.9),$$

$$[\sigma_{nn}] = [\sigma_{mm}] = 0, \quad [\sigma_{nm}] = - \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 (c^w)^2 \Phi_1 \quad \dots \quad (1.10).$$

Neben Flächen, auf denen die Spannungen und Geschwindigkeiten unstetig sind, werden wir im folgenden auch sogenannte Fronten 2. Ordnung betrachten, auf denen erst die Normalableitungen dieser Größen Sprünge aufweisen. Bezeichnen wir die Unstetigkeiten zweiter Ordnung mit

$$\Phi_2 = \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3} \right] \quad \text{bzw.} \quad \Phi_2 = \left[ \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \left( \frac{\omega}{r} \right) \right],$$

so folgen für die Sprünge in den Normalableitungen der Geschwindigkeiten und Spannungen auf einer Kompressionsfront 2. Ordnung:

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial n} v_n \right] = \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} v_m \right] = 0 \quad \dots \quad (1.11),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nn} \right] = \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 (c^k)^2 \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{mm} \right] = \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 ((c^k)^2 - 2(c^w)^2) \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nm} \right] = 0 \quad (1.12),$$

und auf einer Wirbelfront 2. Ordnung:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} v_n \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} v_m \right] = - \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 \Omega_2 \quad \dots \quad (1.13),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nn} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{mm} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nm} \right] = - \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 (c^w)^2 \Omega_2 \quad \dots \quad (1.14).$$

Die sich mit der Geschwindigkeit  $c^k$  bzw.  $c^w$  fortpflanzenden Unstetigkeitsflächen können mittels einer Parameterdarstellung beschrieben werden, die im Falle der Rotationssymmetrie die Form:

$$z = z_0(\vartheta) + \eta \cos \vartheta, \quad r = r_0(\vartheta) + \eta \sin \vartheta, \quad t = \eta/c^k \quad \text{bzw.} \quad \eta/c^w \quad \dots \quad (1.15)$$

annimmt, wobei die Funktionen  $z_0(\vartheta)$  und  $r_0(\vartheta)$  der Bedingung  $\cos \vartheta (dz_0/d\vartheta) + \sin \vartheta (dr_0/d\vartheta) = 0$  genügen. Der Parameter  $\eta$  stellt den von der Front zurückgelegten Weg dar, während  $\vartheta$  die Richtung der Frontnormalen angibt. Neben der Parameterdarstellung werden wir ferner die Frontgleichung in der Form

$$\tau(r, t) \equiv t - \frac{\eta(r, z)}{c} = 0$$

verwenden.

Bekanntlich pflanzen sich Unstetigkeiten von Lösungen der Wellengleichung (1.2) — oder (1.8) — längs der Normalstrahlen der Fronten fort, wobei sie nach dem Intensitätsgesetz der geometrischen Akustik abklingen [10] [11]:

$$\left. \begin{matrix} \Phi_i(\eta, \vartheta) \\ \Omega_i(\eta, \vartheta) \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \Phi_i(\eta_0, \vartheta) \\ \Omega_i(\eta_0, \vartheta) \end{matrix} \right\} \sqrt{\frac{|a \cdot b|_{\eta=\eta_0}}{|a \cdot b|}} \quad (i = 1, 2) \quad \dots \quad (1.16)$$

$a$  und  $b$  sind die beiden Hauptkrümmungsradien der Front an der betrachteten Unstetigkeitsstelle<sup>3)</sup>.  $\eta_0$  bezeichnet einen Anfangspunkt auf dem durch  $\vartheta$  festgelegten Strahl. Bei rotations-symmetrischen Fronten liegt einer der Krümmungsmittelpunkte auf der  $z$ -Achse, während der andere mit dem Krümmungsmittelpunkt der Meridiankurve zusammenfällt. Man findet somit aus der Parameterdarstellung (1.15):

$$a = \eta + r_0 \cdot \frac{1}{\sin \vartheta}, \quad b = \eta + \frac{dr_0}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} \quad \dots \quad (1.17).$$

<sup>3)</sup> Es wird hier vorausgesetzt, daß sich die Vorzeichen von  $a$  und  $b$  nicht ändern. Für das Verhalten von Stoßfronten beim Durchgang durch Krümmungsmittelpunkte siehe [10].

**II. Die Analogie zwischen Stoßfronten und periodischen Wellen kleiner Wellenlänge**

Die Fortpflanzungsgesetze für Stoßfronten stehen in enger Beziehung zu den Gesetzen der geometrischen Akustik, welche die Ausbreitung periodischer Wellen kleiner Wellenlänge beschreiben. Diese ergeben sich bekanntlich aus der Wellengleichung (1.2) durch Einsetzen einer Näherungslösung der Form

$$\varphi_1(r, t) = A_1(r, t) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^k \tau(r, t)\right) \dots \dots \dots (2.1).$$

Die Änderungen der zunächst beliebigen Funktionen  $A_1(r, t)$  und  $\tau(r, t)$  innerhalb einer Wellenlänge  $\lambda$  werden dabei als klein angenommen. Durch Vergleich der Glieder gleicher Größenordnung findet man, daß die Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  sich mit der Wellengeschwindigkeit  $c^k$  ausbreiten, während die Amplituden  $A_1$  sich längs der Orthogonalstrahlen dieser Flächen nach dem Gesetz (1.16) fortpflanzen. Dasselbe gilt für die Näherungslösung

$$\left(\frac{\omega}{r}\right)_1 = B_1 \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^w \tau\right) \dots \dots \dots (2.2)$$

der modifizierten Wellengleichung (1.8). In den Fortpflanzungsgesetzen besteht somit eine Äquivalenz zwischen den Amplituden  $A_1$  bzw.  $B_1$  einer Welle mit den Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  und den Unstetigkeiten  $\Phi_1$  bzw.  $\Omega_1$  auf einer Stoßfront  $\tau = 0$ . Es läßt sich unschwer zeigen, daß diese Äquivalenz bei Reflexions- und Brechungsproblemen auch in den Grenzbedingungen besteht. Das Analogon zu den Unstetigkeiten 2. Ordnung sind dabei die Amplituden  $A_2$  bzw.  $B_2$  der entsprechenden Wellen 2. Ordnung

$$\varphi_2 = A_2 \frac{\lambda}{2\pi i c^k} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^k \tau\right) \dots \dots \dots (2.3),$$

$$\left(\frac{\omega}{r}\right)_2 = B_2 \frac{\lambda}{2\pi i c^w} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^w \tau\right) \dots \dots \dots (2.4).$$

Um von dem im folgenden betrachteten Fall der Totalreflexion einer einfallenden kugelförmigen Kompressionsfront zum Fall einer einfallenden Kugelwelle überzugehen, hat man somit lediglich die Stoßfronten  $\tau = 0$  durch die Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  und die Unstetigkeiten durch die Amplituden entsprechender Ordnung zu ersetzen.

**III. Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien. Fronten 1. Ordnung**

Wir betrachten nunmehr eine kugelförmige Kompressionsfront 1. Ordnung, die sich von dem Punkt  $r = 0, z = -h$  innerhalb eines elastischen Mediums I im Halbraum  $z < 0$  ausbreitet und an einem elastischen Medium II, das den übrigen Halbraum  $z > 0$  erfüllt, reflektiert und gebrochen wird. Es sei  $c_1^k < c_2^k$ . Beim Auftreffen der einfallenden Front auf die Trennungsebene  $z = 0$  entstehen zunächst in beiden Medien je eine Kompressions- und eine Wirbelfront. Im folgenden werden einfallende, reflektierte und gebrochene Fronten durch einen ersten oberen Index  $e, r$  oder  $g$  und die Art der Front durch einen zweiten oberen Index  $k$  oder  $w$  unterschieden.

Die Parameterdarstellung der einfallenden Front lautet:

$$z = -h + \eta^{ek} \cos \vartheta^{ek}, \quad r = \eta^{ek} \sin \vartheta^{ek}, \quad t = \eta^{ek}/c_1^k \dots \dots \dots (3.1).$$

Die Parameterdarstellungen der reflektierten und gebrochenen Fronten ergeben sich aus der Bedingung, daß sämtliche Fronten an der Trennungsebene  $z = 0$  zusammentreffen. Wird mit dem Index  $i$  allgemein ein beliebiges Indexpaar bezeichnet, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \text{reflektierte Fronten: } & -z \\ \text{gebrochene Fronten: } & +z \end{aligned} \right\} = \frac{-h \cos \vartheta^i}{n^i \cos \vartheta^e} + \eta^i \cos \vartheta^i, \quad \left. \begin{aligned} r &= \frac{h \sin \vartheta^i}{n^i \cos \vartheta^e} (n^{i^2} - 1) + \eta^i \sin \vartheta^i, \\ t &= \eta^i / c^i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.2),$$

wobei  $n^i = c_1^k/c^i$  und  $n^i \sin \vartheta^i = \sin \vartheta^{ek}$ .

Bei festgehaltenem  $\vartheta^i$  beschreiben die Parameterdarstellungen (3.1) und (3.2) den Weg einer Unstetigkeitsstelle, die zunächst mit der Geschwindigkeit  $c_1^k$  längs des Strahls mit dem Einfallswinkel  $\vartheta^{ek}$  bis zur Trennungsebene läuft und sich dann mit den Geschwindigkeiten  $c^i$  längs der entsprechenden reflektierten und gebrochenen Strahlen fortpflanzt.

Die vorgegebene Unstetigkeit auf der einfallenden Front, die nach (1.16) wie  $1/R$  abklingt, sei

$$\Phi_1^{ek} = \Phi_{1h}^{ek} \frac{h}{R} \quad (\Phi_{1h}^{ek} = \Phi_1^{ek} (R = h), R = \text{Radius der einfallenden Front}) \dots (3.3).$$

Zur Bestimmung der Unstetigkeiten auf den reflektierten und gebrochenen Fronten werden nun die Grenzbedingungen angewandt. Für zwei an der Trennungsebene haftende Medien lauten diese:

$$v_z^I = v_z^{II}, \quad v_r^I = v_r^{II}, \quad \sigma_{zz}^I = \sigma_{zz}^{II}, \quad \sigma_{zr}^I = \sigma_{zr}^{II} \quad \text{für } z = 0 \dots (3.4).$$

Da die Beziehungen (3.4) sowohl eben vor als auch eben nach dem Eintreffen der Fronten an einem Punkt der Trennungsebene gelten, muß die Summe der Sprünge in  $v_r, v_z, \sigma_{zz}$  und  $\sigma_{zr}$  bei  $z = 0$  in beiden Medien gleich sein. Führt man die Sprünge in den Spannungen und Geschwindigkeiten auf die Sprunggrößen  $\Phi_1^i$  und  $\Omega_1^i$  zurück, so erhält man das von der Reflexion und Brechung ebener Wellen bekannte Gleichungssystem:

$$\tilde{\Phi}_1^{rk} \cos \vartheta^{rk} - \tilde{\Omega}_1^{rw} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Phi}_1^{gk} n^{gk} \cos \vartheta^{gk} + \tilde{\Omega}_1^{gw} \sin \vartheta^{ek} = \tilde{\Phi}_1^{ek} \cos \vartheta^{ek} \dots (3.5),$$

$$\tilde{\Phi}_1^{rk} \sin \vartheta^{rk} + \tilde{\Omega}_1^{rw} n^{rw} \cos \vartheta^{rw} - \tilde{\Phi}_1^{gk} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Omega}_1^{gw} n^{gw} \cos \vartheta^{gw} = -\tilde{\Phi}_1^{ek} \sin \vartheta^{ek} \dots (3.6),$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}_1^{rk} (n^{rw^2} - 2 \sin^2 \vartheta^{ek}) - \tilde{\Omega}_1^{rw} 2 n^{rw^2} \cos \vartheta^{rw} \sin \vartheta^{rw} \\ &- \tilde{\Phi}_1^{gk} \gamma \left( n^{rw^2} - 2 \left( \frac{n^{rw}}{n^{gw}} \right)^2 \sin^2 \vartheta^{ek} \right) - \tilde{\Omega}_1^{gw} 2 \gamma n^{rw^2} \cos \vartheta^{gw} \sin \vartheta^{gw} = \tilde{\Phi}_1^{ek} (2 \sin^2 \vartheta^{ek} - n^{rw^2}) \end{aligned} \quad (3.7),$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}_1^{rk} 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Omega}_1^{rw} n^{rw^2} (\cos^2 \vartheta^{rw} - \sin^2 \vartheta^{rw}) \\ &+ \tilde{\Phi}_1^{gk} 2 \gamma \left( \frac{n^{rw} n^{gk}}{n^{gw}} \right)^2 \cos \vartheta^{gk} \sin \vartheta^{gk} - \tilde{\Omega}_1^{gw} \gamma n^{rw^2} (\cos^2 \vartheta^{gw} - \sin^2 \vartheta^{gw}) = \tilde{\Phi}_1^{ek} 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} \end{aligned} \quad (3.8).$$

$$(\gamma = \varrho_{II}/\varrho_I).$$

Durch die Tilde sind Werte an der Trennungsebene gekennzeichnet. Zur Abkürzung schreiben wir das System im folgenden in der Matrixform  $M \mathfrak{x}_1 = \tilde{\Phi}_1^{ek} \mathfrak{B}$ , wo  $M$  die Koeffizientenmatrix und  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{B}$  die Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1^{rk} \\ \tilde{\Omega}_1^{rw} \\ \tilde{\Phi}_1^{gk} \\ \tilde{\Omega}_1^{gw} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta^{ek} \\ -\sin \vartheta^{ek} \\ 2 \sin^2 \vartheta^{ek} - n^{rw^2} \\ 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} \end{pmatrix}$$

darstellen. Die Lösung des Gleichungssystems sei:

$$\tilde{\Phi}_1^i \text{ bzw. } \tilde{\Omega}_1^i = F^i(\vartheta^{ek}) \tilde{\Phi}_1^{ek} \dots (3.9).$$

Die Unstetigkeiten auf den Fronten im Innern der Medien bekommt man nun, indem man die Werte der Unstetigkeiten an der Trennungsebene als Anfangswerte in die Fortpflanzungsformel (1.16) einsetzt:

$$\Phi_1^i \text{ bzw. } \Omega_1^i = \frac{\Phi_{1h}^{ek} h F^i(\vartheta^{ek}) n^{iz} \cos \vartheta^i}{\cos \vartheta^{ek} \left\{ \left( R + \frac{h(n^{iz} - 1)}{\cos \vartheta^{ek}} \right) \left( R + \frac{h(n^{iz} - 1)}{\cos^3 \vartheta^{ek}} \right) \right\}^{1/2}} \dots (3.10).$$

Neben dem Parameter  $\vartheta^{ek}$  ist zur Festlegung der Unstetigkeitsstelle der Radius  $R (= \eta^i n^i)$  der einfallenden Front gewählt worden. Für die kugelförmige reflektierte Kompressionsfront vereinfacht sich (3.10) zu

$$\Phi_1^{rk} = F^{rk}(\vartheta^{ek}) \Phi_{1h}^{ek} \frac{h}{R}.$$

Die Formel (3.10) gilt nur für  $\vartheta^{ek} < \vartheta_{krit}^{ek}$ , mit  $\sin \vartheta_{krit}^{ek} = n^{gk} = c_I^k/c_{II}^k$ . Für  $\vartheta^{ek} > \vartheta_{krit}^{ek}$  werden die von  $\vartheta^{gk}$  abhängigen Terme der Koeffizientenmatrix  $M$  und somit sämtliche Reflexions- und Brechungsfaktoren  $F^i(\vartheta^{ek})$  komplex. Von den Parameterdarstellungen der Fronten wird ferner die der gebrochenen Kompressionsfront komplex. Das Auftreten komplexer Sprunggrößen bedeutet offensichtlich ein Versagen unserer Methode im Bereich der Totalreflexion  $\vartheta^{ek} > \vartheta_{krit}^{ek}$ . Im Falle einer einfallenden harmonischen Kugelwelle tritt diese Schwierigkeit dagegen nicht auf, da komplexe Amplituden lediglich eine Phasenverschiebung gegenüber der einfallenden Welle darstellen. Man kann diesen Vorteil für Sinuswellen auch für Stoßfronten ausnützen, indem man die einfallende Kompressionsfront durch ein FOURIERintegral über Kugelwellen verschiedener Wellenlänge darstellt. Auf diese Weise läßt sich zeigen, daß komplexe Sprunggrößen auf einer reellen Stoßfront logarithmische Singularitäten zur Folge haben.

Ist dagegen auch die Frontgleichung komplex, so tritt eine Singularität nur an der Trennungsebene auf. Dies wird durch die Aufnahmen von O. v. SCHMIDT bestätigt: die totalreflektierten Bereiche der Fronten erscheinen darin stets wesentlich stärker als die normal reflektierten und gebrochenen Bereiche, während die komplexen gebrochenen Fronten keine sichtbaren Störungen hervorrufen.

**IV. Fronten 2. Ordnung (v. Schmidtsche Kopfwellen)**

Nachdem die überkritischen Bereiche der einfallenden Front ( $\partial^{ek} > \partial_{krit}^{ek}$ ) die Trennungsebene erreicht haben, beginnt die gebrochene Kompressionsfront den anderen Fronten an der Trennungsebene voranzulaufen. Sie erzeugt dadurch ähnlich wie ein Überschallgeschöß ‚Kopfwellen‘, die sich von der Trennungsebene aus in beide Medien hinein ausbreiten. In Bild 1 sind die Fronten zu einem entsprechenden Zeitpunkt nach Eintreten der Totalreflexion wiedergegeben. Die durch die kritischen Strahlen *OJB* und *OJH* begrenzten Bereiche *BAB* und *HKH* der reflektierten Kompressions- und Wirbelfronten sowie die durch die kritischen Strahlen *OJM* und *OJF* begrenzten Bereiche *MLM* und *FEF* der gebrochenen Kompressions- und Wirbelfronten sind noch durch normale Reflexion und Brechung entstanden. Für die Unstetigkeiten auf diesen Bereichen gilt die Formel (3.10). Auf den durch Totalreflexion entstandenen Bereichen *CB*, *CH* der reflektierten Fronten und *FC* der gebrochenen Wirbelfront sind die Spannungen und Geschwindigkeiten logarithmisch singular, während die gebrochene Kompressionsfront bei *C* komplex ist. Die früher entstandene reelle gebrochene Kompressionsfront *MLM* ist dem Punkt *C* an der Trennungsebene vorausgelaufen und strahlt drei Kopfwellen *MB*, *MH* und *MF* aus, welche an den Punkten *B*, *H* und *F* in die reflektierten und gebrochenen Fronten 1. Ordnung tangential einmünden.

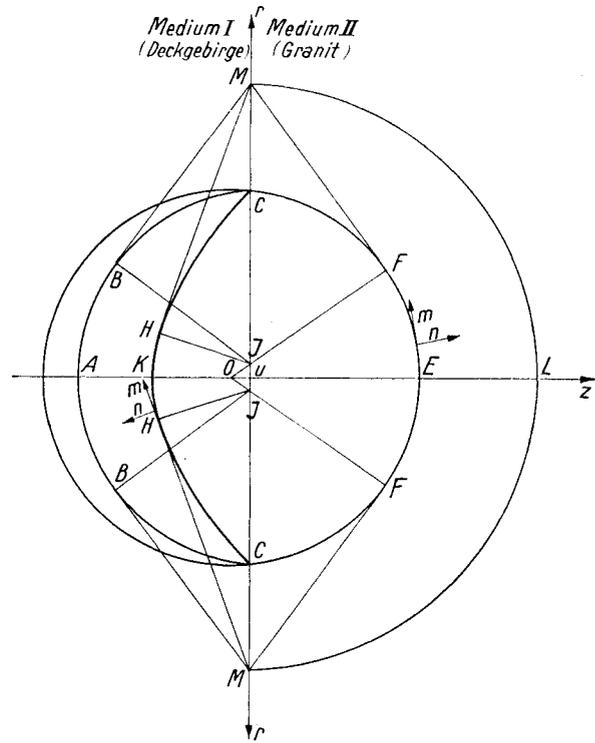


Bild 1. Die Reflexion und Brechung einer Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien  $R/h = 10$

Zur Ermittlung der Unstetigkeiten auf den Kopfwellen wenden wir die Grenzbedingungen an der Stelle *M* an. Eine Schwierigkeit scheint zunächst darin zu bestehen, daß mit den drei Kopfwellen vier Grenzbedingungen zu erfüllen sind. Nach (3.10) verschwindet jedoch die Unstetigkeit 1. Ordnung auf der gebrochenen Kompressionsfront bei *M*, so daß sich die Grenzbedingungen durch die triviale Lösung verschwindender Unstetigkeiten 1. Ordnung auf allen Kopfwellen erfüllen lassen. Für die Unstetigkeiten 2. Ordnung lassen sich nun aus den Grenzbedingungen wieder ähnliche Beziehungen ableiten wie für die Unstetigkeiten 1. Ordnung. Mit den Spannungen und Geschwindigkeiten sind auch die zeitlichen Ableitungen dieser Größen auf beiden Seiten der Trennungsebene gleich. Folglich werden auch die Sprünge der Ableitungen bei *M* in beiden Medien übereinstimmen:

$$\left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} \right]_{II}.$$

Die Unstetigkeiten der zeitlichen Ableitungen lassen sich bei den Kopfwellen durch die Sprunggrößen  $\Phi_2$  bzw.  $\Omega_2$  ausdrücken. Bei der gebrochenen Kompressionsfront hängen sie zusätzlich noch von der tangentialen Ableitung der Unstetigkeiten 1. Ordnung ab. So ist z. B.

$$\left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]^{qk} = \Phi_2^{qk} \frac{\partial \tau}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1^{qk} \cdot \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2.$$

Man erhält somit aus den Grenzbedingungen das Gleichungssystem:

$$M_{krit} \xi_2 = \chi \zeta \dots \dots \dots (4.1),$$

wobei  $M_{krit} = M(\vartheta_{krit}^k)$ ,

$$\mathfrak{L}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_2^{\varkappa, rk} \\ \tilde{\Omega}_2^{\varkappa, rw} \\ \tilde{\Phi}_2^{gk} \\ \tilde{\Omega}_2^{\varkappa, gw} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \gamma n^{gk} \left( \frac{n^{rw}}{n^{gw}} \right)^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\chi = \frac{\Phi_{1h}^k h F^{gk}(\vartheta_{krit}^k) n^{gk}}{\left[ (1 - n^{gk}) \tilde{r} \left( \tilde{r} - \frac{n^{gk} h}{1 - n^{gk}} \right) \right]^{3/2}}$$

$\tilde{r}$  ist der Abstand des Punktes  $M$  vom Ursprung. Der Index  $\varkappa$  bezieht sich auf eine Kopfwelle, das folgende Indexpaar auf die zugehörige Front 1. Ordnung.

Durch (4.1) sind die Unstetigkeiten 2. Ordnung auf den Kopfwellen und auf der gebrochenen Kompressionsfront an der Trennungsebene bestimmt. Im Innern der Medien ergeben sie sich dann wieder aus dem Fortpflanzungsgesetz (1.16), welches sich in diesem Fall vereinfacht, da der Krümmungsradius  $b$  der Meridiankurve unendlich wird. Man erhält somit schließlich für die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf einer der Kopfwellen:

$$\Phi_2^{\varkappa, i} \text{ bzw. } \Omega_2^{\varkappa, i} = \left. \begin{aligned} & \frac{\Phi_{1h}^k h F^{gk}(\vartheta_{krit}^k) D^{\varkappa, i} n^{gk} n^i c^i (1 - n^{gk})^{-1/2}}{\left( \tilde{r} - \frac{h n^{gk}}{\sqrt{1 - n^{gk}}} \right)^{3/2} \left\{ \tilde{r} \left( 1 - \left( \frac{n^{gk}}{n^i} \right)^2 \right) + d \left( \frac{n^{gk}}{n^i} \right)^2 \right\}^{1/2}} \\ & \left( \frac{h n^{gk}}{\sqrt{1 - n^{gk}}} < \tilde{r} < d \right) \end{aligned} \right\} \dots (4.2),$$

wobei  $d = \frac{R - h \sqrt{1 - (n^{gk})^2}}{n^{gk}}$  der Radius  $UM$  der Kopfwelle an der Trennungsebene ist.  $\tilde{r}$  ist der Radius  $UQ$  zu dem früheren Zeitpunkt, als sich die Unstetigkeitsstelle  $P$  an der Trennungsebene befand (siehe Bild 2).  $D^{\varkappa, i}$  ist eine Komponente des durch das Gleichungssystem  $M_{krit} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{G}$  bestimmten Vektors

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} D^{\varkappa, rk} \\ D^{\varkappa, rw} \\ D^{gk} \\ D^{\varkappa, gw} \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellungen der Kopfwellen in Abhängigkeit von  $\tilde{r}^{\varkappa, i}$  und  $\eta^{\varkappa, i}$  lauten:

$$\left. \begin{aligned} \text{Medium I: } -z \\ \text{Medium II: } +z \end{aligned} \right\} = -\tilde{r}^{\varkappa, i} \cos \vartheta^{\varkappa, i} \sin \vartheta^{\varkappa, i} + (\eta^{\varkappa, i} - \eta_0^{\varkappa, i}) \cos \vartheta^{\varkappa, i}, \\ \left. \begin{aligned} r &= \tilde{r}^{\varkappa, i} \cos^2 \vartheta^{\varkappa, i} + (\eta^{\varkappa, i} - \eta_0^{\varkappa, i}) \sin \vartheta^{\varkappa, i}, \\ t &= \eta^{\varkappa, i} / c^i, \end{aligned} \right\} \dots (4.3).$$

mit  $\sin \vartheta^{\varkappa, i} = n^{gk} / n^i, \eta_0^{\varkappa, i} = \frac{h \sqrt{1 - (n^{gk})^2}}{n^i}$

Falls neben  $n^{gk}$  außerdem der Brechungsindex  $n^{gw} = c_{\text{I}}^k / c_{\text{II}}^{gw}$  kleiner als Eins ist, so wird die gebrochene Wirbelfront ebenfalls der einfallenden Front an der Trennungsebene vorauslaufen und Kopfwellen ausstrahlen. Von diesen sind jedoch nur die beiden Kopfwellen im 1. Medium reell, während die Kompressionskopfwelle im 2. Medium wegen  $c_{\text{II}}^k > c_{\text{II}}^{gw}$  komplex wird. Dies hat ebenso wie bei den totalreflektierten Frontbereichen 1. Ordnung zur Folge, daß die Normalableitungen der Spannungen und Geschwindigkeiten auf den beiden Kopfwellen im 1. Medium logarithmisch singular werden. Als Bestätigung hierfür findet man in den Knallwellenaufnahmen von O. v. SCHMIDT, daß die Kopfwellen der gebrochenen Wirbelfronten stets wesentlich stärker als die der gebrochenen Kompressionsfronten erscheinen. Auf die Berechnung der Kopfwellen, die sich nicht wesentlich von der Berechnung der Kopfwellen der gebrochenen Kompressionsfront unterscheidet, wird hier verzichtet.

Zur Eindeutigkeit der ermittelten Unstetigkeitsflächen sei abschließend bemerkt, daß sich diese unschwer aus der Eindeutigkeit der gesamten reflektierten und gebrochenen Störungsfelder bei einem im ganzen Medium I vorgegebenen einfallenden Störungsfeld folgern läßt.

Als Zahlenbeispiel sind die drei Kopfwellen berechnet worden, die bei der Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zwischen Deckgebirge (Medium I) und Granit (Medium II) entstehen. Nach den Angaben von H. BLUT [12] gelten für die Schallgeschwindigkeiten und Dichten dieser Medien:

Deckgebirge:  $c_I^k = 3,5 \text{ km/sec}$ ,  $c_I^w = 2,0 \text{ km/sec}$ ,  $\rho_I = 2,45 \text{ grm/cm}^3$ ,  
 Granit:  $c_{II}^k = 5,9 \text{ km/sec}$ ,  $c_{II}^w = 3,4 \text{ km/sec}$ ,  $\rho_{II} = 2,70 \text{ grm/cm}^3$ ,  
 so daß  $n^{rw} = 1,75$ ,  $n^{gk} = 0,593$ ,  $n^{gw} = 1,03$  und  $\gamma = 1,10$ .

In Bild 1 sind die Fronten bei einem Radius  $R = 10 h$  der einfallenden Front aufgezeichnet. Die Unstetigkeiten der Normalableitungen der Spannungen auf den Kopfwellen sind in den Bildern 3, 4 und 5 über dem Parameter  $\bar{r}$  aufgetragen. Die Größen sind durch  $h$  und den Spannungssprung  $[\sigma_{nn}^k]_h$  der einfallenden Front bei  $R = h$  dimensionslos gemacht.

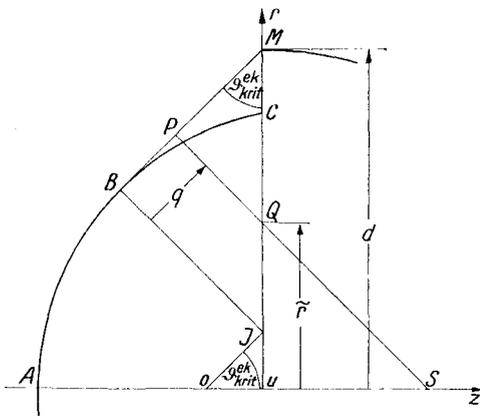


Bild 2. Die Kopfwelle BM an der reflektierten Kompressionsfront ABC

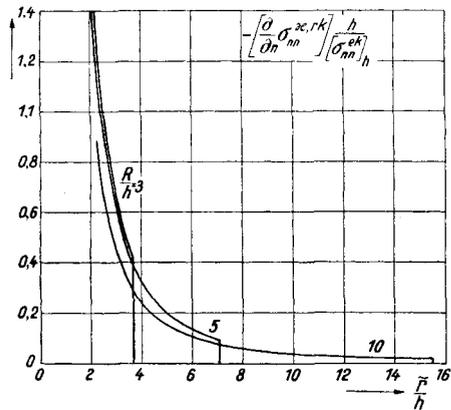


Bild 3. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Kompressionskopfwelle MB im Medium I (Deckgebirge)

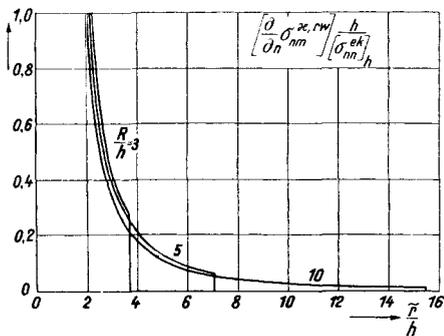


Bild 4. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Wirbelkopfwelle MH im Medium I (Deckgebirge)

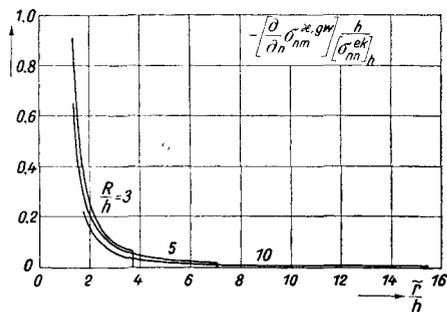


Bild 5. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Wirbelkopfwelle MF im Medium II (Granit)

### V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Bei der Totalreflexion kugelförmiger Stoßfronten lassen sich einige allgemeine, durch die Formen der Stoßfronten bedingte Gesetzmäßigkeiten feststellen: Auf den näherungsweise kugelförmigen Fronten 1. Ordnung klingen die Unstetigkeiten etwa umgekehrt proportional dem Frontradius ab. Auf den kegelförmigen Kopfwellen hingegen klingen die Unstetigkeiten 2. Ordnung nur wie  $a^{-1/2}$  ab, wo  $a$  der von der  $z$ -Achse längs eines Strahls zurückgelegte Weg ist. In tangentialer Richtung ändern sich die Unstetigkeiten auf den Kopfwellen wie  $q^{-2}$  für kleine und wie  $q^{-3/2}$  für große MACHSche Winkel  $\vartheta^{*,i}$  zwischen Kopfwelle und Trennungsebene, wo  $q$  der Abstand vom kritischen Strahl ist (siehe Bild 2).

Mit geringen Änderungen lassen sich die Ergebnisse für den Fall einer einfallenden kugelförmigen Kompressionsfront auch auf den Fall einer einfallenden Zylinderfront übertragen. Die Unstetigkeiten auf den Fronten 1. Ordnung klingen in diesem Fall nur noch umgekehrt proportional der Wurzel der Radien ab, während die Unstetigkeiten auf den ebenen Kopfwellen in Fortschrittsrichtung konstant bleiben. Tangential zur Kopfwelle ändern sich die Unstetigkeiten unabhängig vom MACHSchen Winkel näherungsweise wie  $q^{-3/2}$ .

## Literatur

- [1] O. v. SCHMIDT, Über Knallwellenausbreitung in Flüssigkeiten und festen Körpern, Phys. Zeitschr. **39** (1938), S. 864—874.
- [2] H. OTT, Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effekte zweiter Ordnung, Ann. d. Phys. **41** (1942), S. 433—466.
- [3] H. OTT, Die Sattelpunktmethode in der Umgebung eines Pols mit Anwendungen auf die Wellenoptik und Akustik, Ann. d. Phys. **43** (1943), S. 393—403.
- [4] E. GERJUOY, Refraction of Waves from a Point Source into a Medium of Higher Velocity, Phys. Rev **73** (1948), S. 1442—1449.
- [5] E. GERJUOY, Total Reflection of Waves from a Point Source, Comm. Pure and Appl. Maths. **6** (1953), S. 73—91.
- [6] G. JOOS, J. TELTOW, Abhandlung zur Deutung der Knallenwellenausbreitung an der Grenzschicht zweier Medien, Phys. Zeitschr. **40** (1939), S. 289—293.
- [7] H. MUSKAT, Theory of Refraction Shooting, Physics **4** (1933), S. 14—28.
- [8] F. SAUTER, Der flüssige Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche, ZAMM **30** (1950), S. 149—153;  
Der elastische Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche, ZAMM **30** (1950), S. 203—215.
- [9] J. NITSCHÉ, Über die Fortpflanzung kleiner Störungen in flüssigen Medien, betrachtet als Ausbreitungsvorgang von Unstetigkeiten in den Lösungen der Bewegungsdifferentialgleichungen, ZAMM **34** (1954), S. 361—373.
- [10] R. COURANT, D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. II, Berlin 1937: Springer-Verlag.
- [11] F. G. FRIEDLÄNDER, Solutions of the Wave Equations with Discontinuous Derivatives, Proc. Camb. Phil. Soc. **38** (1942), S. 378—382.
- [12] H. BLUT, Ein Beitrag zur Theorie der Reflexion und Brechung elastischer Wellen an Unstetigkeitsflächen, Z. f. Geophys. **8** (1932), S. 130—144.

Manuskripteingang: 5. 11. 1959

Anschrift: Dr. K. HASSELMANN, Hamburg 21, Brucknerstr. 25a

ZAMM **40** (1960) Heft 10/11, Seite 472—482

## Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten

VON JOZEF BRILLA

*Es wird eine unendliche elastische anisotrope Halbplatte  $y > 0$  mit gemischten Randbedingungen untersucht. Die Halbplatte ist am Rande abwechselnd eingespannt und frei drehbar gelagert. Mit Hilfe der allgemeinen Lösung einer unendlichen anisotropen Halbplatte mit am Rande gegebenen ersten Ableitungen der Durchbiegung, die mittels des Verfahrens der Fourierintegrale gegeben ist, wird eine singuläre Integralgleichung für diese Randbedingungen abgeleitet. Nach der Zurückführung des Problems auf die Hilbert-Riemannsche Aufgabe werden die allgemeine Lösung für  $n$  Abschnitte des frei drehbar gelagerten Randes und die Lösungen für verschiedene Belastungsfälle der Halbplatte mit einem frei drehbar gelagerten Abschnitt des Randes untersucht.*

*Some mixed boundary value problems of a semi-infinite elastic anisotropic plate  $y > 0$  are analysed. The plate is simply supported along a part of its boundary and clamped along the remainder. From a general solution of a semi-infinite anisotropic plate obtained by the method of Fourier integrals, where the first derivatives of the transverse displacement are given along the edge, a singular integral equation is derived for that boundary value problem. After reduction of the singular integral equation to the Hilbert-Riemann problem the general solution for  $n$  sections of the simply supported edge and solutions of various cases of loading of a semi-infinite plate with one simply supported edge are given.*

Исследуется смешанная задача изгиба полубесконечной упругой анизотропной пластинки  $y > 0$ , когда часть края пластинки заделана, а остальная часть оперта. При помощи решения изгиба полупластинки при заданных на краю первых производных изгиба определенного интегралами Фурье, строится сингулярное интегральное уравнение для этой смешанной задачи. После перевода интегрального уравнения к задаче Гильберта — Римана дается общее решение для пластинки с  $n$  участками опертого края и решения различных случаев нагрузки пластинки с одним опертым участком.

## 1. Einleitung

In der letzten Zeit wird der Lösung dünner isotroper Platten mit gemischten Randbedingungen verhältnismäßig große Aufmerksamkeit gewidmet. Bei der Lösung kann man verschiedene Verfahren verfolgen. Die Aufgabe kann auf die Lösung der FREDHOLMSchen Integralgleichung [6], [8], [12], [13] oder auf die Lösung von singulären Integralgleichungen [7], [10], [14] zurückgeführt werden. Die Methode der komplexen Veränderlichen unter direkter Zurückführung auf die HILBERT-RIEMANNsche Aufgabe wurde in den Arbeiten [3], [4] angewandt.

Mit gemischten Randbedingungen für anisotrope Platten befaßten sich G. M. L. GLADWELL [5] und H. ZORSKI [15]. Letztgenannter beschränkt seine Untersuchungen auf orthotrope Platten.